VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS
és
MATEMATIKAI STATISZTIKA
feladatgyűjtemény

Programozó matematikus, számítástechnika levelező
és tanárszakos hallgatók részére

Készítette:
Nagy Márta, Sztrik János és Tar László

Bővített, átdolgozott kiadás

Kossuth Lajos Tudományegyetem
Matematikai és Informatikai Intézet
Debrecen, 1994.

Tartalomjegyzék

ELŐSZÓ

Matematikát tanulni anékül, hogy feladatokon, problémákon is gondolkodnánk, keveset ér. A feladatok nem csak új oldalakról világítják meg, és egyúttal mélyítik is fogalmainkat, valamint azokról szerzett ismereteinket, hanem megoldásuk során azt is ellenőrizhetjük, hogy fogalmaink, ismereteink helyesek-e. A feladatok megoldása fejleszti szemléletünket, hozzásegít ahhoz, hogy "érezzük" a megtanult anyagot, és ami szintén igen fontos, kialakítja és fejleszti az önálló munkára, a problémamegoldó gondolkodásra való készségünket.

Jelen feladatgyűjtemény célja, hogy a valószínűségszámítás és matematikai statisztika alapvető fogalmait, módszereit és eszközeit a hallgatók különböző szintű feladatokon keresztül elsajátítsák és elmélyítsék.

A példatár 3 fő részből áll: valószínűségszámítás, matematikai statisztika és végeredmények. A feladatok egyik része a definiciók felhasználásával egyszerűen megoldható, a másik része elméleti jellegű, azaz be kell bizonyítani egyes állítások helyességét. A *-gal jelölt példák arra szolgálnak, hogy az érdeklődő hallgatókat egy kicsit nagyobb munkára serkentsük. Igyekeztünk a feladatokat úgy összeállítani, hogy a hallgatóknak necsak a valószínűségszámítás és matematikai statisztika alapismeretek és módszereinek elsajátításában segítsenek, hanem abban is, hogy az összefüggéseket megértsék, és megadják a módszerek adta lehetőségeket is.

A feladatgyűjtemény tematikája szervesen kapcsolódik a tudományegyetemeken oktatott tananyaghoz. A programozó matematikus, tanárszakos valamint levelező hallgatókon kívül hatékonyan használhatják mindazok, akik a "véletlen" tudománya és alkalmazásai iránt érdeklődnek.

Köszönetet mondunk Dr. Arató Mátyás egyetemi tanárnak és Dr. Fazekas István docensnek hasznos észrevételeikért és tanácsaikért.

A szerzők

Debrecen, 1994.

* A jegyzet átdolgozásához és jelen formában történő megjelentetéséhez a Matematikai és Informatikai Intézet, valamint az OTKA 1648|91 Pályázat részleges anyagi támogatást nyújtott

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

1. KOMBINATORIKA

1.1. Permutációk, kombinációk, variációk

1. Hány különböző négyjegyű számot alkothatunk két 1-es, egy 2-es és egy 3-as számjegyekből?
2. Hány olyan tízjegyű szám van, melyben minden számjegy csak egyszer fordul elő?
3. Hányféleképpen rendezhető egy sorba 10 nő és 16 férfi, ha a nők elöl állnak?
4. Hány olyan hatjegyű telefonszámot alkothatunk a $2, 3, 5, 6, 7, 9$ számjegyekből, amelyben a második jegy 3-as?
5. Egy 12 tagú társaság kerek asztalnál foglal helyet. Hányféle sorrendben ülhetnek, ha a helyek nem számozottak?
6. Egy 14 tagú tánccsoport kört alakít. Hányféleképpen alakulhat a táncosok sorrendje, ha a két legmagasabbnak egymás mellé kell kerülnie?
7. Egy kockával hatszor dobunk egymás után. Hányféle olyan dobássorozat van, amelyben nincs azonos pontszámú dobás?
8. Ha az adott elemek számát csökkentjük 2-vel, a lehetséges permutációk száma 12-ed részére csökken. Mennyi volt az elemek száma?
9. Hány ötjegyű számot írhatunk fel három 4-es és két 5-ös számjegyekből?
10. Hány olyan tízjegyű számot írhatunk fel az $1, 2, \ldots, 9$ számjegyekből, amelyben a jegyek mindegyike előfordul?

11. Egy pont egységnyi lépéseket tesz neg a számegyenesen "+" és "−" irányban. Hányféleképpen juthat el az origótól 15 lépéssel a +3-ba?
12. Hány ötjegyű páratlan szám készíthető az $1, 2, 3, 4, 5$ számjegyekből?
13. Mutassuk meg, hogy

$$(n!)^2 = [(n-1)!]\,[(n+1)! - n!]\,.$$

14. Adott a síkban n db pont. Ezek közül nincs 3 olyan, mely egy egyenesen lenne. Valamely pontból kiindulva az egyes pontokat összekötve zárt n-szöget rajzolhatunk. Hány különböző n-szöget kaphatunk?
15. Hányféleképpen lehet a sakktáblán 8 bástyát elhelyezni úgy, hogy egyik se üsse a másikat?
    a) a bástyák egyformák,
    b) a bástyák különbözőek.
16. Hányféle nyakláncot készíthetünk 7 különböző színű gyöngyből?
17. Mekkora az $1, 2, \ldots, n$ $(1 \leq n \leq 9)$ számjegyek permutációi által alkotott számok összege?
18. Négy sportrepülő felváltva gyakorlatozik egy kétszemélyes gépen úgy, hogy az egyik vezeti a gépet. Hányféle szereposztás lehet?
19. Kilenc különböző színből hányféle 3-színű zászlót készíthetünk?
20. Egy sakkversenyen 12 sakkozó vesz részt. Körmérkőzést játszanak, mégpedig úgy, hogy minden pár kétszer játszik egymás ellen váltott színekkel. Hány mérkőzésre kerül sor a versenyen?
21. Hány szelvényt kellene kitölteni a totón, hogy az első 13 mérkőzést az egyik szelvényen biztosan eltaláljuk?
22. Legalább hány számjegyre van szükségünk ahhoz, hogy 243 ötjegyű számot írhassunk fel ezek felhasználásával?
23. Hányféleképpen ültethetünk egy padra 5 férfi és 4 nő közül 5 személyt úgy, hogy 2 nő vagy 2 férfi ne kerüljön egymás mellé?
24. Hány különböző elemből képezhetünk 176-tal több 3-ad osztályú ismétléses variációt, mint 3-ad osztályú ismétlés nélkülit?

25. Hány olyan ötjegyű szám van, amelyikben 4 páros és 1 páratlan számjegy szerepel?
26. Pontból és vonásból hány, legfeljebb 4 elemű jel állítható össze?
27. Mekkora az $1, 2$ számjegyekkel felírható ötjegyű számok összege?
28. 4 személy egyszerre érkezik egy kétszemélyes lifthez. Hányféleképpen választhatjuk ki közülük az első menet utasait?
29. Hányféleképpen helyezhetünk el 5 levelet 16 rekeszben, ha a levelek között nem teszünk különbséget és egy rekeszbe
    a) legfeljebb 1 levelet,
    b) több levelet is tehetünk?
30. Adott a síkban 10 általános helyzetű pont. Hány olyan egyenes van, amely az adott pontok közül kettőn átmegy.
31. Egy gyár 4 férfi és 4 női munkást keres felvételre. A felvételre 5 férfi és 8 nő jelentkezik. Hányféleképpen választható ki a kívánt létszám?
32. Hány olyan négyjegyű, különböző számjegyekből álló szám van, amelyekben 2 páros és 2 páratlan jegy szerepel?
33. Egy társaságban mindenki mindenkivel kezet fogott. Összesen 66 kézfogás történt. Hányan voltak?
34. Hányféleképpen oszthatunk ki 32 kártyát négy játékos között úgy, hogy minden játékos 8 kártyát kapjon?
35. Egy gépkocsivezető 4-üléses kocsijával 9 szenélyt akar 3 csoportban egymás után elszállítani. Hányféleképpen teheti ezt, ha a legidősebb személyt az első menetben szállítja?
36. Egy úszóversenyen az egyik versenyszámban 16 induló van. Ezeket két 8-as csoportba kívánják beosztani, mégpedig úgy, hogy a két favorit egyazon csoportba kerüljön. Hányféleképpen végezhető el a beosztás?
37. Egy gyermek 5 különböző fagylaltból választhat háromgombócos adagot. Hányféle lehetőség van a választásra?
38. Egy társaságban 7 fiú és 5 lány van. Hányféleképpen alakulhat belőlük 5 egyszerre táncoló pár?

39. Egy állatszelídítő 5 oroszlánt és 4 tigrist akar kivezetni a porondra, de 2 tigris nem jöhet egymás után. Hányféleképpen állíthatja sorba az állatokat?
40. Hányféleképpen lehet sorbarendezni n 0-t és k 1-est úgy, hogy két 1-es ne kerüljön egymás mellé?
41. Egy állatszelidítőnek n db oroszlánja és k db tigrise van. Hányféleképpen állíthatja sorba az állatokat, ha 2 tigris nem állhat egymás mellett? Mikor oldható meg a feladat?
42. Egy könyvespolcon 12 különböző könyv áll. Hányféleképpen lehet közülük kiválasztani ötöt úgy, hogy ezek között ne legyenek egymás mellett állók?
43. Hányféleképpen lehet n db könyv közül k-t kiválasztani úgy, hogy ezek között ne legyenek szomszédosak? Mikor oldható meg a feladat?

44.* Artúr király asztalánál 12 lovag ül. Mindegyikük hadilábon áll a szomszédaival. 5 lovagot kell kiválasztani, akik kiszabadítják az elvarázsolt hercegnőt. Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy az 5 lovag között ne legyenek ellenségek?

45.* Hányféleképpen lehet a kerek asztalnál ülő n lovag közül k-t kiválasztani úgy, hogy szomszédokat nem választhatunk?

46.* Hányféleképpen lehet n elem sorrendjét úgy felcserélni, hogy egyik se maradjon az eredeti helyén?

47.* Határozzuk meg n elem olyan permutáciainak a számát, amelyekben r számú kitüntetett elem nincs az eredeti helyén (a többi elem helye tetszőleges lehet)!

48.* A sivatagban 9 tevéből álló karaván halad. Az utazás olyan hosszúra nyúlik, hogy végül mindegyik teve megunja, hogy ugyanazt a társát látja maga előtt. Hányféleképpen lehet a tevéket úgy átrendezni, hogy egyikük előtt se menjen ugyanaz a teve, mint eredetileg?

49.* A körhintán n gyerek ül. Úgy akarnak helyet cserélni, hogy mindegyik előtt más üljön, mint előzőleg. Hányféleképpen tehetik ezt meg?

50. Három gyerek 40 almát szedett. Hányféleképpen oszthatják el egymás között az almákat, ha azok mind egyformák?

51. Hányféleképpen lehet k személy között n egyforma tárgyat szétosztani úgy, hogy mindegyik legalább r db-ot kapjon?
52. Egy országban nincs két olyan ember, akiknek pontosan ugyanazok a fogai hiányoznának. Mekkora lehet legfeljebb az ország lakossága? (Egy embernek 32 foga lehet.)
53. Hányféleképpen oszthatunk el három ember között 6 egyforma almát, 1 narancsot, 1 szilvát, 1 citromot, 1 körtét, 1 birsalmát és 1 datolyát?
54. Hányféleképpen oszthatjuk el ezeket a gyümölcsöket úgy, hogy mindenki pontosan 4 db-ot kapjon?
55. Hányféleképpen tehetünk 9 dobozba 7 fehér és 2 fekete golyót? A dobozok különbözőek és egyesek közülük üresen is maradhatnak!
56. 4 egyforma kockát feldobunk. Hányféle módon alakulhat a dobás eredménye? (A kockákat nem különböztetjük meg.)

1.2. A binomiális tétel. A binomiális együtthatók tulajdonságai.

1. Határozzuk meg a következő összegeket:

   a)
$$3\binom{n}{1}+3^2\binom{n}{2}+\cdots+3^n,$$

   b)
$$\frac{1}{2^{2n}}-\frac{1}{2^{2n-1}}\binom{2n}{1}+\cdots+1,$$

   c)
$$\sum_{k=0} n\binom{n}{k}p^{n-2k} \quad !$$

2. Igazoljuk az alábbi azonosságokat:

   a)
$$\binom{m+n}{k}=\sum_{\ell=0}^{k}\binom{m}{\ell}\binom{n}{k-\ell},$$

b)

$$\binom{2n}{n} = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}^2 \quad !$$

3. Bizonyítsuk be a binomiális együtthatók alábbi tulajdonságait:

a)

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots,$$

b)

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \quad !$$

4. Állítsunk elő az $y = (1+x)^n$ függvény differenciálhányadosai segítségével képletet a következő összegekre:

a)

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}\binom{n}{k},$$

b)

$$\sum_{k=\ell}^{n} \binom{k}{\ell}\binom{n}{k} \quad !$$

5. Igazoljuk a következő egyenlőségeket:

a)

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{k} = \binom{m+n}{n},$$

b)

$$\binom{n}{k} = \sum_{\ell=1}^{n-k+1} \binom{n-\ell}{k-1},$$

c)*

$$\binom{m-1}{k-1} = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{i-k}\binom{m}{i} \quad !$$

6.* Igazoljuk a következő egyenlőséget:

$$\sum_{j=n}^{N}(-1)^{j-n}\binom{j}{n}\binom{N}{j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = N, \\ 0, & \text{ha } n \neq N \end{cases} \quad !$$

7.* Igazoljuk, hogy $a > 0$, $b > 0$ esetén fennáll a

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lg a^{n-k}b^{k} = \lg(ab)^{n2^{n-1}}$$

egyenlőség!

8. Mutassuk meg, hogy

$$\binom{n-k+1}{k-1} + \binom{n-k}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k} \quad !$$

2. ESEMÉNYALGEBRA

1. Lássuk be, hogy bármely A, B eseményre igaz

$$A = A + AB, \qquad A + B = A + \overline{A}B \quad !$$

2. Milyen kapcsolat áll fenn az események között, ha igaz

   a) $AB = A$,

   b) $A + B = A$,

   c) $A + B = \overline{A}$,

   d) $AB = \overline{A}$,

   e) $A + B = AB$?

3. Igazoljuk, hogy minden A, B eseményre igazak a következők:

   a) $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}$

   b) $(\overline{AB})(\overline{\overline{A}\,\overline{B}}) = \overline{(\overline{A\overline{B}})(\overline{\overline{A}B})} \quad !$

4. Mutassuk meg, hogy ha A, B, C tetszőleges események, akkor az ABC és $(\overline{A + \overline{B} + \overline{C}})$ események egymást kizárják!

5. Bizonyítsuk be az alábbi összefüggéseket:

   a) $(AB) \setminus C = (A \setminus C)(B \setminus C)$,

   b) $A \setminus (BC) = (A \setminus B) + (A \setminus C)$,

   c) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B + C)$,

   d) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) - (B \setminus C)$,

   e) $(A \setminus B) + C = [(A + C) \setminus B] + BC$!

6. Igazoljuk az alábbi formulák helyességét a $A \circ B = (A \setminus B) + (B \setminus A)$ (szimmetrikus differencia) felhasználásával:

   a) $A \circ B = (A + B) \circ AB$,

   b) $(A \circ B)B = B \circ A$,

   c) $A(B \circ C) = AB \circ AC$,

   d) $A + B = A \circ B \circ AB$!

7. Legyen $A \triangle B = AB + \overline{AB}$.
   a) Igaz-e, hogy a művelet kommutatív és asszociatív?
   b) Igaz-e, hogy disztributív abban az értelemben, hogy

$$(A \triangle B)C = AC \triangle BC \quad ?$$

   c) Igaz-e, hogy

$$(A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C \quad ?$$

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely eseményalgebra elemei a szimmetrikus differenciára, mint csoportműveletre nézve Ábel csoportot alkotnak!
9. Bizonyítsuk be, hogy bármely Boole-algebra elemei a szimmetrikus differencia és a szorzás műveletére nézve egységelemes kommutatív gyűrűt alkotnak!
10.* Egy n elemi eseményt tartalmazó véges eseményalgebrában sokféle teljes eseményrendszer adható meg. Jelöljük az egymástól különböző teljes eseményrendszerek számát T_n-nel. Mutassuk meg, hogy

$$T_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} T_k \quad !$$

3. VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

3.1. A klasszikus képlettel megoldható feladatok

1. Ha tíz könyvet helyezünk el tetszőleges sorrendben egy könyvespolcon és hármat előre megjelölünk, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az elhelyezés során a megjelölt könyvek egymás mellé kerülnek?
2. 10 telefonvezeték közül 4 beázás miatt elromlik. Ezután 4 vonalon kísérelnek meg hívást. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a hívások fele a beázás miatt nem lesz sikeres?
3. Egy csomag magyar kártyából kiveszünk 1 lapot, megnézzük a színét, majd visszatesszük. Ismét választunk 1 lapot, mennyi a valószínűsége annak, hogy a 2 lap azonos színű?
4. 10 lapra felírjuk a tíz számjegyet. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy 2 lapot kihúzva, egymás mellé téve a kapott szám osztható 18-cal!
5. 5 különböző szakasz hossza rendre $1, 3, 5, 7, 9$ egység. Mennyi a valószínűsége annak, hogy 3 szakaszból háromszög szerkeszthető?
6. A magyar kártyacsomagból egyszerre 3 lapot kihúzva mekkora a valószínűsége annak, hogy közülük legalább 1 zöld?
7. Egy sötét helyiségben 4 egyforma pár cipő össze van keverve. 4 darabot kiválasztva mennyi a valószínűsége annak, hogy a cipők között van legalább 1 pár?
8. 10 db egyforintost feldobunk. Mekkora annak a valószínűsége, hogy mindegyiken írás vagy mindegyiken fej van?
9. Egy dobozban n golyó van, $1, 2, ..., n$ számokkal jelölve. Egyenként kihúzzuk az összes golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy
   a) minden alkalommal nagyobb számú golyót húzunk ki, mint az előző volt,

b) a k-val jelölt golyót éppen a k-adiknak húzzuk ki?

10. Egy kör alakú asztal mellett tízen vacsoráznak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy két nő nem kerül egymás mellé, ha az asztalnál 5 férfi és 5 nő volt?
11. Egy kerek asztalhoz n különböző magasságú ember ül le. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a legnagyobb és a legkisebb egymás mellé kerül?
12. Egy urnában 6 piros, több fehér és fekete golyó van. Annak valószínűsége, hogy egy golyót kihúzva az fehér vagy fekete $3/5$, piros vagy fekete $2/3$. Hány fehér és fekete golyó van az urnában?
13. Egy urnában M piros és $N-M$ fehér golyó van. Egymás után húzunk az urnából golyókat visszatevés nélkül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a k-adik húzásnál kapunk először piros golyót?
14. Egy dobozban 5 piros golyó van. Hány fehér golyót kell hozzátenni, hogy fehér golyó húzásának valószínűsége nagyobb legyen 0.9-nél?
15. Két sakkcsapat körmérkőzést rendezett. Mindkét csapat 2-nél több játékossal rendelkezett. Mindenki mindenkivel játszott 1 játszmát. A mérkőzés során 163 játszmára került sor. A mérkőzésre való felkészülés során házi versenyt is rendezett mindkét csapat, ezekben is mindenki 1 játszmát játszott mindenkivel a saját csapatából. A két csapatban így összesen 66 játszmára került sor. A mérkőzések befejezése utáni banketten, amin minden játékos részt vett, véletlenszerűen 2 játékossal beszélgetett a riporter. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindkét játékos a nagyobb létszámú csapat tagja volt?
16. 20 db 40 W-os és 30 db 60 W-os égőből egymás után kiveszünk 2 darabot anélkül, hogy az elsőt visszatennénk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
    a) mindkettő 40 W-os lesz,
    b) egyik sem 40 W-os,
    c) csak az egyik 40 W-os?
17. Oldjuk meg az előző feladatot úgy is, hogy a mintavételt visszatevéssel végezzük!

18. 9 golyót helyezzünk el véletlenszerűen 4 dobozba. Mekkora annak a valószínűsége, hogy minden dobozba legalább 2 golyó kerül, ha a golyók egyformák?
19. Dobjunk fel 2 kockát egyszerre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7?
20. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 3 kockával 17-et dobunk?
21. A fiúk és lányok születési valószínűségeit 1/2-nek tekintve mennyi annak a valószínűsége, hogy egy hatgyernekes családban 3 fiú és 3 lány van?
22. 100 alma közül 10 férges. Kiveszünk az almák közül válogatás nélkül ötöt. Mennyi a valószínűsége, hogy lesz közötte férges?
23. Egy vendéglő egyik asztalánál 9 vendég ül. Összesen rendelnek 3 üveg sört, 4 tésztát és 2 kávét. (Minden vendég csak egy ételt vagy italt rendel.) Pincérünk emlékszik arra, hogy miből mennyit kell hoznia, de teljesen elfelejtette, hogy kinek mit kell adnia. Találomra szétosztja amit hozott. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mindenki azt kapja, amit rendelt?
24. 10 ember utazik egy vonaton, egymástól függetlenül szállnak be összesen 4 vagonba. Mi a legvalószínűbb elhelyezkedése a 4 vagonban a 10 utasnak?
25. Egy urnában 3 piros, 3 fehér és 3 zöld golyó van. Ezek közül hatot véletlenszerüen kiválasztva, mennyi annak a valószínűsége, hogy legyen köztük mindhárom színű?
26. Egy kockával 2-szer egymás után dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az első dobás eredménye nagyobb, mint a másodiké?
27. Mennyi a valószínűsége, hogy
    a) 12 ember,
    b) k ember ($k < 12$) születésnapja különböző hónapokban legyen (minden hónap egyformán valószínű)!

28.* Legalább hány ember esetén nagyobb 1/2-nél annak valószínűsége, hogy legalább kettőnek azonos hónapra essék a születésnapja?

29. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy 4 tagú társaságban legyen 2 ember, akinek azonos napra esik a születésnapja? (365 napot veszünk alapul.)
30. Egy hallgató 40 tétel közül húszat úgy megtanult, hogy abból jelesre tud vizsgázni, a másik 20-ból csak jóra. A vizsgatétel kiválasztáskor a hallgató kihúz 2 tételt, és választhat, hogy ezek közül melyikből felel. Mennyi a valószínűsége, hogy jelest kap?

3.2. Geometriai valószínűségek

1. Egy ember elfelejtette felhúzni az óráját, és így az megállt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a nagymutató a hármas és hatos között áll meg. Tételezzük fel, hogy annak a valószínűsége, hogy a nagymutató a számlap kerületének valamely megadott ívén áll meg az illető ív hosszával arányos!
2. Egy R sugarú körre véletlenszerüen rádobunk egy r sugarú körlapot, $r < R$. Feltesszük, hogy annak a valószínűsége, hogy a rádobott körlap középpontja a R sugarú kör valamely tartományába esik, arányos e tartomány területével. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a R sugarú kör teljes egészében tartalmazza a r sugarú kört?
3. Egy futball-labdát találomra nekirúgunk egy háznak, amely 10 m hosszú és 5 m magas. A házon két 2×1.5 m-es ablak van. Mennyi a valószínűsége, hogy a labdát az ablakba rúgjuk?
4. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra kijelölünk két pontot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a köztük levő távolság kisebb, mint egy előre megadott h hossz, $0 < h < 1$.
5. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon válasszunk ki találomra két pontot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a keletkezett szakaszokból háromszög szerkeszthető?

6. A $(0,1)$ intervallumra véletlenszerűen rádobunk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a keletkezett szakaszok hossza
   a) kisebb mint $1/2$,
   b) nagyobb mint $1/4$?
7. Válasszunk ki a $(0,1)$ intervallunon találomra egy pontot. Jelöljük e pontnak a 0-tól vett távolságát ξ-vel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a ξ, $1-\xi$, $1/2$ hosszúságú szakaszokból háromszöget lehet szerkeszteni?
8. A $(-1,1)$ intervallumba véletlenszerüen dobjunk két pontot. Jelölje koordinátájukat ξ és η. Tekintsük a következő másodfokú egyenletet:

$$x^2 + \xi x + \eta = 0.$$

   Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a gyökök valósak!
9. Két személy megbeszéli, hogy délelőtt 10 és 11 óra között találkoznak egy adott helyen. Érkezésük az adott időn belül véletlenszerű. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a korábban jövőnek nem kell egy negyed óránál többet várnia a másikra?
10. Mennyi a valószínűsége annak, hogy valamely, találomra kiválasztott, az egységnél rövidebb élhosszúságú téglatest testátlója az egységnél kisebb?
11. Véletlenszerűen felírunk két, 1-nél kisebb, pozitív számot. Mekkora a valószínűsége, hogy
   a) összegük kisebb 1-nél,
   b) szorzatuk kisebb $2/9$-nél,
   c) összegük kisebb 1-nél és szorzatuk kisebb $2/9$-nél?
12. Egy egységnyi oldalú négyzet 2 átellenes oldalán találomra választunk egy-egy pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ezek távolsága α-nál kisebb $(1 \le \alpha \le \sqrt{2})$?
13. A $(0,a)$ szakaszon véletlenszerűen elhelyezünk 2 pontot. Mennyi a valószínűsége, hogy ezen pontok 0-tól vett távolságainak négyzetösszege a^2-nél nagyobb lesz?

14. Egy egyenlő oldalú háromszög kerületén válasszunk három pontot véletlenszerűen. E három véletlen pont meghatároz egy háromszöget. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kis véletlen háromszög lefedje az eredeti háromszög súlypontját? Mutassuk meg, hogy ez a valószínűség tetszőleges háromszög esetén is ugyanannyi!

15.* Tegyük most fel, hogy pontjainkat egyenlő oldalú háromszög belsejében választjuk véletlenszerűen. Mutassuk meg, hogy a fedés valószínűsége ugyanannyi, mint az előző feladatban!

16.* Találomra és egymástól függetlenül választunk egy-egy pontot egy négyzet kerületén és belsejében. Mennyi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága kisebb lesz a négyzet oldalánál?

3.3. Valószínűségszámítási tételek és ezek alkalmazásai

1 . Mutassuk meg, hogy ha $P(A) \geq 0.7$ és $P(B) \geq 0.9$, akkor

$$P(AB) \geq 0.6 \quad !$$

2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B, C esetén

$$P(A \circ C) \leq P(A \circ B) + P(B \circ C) \quad !$$

3. Bizonyítsuk be, hogy ha $P(B \circ C) = 0$, akkor $P(B) = P(C)$.

4. Mutassuk meg, hogy bármely A,B,C esetén

$$|P(AB) - P(AC)| \leq P(B \circ C)$$

5.* Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A,B esetén

$$|P(AB) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}!$$

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A_1, \ldots, A_n$ esetén

$$P(A_1 \circ \cdots \circ A_n) \geq P(A_1) + \cdots + P(A_n) - (n-1)!$$

7.* n sorban elhelyezett dobozba találomra N golyót helyezünk el úgy, hogy a golyóknak nind az n^N elhelyezését egyenlően valószínűnek tételezzük fel. Mennyi a valószínűsége, hogy az első k doboz egyike sem üres?

8. Egy urnában $1, 2, \ldots, N$ számjegyekkel jelzett lapocskák vannak. Mekkora a valószínűsége annak, hogy sorjában kihúzva a lapocskákat, legalább egyet ugyanolyan sorszámú húzáskor húzunk ki, mint a rajta levő szám?

9.* Mennyi a valószínűsége annak, hogy N tárgyat elhelyezve n dobozba pontosan k számú üres doboz lesz?

10.* n vizsgázó lefelé fordítva rakja le az indexét egy asztalra, majd mindegyik felvesz egy indexet találonra.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan k hallgató választja ki a saját indexét?
   b) Mihez tart ez a valószínűség, ha $n \to \infty$?

11.* Egy n házaspárból álló társaság táncol. Az összes párokra való oszlás egyenlően valószínű. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy bizonyos pillanatban senki sem táncol a feleségével?

3.4. Feltételes valószínűségek, a teljes valószínűség tétele és Bayes-tétele

1. Mutassuk meg, hogy tetszőlege A, B esetén fennáll a következő egyenlőség, ha $P(B) > 0$

$$P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)!$$

2. Igazoljuk, hogy bármely A, B, C, $P(C) > 0$ esetén

$$P[(A+B)|C] = P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C)!$$

3. Legyen $P(B) > 0$. Igazoljuk, hogy

$$P(A|B) = \begin{cases} P(A)/P(B), & \text{ha } A \subseteq B, \\ 1, & \text{ha } B \subseteq A. \end{cases}$$

4. Legyen $P(A) = 1/4$, $P(A|B) = 1/4$, $P(B|A) = 1/2$. Számítsuk ki a $P(A+B)$ és $P(\overline{A}|\overline{B})$ valószínűségeket!
5. Mennyi $P(A)$ és $P(B)$, ha $P(A|B) = 7/10$, $P(B|A) = 1/2$, $P(A|\overline{B}) = 1/5$?
6. Igazoljuk, hogy ha $P(A) = 4/5$ és P(B)=9/10, akkor

$$\frac{7}{9} \leq P(A|B) \leq \frac{8}{9}!$$

7. Bizonyítsuk be, hogy ha $P(BC) > 0$, akkor

$$P(AB|C) = P(A|BC) \cdot P(B|C)!$$

8. Ha egy kétgyermekes családnál tudjuk, hogy legalább az egyik gyerek lány, akkor mi a valószínűsége, hogy van fiú is a családban?
9. 2 kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 7, feltéve, hogy a dobott számok összege páratlan?
10. Egy asztalnál négyen kártyáznak. A 32 lapos magyar kártyát egyenlően szétosztják egymás között. Ha az egyik kiválasztott játékosnak nem jut ász, mennyi a valószínűsége annak, hogy az utána következőnek sem jut?
11. Valakit keresünk az egyetemen. A keresett személy egyforma valószínűséggel lehet adott 5 terem valamelyikében, és annak a valószínűsége, hogy az 5 terem valamelyikében jelen van: p. Már 4 termet

megnéztünk, és a keresett személyt nem találtuk. Mennyi a valószínűsége, hogy az ötödik teremben megtaláljuk?

12. Egy 32 lapos kártyacsomagból 4 lapot húzunk ki egymás után visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az első 2 király, a harmadik felső, a negyedik pedig ász?
13. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra két pontot választunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindkét pont a szakasznak egyik előre kijelölt végpontjához van közelebb, feltéve, hogy a választott pontok távolsága kisebb, mint $1/3$?
14. A és B egymástól függetlenül hazudnak ill. mondanak igazat $2/3$ ill. $1/3$ valószínűséggel. Feltéve, hogy A azt állítja, hogy B hazudik, mennyi a valószínűsége, hogy B igazat mond?
15. Egy egyetemi vizsgán az A-szakos hallgatók 60%-a, a B-szakos hallgatók 80%-a szerepel sikeresen. Az A-szakos hallgatók az évfolyam 15%-át teszik ki. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott hallgató sikeresen vizsgázott?
16. Egy céllövöldében három rekeszben vannak puskák. Az első rekeszben 3 puska, a másodikban 1, a harmadikban 2. Ezekkel rendre $0.5, 0.7, 0.8$ valószínűséggel találunk célba. Mennyi a találat valószínűsége, ha találomra választunk ki puskát?
17. Egy dobozban 5 fehér és 2 piros golyó van. Előbb 2 golyót húzunk a dobozból visszatevés nélkül, majd egy harmadikat. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a harmadiknak kivett golyó piros?
18. Két doboz mindegyikében 100 db csavar van. Az első dobozban 10 db, a másodikban 6 selejtes. Találomra kiveszünk egy csavart valamelyik dobozból. A dobozok közül egyenlő valószínűséggel választunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kivett csavar jó?
19. Egy kör alakú céltábla $2n$ egyenlő szögnyílású, a középponttól kiinduló körcikkekre van bontva. Mennyi a valószínűsége, hogy két egymás utáni lövés átellenes körcikkbe esik?
20. Két játékos, A és B a következő játékszabályok alapján játszik. A feldob egy kockát, azután két érmét annyiszor dob fel, ahányat a

kockával dobott. Ha e dobások során legalább egyszer két fejet dobott, akkor B fizet A-nak 1 Ft-ot, ellenkező esetben A fizet B-nek 1 Ft-ot. Melyiküknek előnyös a játék? (A játék annak előnyös, akinek nagyobb a nyerési lehetősége.)

21.* Szindbádnak jogában áll N háremhölgy közül választani egyet oly módon, hogy az előtte egyenként elvonuló hölgyek valamelyikére rámutat. Tegyük fel, hogy egyértelmű (szigoruan monoton) szépségi sorrendet tud megállapítani az előtte elvonuló háremhölgyek között, és hogy a háremhölgyek bármely elvonulási sorrendje egyenlően valószínű. Szindbád k számú hölgyet elenged, majd a továbbiak közül kiválasztja az elsőt, aki szebb az összes előtte elvonultnál.
   a) Mennyi a valószínűsége, hogy a legszebb hölgyet választja ki?
   b) Milyen k-ra lesz a legnagyobb a valószínűsége annak, hogy a legszebb hölgyet választja ki, ha N elég nagy?

22. Két város közötti távíróösszeköttetés olyan, hogy a leadott távírójelek közül a pontok 2/5-e vonallá torzul, a vonalak 1/3-a pedig ponttá. A leadott jelek közül a pontok és vonalak aránya 5 : 3. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha a vevő oldalon pontot kaptak, akkor az adó pontot továbbított?

23. Tegyük fel, hogy a férfiak 5%-a és a nők 0.25%-a színvak. Egy 20 nőből és 5 férfiből álló csoportból egy személyt találomra kiválasztunk. Megállapítjuk, hogy színvak. Mennyi a valószínűsége, hogy nőt választottunk ki?

24. n doboz mindegyikében n számú golyó van, az i-edikben i db piros, $i = 1, \ldots, n$, a többi fehér. Véletlenszerűen kiválasztunk egy dobozt, és abból kihúzunk egy golyót. Ez piros lett. Mennyi annak a valószínűsége, hogy azt az utolsó két doboz valamelyikéből húztuk?

25. Tegyük fel, hogy valamely üzemből kikerülő árú 75% valószínűséggel első osztályú. A kikerült termékeket vizsgálatnak vetik alá. Annak valószínűsége, hogy a vizsgálat során egy első osztályú terméket nem első osztályúnak minősítenek, 0.02. Annak valószínűsége viszont, hogy egy nem első osztályút első osztályúnak minősítenek, 0.05. Mennyi annak

a valószínűsége, hogy egy olyan termék, amely első osztályú minősítést kapott, valóban első osztályú?

26. Egy gyárban három gép gyárt csavarokat. A termékek 25%-át az A-gép, 35%-át a B-gép, a többit a C-gép gyártja. Az A-gép 5%-ban, a B-gép 4%-ban, a C-gép pedig 2%-ban termel selejteket. Ha egy találomra kiválasztott csavar selejtes, mennyi a valószínűsége, hogy azt az A-gép gyártotta?

27.* Képzeljük el a következő vizsgáztatási rendszert: minden vizsgakérdés egy vizsgalapra van felírva, és minden kérdéshez három válasz van megadva, amelyik közül csak egy helyes. A vizsgázónak ezt a lapot kell kitöltenie a helyesnek vélt válasz megjelölésével. Tegyük fel, hogy a vizsgázó p valószínűséggel tudja a helyes választ. Ha nem tudja a választ, akkor $1/3$ valószínűséggel jelöli meg valamelyiket. A vizsgalap átnézése után kiderül, hogy helyes a válasz. Mennyi a valószínűsége, hogy azért adott helyes választ, mert tudta a helyes eredményt?

28.* A tanszék egyik oktatója p valószínűséggel szokott bejönni a tanszékre. Feltesszük, hogy ha ismerőseinek azt mondja, hogy aznap bejön, akkor annak a valószínűsége, hogy k ember keresi aznap telefonon $\mu^k \frac{e^{-\mu}}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots$. Ha pedig azt mondta, hogy nem jön be, akkor $\lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!}$ $(0 < \lambda < \mu)$. Feltéve, hogy k hívás érkezett, mennyi annak a valószínűsége, hogy az oktató bejön aznap? (Ha az oktató azt mondja, hogy bejön, akkor tényleg bejön!) Vizsgáljuk a $k \to \infty$ esetet!

29.* Legyen $(1-p)p^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ annak valószínűsége, hogy egy almafán n virág van. Tegyük fel, hogy minden virágból α valószínűséggel lesz érett gyümölcs. Feltéve, hogy egy almafán r alma van, mennyi annak a valószínűsége, hogy a fán eredetileg n virág volt?

3.5. Független események valószínűsége

1. Igazoljuk, hogy ha A és B független események, akkor $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is az!
2. Igazoljuk, hogy ha A, B és C események páronként függetlenek, és A független $B+C$-től, akkor A, B, C teljesen függetlenek!
3. Ketten lőnek egy céltáblára. A találat valószínűsége az első személy esetében 0.7, a második esetében 0.6. A találatok egymástól függetlenek. Mennyi annak a valószínűsége, hogy legalább egy találat van a céltáblán?
4. Ketten felváltva lőnek egy céltáblára az első találatig. A kezdő találatának a valószínűsége 0.2, a másodiké 0.3. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kezdőé lesz az első találat?
5. Egy r sugarú körbe szabályos hatszöget rajzolunk. Ezután a körlapon 4 pontot választunk találomra. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a 4 pont a hatszög belsejébe esik?
6. Az összes számjegyet egyenként felírjuk tíz lapra. A lapok közül találomra választunk egyet, megnézzük a rajta levő számjegyet majd visszatesszük. Legalább hányszor kell így húznunk, hogy 0.9-nél nagyobb valószínűséggel legyen a kihúzott számok között legalább egy páros szám?
7. Az A, B, C események páronként függetlenek és pozitív valószínűségűek. Alkothatnak-e teljes eseményrendszert?
8. Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subseteq B$ és A és B függetlenek, akkor $P(B) = 1$ vagy $P(A) = 0$!
9. Legyenek az $A_1, \ldots, A_n$ események függetlenek és legyen $P(A_i) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$. Igazoljuk, hogy

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i)!$$

10. Háromszor dobunk fel egy szabályos pénzdarabot. Jelentse A azt az eseményt, hogy a dobások között fej és írás is előfordul, B pedig,

azt az eseményt, hogy legfeljebb 1 írás fordul elő. Állapítsuk meg, független-e A és B!

11. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két, egymástól függetlenül kitöltött lottószelvény közül legalább az egyik négytalálatos?

12.* Kiszámítandó a $P(A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_n)$ ha az $A_1, \ldots, A_n$ események függetlenek, és mindegyik valószínűsége p!

13.* Az Ω eseménytér n elemi eseményből áll. k milyen értékeire lehet megadni Ω részhalmazain a P valószínűséget és az $A_1, \ldots, A_k$ eseményeket úgy, hogy azok függetlenek legyenek és $0 \leq P(A_1) \leq 1$ $i = 1, \ldots, k$ teljesüljön?

14.* Legyenek az A_1, A_2, A_3 események egymást kizáró események, melyek a $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2$, $P(A_3) = p_3$ valószínűséggel következnek be. Mennyi a valószínűsége annak, hogy n független kisérletet végezve, a kisérlet során az A_2 előbb következett be, mint az A_1 vagy A_3? Számítsuk ki e valószínűség határértékét, ha a kísérletek száma a végtelenhez tart!

4. A VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK ÉS JELLEMZŐIK

4.1. Valószínűségeloszlás. Eloszlás- és sűrűségfüggvény

1. Az alábbi számsorozatok közül melyek alkotnak valószínűségeloszlást?
   a) $p^k q^2, \quad q = 1 - p, \quad 0 < p < 1, \quad k = 1, 2, \ldots;$
   b) $p^{k-n} q, \quad k = n, n+1, \ldots;$
   c) $\frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \ldots;$
   d) $p^3, 3p^2q, 3pq^2, q^3, \quad q = 1 - p, 0 < p < 1;$
   e) $3^k e^{-3}/k!, \quad k = 0, 1, \ldots.$
2. Eloszlásfüggvények-e a következő függvények?
   a) $F(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan x$
   b) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \frac{x}{1+x}, & x > 0 \end{cases}$
   c) $F(x) = e^{-e^{-x}}$
   d) $F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1-e^{-x}}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$
   e) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^3}{1+x^2}, & x \ge 0 \end{cases}$
3. Milyen α és c értékre lesz eloszlásfüggvény a következő függvény:
$$F(x) = e^{-ce^{-\alpha x}}?$$
4. Bizonyítsuk be, hogy ha $F(x)$ eloszlásfüggvény, akkor $[F(x)]^\alpha$ is eloszlásfüggvény, $\alpha > 0$!

5. Bizonyítsuk be, hogy ha $F(x)$ eloszlásfüggvény, akkor

$$G_1(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} F(t)dt, \quad G_2(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} F(t)dt$$

is eloszlásfüggvény!

6. Legyen $F(x)$ folytonos eloszlásfüggvény és $F(0) = 0$. Mutassuk meg, hogy

$$G(x) = \begin{cases} F(x) - F(\frac{1}{x}), & x \geq 1, \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

is eloszlásfüggvény!

7. Egységnyi hosszúságú szakaszon egymástól függetlenül két pontot választunk találomra. Legyen a valószínűségi változó a két pont közötti távolság. Írjuk fel az eloszlásfüggvényt és sűrűségfüggvényt! Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a két pont távolsága legalább 3/4!

8. Egységnyi hosszúságú szakaszt találomra választott pontjával két részre osztva, mi a keletkezett szakaszok közül a kisebbik hosszának az eloszlásfüggvénye?

9. Az alábbi függvények közül melyek sűrűségfüggvények?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{máshol;} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \geq 1, \\ 0, & \text{máshol;} \end{cases}$

c) $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R;$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{máshol;} \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 4x^3e^{-x^4}, & x > 0, \\ 0, & \text{máshol;} \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} 2e^{-x}(1-e^{-x}), & x > 0, \\ 0, & \text{máshol;} \end{cases}$

g) $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in R;$

h) $f(x) = \begin{cases} \log \frac{1}{x}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{máshol;} \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x} + \frac{1-e^{-x}}{x^2}, & x > 0, \\ 0, & \text{máshol;} \end{cases}$

j) $f(x) = \frac{\lambda^n}{2(n-1)!}|x|^{n-1}e^{-\lambda|x|}, \quad x \in R, \quad \lambda > 0.$

10. Az A, a, b állandók milyen értékei esetén sűrűségfüggvény az

$$f(x) = \frac{A}{1+a(x-b)^2}, \quad x \in R?$$

11. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ \frac{a}{x^3}, & x > 2. \end{cases}$$

Határozzuk meg az a együttható értékét! Számítsuk ki, milyen x értéknél adódik $P(\xi \ge x) = 1/2$!

12. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ \frac{A}{(1-x)^2}, & x \ge 2. \end{cases}$$

Mekkora az A érték? Mekkora valószínűséggel esik ξ a $(2,3)$ intervallumba?

13. Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} A\cos\frac{x}{2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

a) Mekkora az A érték?

b) Írjuk fel az eloszlásfüggvényt!

c) $P(\xi > \frac{\pi}{2})$?

14.* Válasszunk az egységnégyzetben véletlenszerűen egy pontot. Jelölje ξ a pontnak a négyzet legközelebbi csúcsától való távolságát. Határozzuk meg ξ sűrűségfüggvényét!

15. Az x tengely $(0,1)$ intervallumán véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot. Jelölje ξ a pont távolságát a koordinátarendszer $(0,1)$ pontjától. Határozzuk meg sűrűségfüggvényét!

16. Az $F(x)$ eloszlásfüggvényt 0-ra szimmetrikusnak nevezzük, ha sűrűségfüggvényére

$$f(x) = f(-x).$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$F(x) + F(-x) = 1!$$

17. Legyen ξ-nek az $F(x)$ eloszlásfüggvénye folytonos és szigorúan növekvő . Határozzuk meg az $\eta = F(\xi)$ valószínűségi változó eloszlását!

18.* Egy telefonfülke előtt állunk, és várjuk, hogy az előttünk beszélő befejezze a beszélgetést. Az illető véletlentől függő ideig beszél, beszélgetési időtartamának sűrűségfüggvénye (az időt percben mérve)

$$\frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}, \quad x > 0.$$

a) Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a beszélgetés 3 percnél tovább tart!

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a beszélgetés további 3 percnél tovább tart, feltéve, hogy 3 percnél tovább tartott?

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a beszélgetés $t+3$ percnél tovább tart, feltéve, hogy t percnél tovább tartott?

19.* Tegyük fel, hogy a ξ valószínűségi változó "örökifjú", azaz tetszőleges $t, s > 0$ esetén

$$P(\xi > t + s | \xi > t) = P(\xi > s).$$

Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét!

20. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(x)$ olyan sűrűségfüggvény, amely az egész pozitív valós tengelyen pozitív, akkor megadható olyan $h(x)$, az egész tengelyen pozitív és monoton növekedő függvény, hogy $h(x)f(x)$ is sűrűségfüggvény!

21. Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(0, 1)$ intervallumon. Határozzuk meg az $\eta = \xi^2$ eloszlását!

22. Legyen ξ egyenletes eloszlású a (-1,1) intervallumon. Határozzuk meg az $\eta = \xi^2$ eloszlását!

23. A $(0, 1)$ intervallumon találomra felveszünk egy pontot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy e ponttól az intervallum végpontjaiig mért távolságok négyzetösszege a távolságnégyzetösszeg minimumát α-nál nagyobb pontossággal megközelíti $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$?

24. Legyen ξ normális eloszlású m és $\sigma > 0$ paraméterekkel. Mutassuk meg, hogy az

$$\eta = a\xi + b, \quad a \neq 0$$

szintén normális eloszlású!

25. Csapágygolyók átmérője normális eloszlású valószínűségi változó m és $\sigma > 0$ paraméterekkel. Írjuk fel a golyók felszínének eloszlását jellemző sűrűségfüggvényt!

26. Legyen ξ sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

a) Írjuk fel az $\eta = \sqrt{\xi}$ sűrűségfüggvényét!

b) Állapítsuk meg, mekkora valószínűséggel vesz fel az η 1-nél kisebb értéket!

27. Legyen ξ folytonos eloszlású valószínűségi változó és jelölje $F(x)$ az eloszlásfüggvényét. Határozzuk meg a $-\ln F(x)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!
28. Mi a feltétele annak, hogy a ξ és $\frac{1}{\xi}$ egyforma eloszlásúak legyenek?
29. Legyen ξ λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $2\xi + 3$ sűrűségfüggvényét!
30. Legyen ξ λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg ξ^3 sűrűségfüggvényét!
31. Legyen ξ λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $\sqrt{\xi}$ sűrűségfüggvényét!
32. Bizonyítsuk be, hogy ha ξ egyenletes eloszlású a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$-n, akkor $\eta = \mathrm{tg}\xi$ $(1, 0)$ paraméterű Cauchy-eloszlású!

$$\left(f_\eta(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2} \right)$$

33. Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó m és $\sigma > 0$ paraméterekkel. Határozzuk meg az $\eta = e^\xi$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

4.2. A várható érték és a szórás

1. A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei: $-1, 0, 1, 2$. Az ezekhez tartozó valószínűségek rendre $1/12, 5/12, 1/4, 1/4$. Számítsuk ki a várható értéket és a szórást!
2. Egy kockával addig dobunk, amíg hatost nem kapunk. Mennyi lesz az addigi dobásszám várható értéke, ha az utolsó dobást is beleszámítjuk?
3. Két kockával dobunk addig, amíg valamelyiken hatot nem dobunk. Mekkora lesz a dobások várható száma, ha az utolsó dobást is beleszámítjuk?

4. Egy kockával háromszor dobunk egymás után. Jelentse ξ a hatos dobások számát. Határozzuk meg $M(\xi)$-t és $D(\xi)$-t!
5. Legyen ξ olyan valószínűségi változó, amelynek lehetséges értékei: $(-1)^k 2^k/k$, $k = 1, 2, \ldots$. A hozzájuk tartozó valószínűségek rendre: $p_k = 1/2^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Mutassuk meg, hogy $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ valószínűségeloszlás, és nem létezik a várható érték!
6. A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek: $0, 1, 2, \ldots$, és a hozzájuk tartozó valószínűségek $p_0, p_1, \ldots$. Bizonyítsuk be, hogy ha $M(\xi) < \infty$, akkor
$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\xi \geq k).$$
7. Egy érmével dobunk. Ha az eredmény fej, akkor még kétszer dobunk, ha írás, még egyszer. Mennyi az összes fej-dobások számának várható értéke?
8. Két kockával dobva mennyi lesz a dobott számok maximumának, ill. minimumának várható értéke?
9. Határozzuk meg a lottótalálatok számának várható értékét egy találomra kitöltött szelvényen!
10. Érmével dobunk addig, amíg először fordul elő, hogy két egymás utáni dobás azonos. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?
11. Ketten céllövésben versenyeznek, a két versenyző p_1, ill. p_2 valószínűséggel ér el találatot ($p_1 < p_2$). Az ügyetlenebb kezd, majd felváltva lőnek. Aki először talál, nyer. Mennyi a valószínűsége, hogy az ügyesebb nyer? Mennyi a játék várható időtartama, ha percenként egy lövést adnak le?
12. Legyen ξ λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg az $1/(1+\xi)$ várható értékét!
13. Határozzuk meg a lottón kihúzott számok összegének várható értékét!
14. Egy urnában n cédula van 1-től n-ig számozva; kihúzunk m darabot közülük visszatevéssel. Mennyi a kihúzott számok összegének várható értéke?

15. Milyen A értékre lehet az

$$f(x) = \frac{A}{1+x^2}, \quad x \in R$$

függvény sűrűségfüggvény? Mutassuk meg, hogy az e sűrűségfüggvénnyel jellemzett valószínűségi változónak nem létezik várható értéke!

16. Egy folytonos eloszlású valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{3}{x^4}, & x > 1. \end{cases}$$

Számítsuk ki a várható értéket és szórásnégyzetet!

17. Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{2}{x^3}, & x > 1 \end{cases}$$

sűrűségfüggvényű valószínűségi változónak létezik várható értéke, de szórása nem!

18. Két pontot válasszunk találomra egy egységnyi hosszúságú szakaszon. Határozzuk meg a két pont távolságának várható értékét és szórásnégyzetét!

19. Bizonyítsuk be, hogy ha az $f(x)$ sűrűségfüggvény görbéje az $x = a$ egyenesre szimmetrikus, és $M(\xi)$ létezik, akkor $M(\xi) = a$!

20. A gázmolekulák sebességét tekintsük olyan valószínűségi változónak, amelynek sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-h^2x^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Számítsuk ki a várható értéket!

21. Számítsuk ki az

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in R$$

sűrűségfüggvényű valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét!

22. Számítsuk ki a következő sűrűségfüggvénnyel jellemzett eloszlások várható értékét és szórását!

a) $f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 \le x \le 1, \\ 0, & \text{máskor}; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

23. Legyen a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Határozzuk meg $M(\xi)$-t és $D^2(\xi)$-t !

24. Legyenek ξ és η független valószínűségi változók. Tegyük fel , hogy létezik $M(\xi)$, $M(\eta)$, $D(\xi)$, $D(\eta)$. Határozzuk meg $D^2(\xi\eta)$-t!

25. Számítsuk ki az (a, b) intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó n-edik momentumát!

26.* Legyen a ξ normális eloszlású $0, 1$ paraméterekkel. Számítsuk ki a ξ $2k$-adik és $(2k+1)$-edrendű momentumait!

27. Mutassuk meg, hogy tetszőleges valós c szám esetén

$$M(\xi - c)^2 \ge M\left[(\xi - M(\xi))^2\right],$$

és az egyenlőség csak a $c = M(\xi)$ esetén áll fenn, ha a feladatban szereplő várható értékek léteznek!

28.* Legyen ξ egyenletes eloszlású a $(-1, \sqrt{3})$ intervallumon, és legyen $\eta = \text{arctg}\xi$. Határozzuk meg $M(\eta)$-t !

29.* Ha

$$M(\xi^4) + M(\xi^2) = 2M(\xi^3),$$

bebizonyítandó, hogy ξ csak 0 és 1 értékeket vehet fel !

30. Legyen ξ nemnegatív valószínűségi változó, és tegyük fel, hogy $M(\xi)$ és $M(\frac{1}{\xi})$ létezik. Bizonyítsuk be, hogy

$$M(\frac{1}{\xi}) \geq \frac{1}{M(\xi)}!$$

31. Bizonyítsuk be, hogy ha $\xi_1, \dots, \xi_k$ nemnegatív, egész értékű, független valószínűségi változók és $M(\xi_1) < \infty$, akkor

$$M(\min(\xi_1, \dots, \xi_k)) = \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{k} P(\xi_j \geq i) \quad !$$

32.* Legyen ξ nemnegatív egész értékű valószínűségi változó,

$$W_k = P(\xi \geq k), \quad k = 1, 2, \dots .$$

Kiszámítandó az $S = \sum_{k=1}^{\infty} kW_k$ összeg, ha adottak $M(\xi)$ és $D(\xi)$!

4.3. A Csebisev-egyenlőtlenség és a nagy számok törvénye

1. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye csak a $(0, 6)$ intervallumon különbözik 0-tól, és $M(\xi) = 1$. Igazoljuk, hogy

$$P(\xi < 5) \geq \frac{4}{5}!$$

2. Egy forgalmas pályaudvaron meghatározott időben egy ujságárus 1 óra alatt eladott ujságainak száma Poisson-eloszlású $\lambda = 64$ várható értékkel. Adjunk alsó becslést a

$$P(48 < \xi < 80)$$

valószínűségre, ha ξ az eladott olvasnivalók számát jelöli!

3. Egy ξ valószínűségi változóra $M(\xi) = 50$, $D(\xi) = 20$. Számítsuk ki, hogy legfeljebb mekkora valószínűséggel tér el ξ $M(\xi)$-től abszolút értékben legalább 60 egységgel! Mekkora ennek a valószínűségnek a pontos értéke, ha ξ normális eloszlású?
4. Egy ξ pozitív valószínűségi változóra

$$M(\xi) = 10, \qquad D(\xi) = 10.$$

Számítsuk ki, hogy legfeljebb mekkora valószínűséggel veszi fel ξ az 55 értéket! Mekkora a valószínűség pontos értéke, ha ξ exponenciális eloszlású?
5. Egy textilgyárban előállított vég szövet hosszának várható értéke 35 m, szórása 0.3 m . Legfeljebb mennyi annak a valószínűsége, hogy a vég hossza legalább 1 m-rel eltér a várható értéktől?
6. Egy forgalmas útkereszteződésben egy óra alatt áthaladó gépkocsik száma legyen ξ. Tegyük fel, hogy $M(\xi) = 500$, $D(\xi) = 25$. Legalább mekkora valószínűséggel esik 400 és 600 közé az egy óra alatt áthaladó gépkocsik száma?
7. Adjunk alsó ill. felső becslést a

$$P(|\xi - M(\xi)| > 3D(\xi)) \quad \text{ill.} \quad P(|\xi - M(\xi)| < 3D(\xi))$$

valószínűségekre! Számítsuk ki a $P(|\xi - M(\xi)| < 3D)$, ha ξ
   a) normális eloszlású,
   b) exponenciális eloszlású,
   c) egyenletes eloszlású a $[-1, 1]$-n,
   d) Poisson-eloszlású, $M(\xi) = 0.09$!
8. Hányszor kell egy szabályos érmét feldobnunk, hogy a fejek számának relatív gyakorisága legalább 0.9 valószínűséggel 0.1-nél kevesebbel térjen el a valószínűségtől?
9. Hányszor kell egy szabályos kockát feldobnunk, hogy a 6-os dobás valószínűségét az esemény relatív gyakorisága legalább 0.8 valószínűséggel 0.1-nél kisebb hibával megközelítse?

10. A gyártmányok 10%-a hibás. A minőségi ellenőrzés csak akkor találja elfogadhatónak a tételt, ha ebben legfeljebb 12% hibás . Mekkora legyen a tételben a gyártmányok darabszáma, hogy a hibás áruk relatív gyakorisága a megfelelő valószínűségtől legalább 0.95 valószínűséggel ne térjen el 0.02-nél nagyobb értékkel?
11. Bizonyítsuk be, hogy ha ξ_n , n és p paraméterű binomiális eloszlású, akkor
$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{1}{4\varepsilon^2 n}!$$
12.* Ha n független kísérletet végzünk egy A esemény megfigyelésére, és e kísérletek során ξ_n az A bekövetkezéseinek számát jelenti, továbbá ε olyan kicsiny pozitív szám, amelyre $0<\varepsilon<pq$, ahol $p=P(A)>0$, és $q=1-p$, akkor fennáll a
$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2pq\left(1+\frac{\varepsilon}{2pq}\right)^2}}$$
egyenlőtlenség.
13. Egy célpontra 200 lövést adnak le. A találat valószínűsége minden lövésnél 0.4. Milyen határok közé fog esni 90% valószínűséggel a találatok száma?
14. Egy csavargyártó automata esetén kivánjuk meghatározni a selejtarányt. E célból megvizsgáltunk 5000 csavart. Összesen 80 selejtet találtunk. Határozzuk meg, hogy az ebből számított 80/5000 relatív gyakoriság az ismeretlen p valószínűséget 90% biztonsággal mennyire közelíti meg!
15. Valamely társadalni rétegben meg akarjuk határozni a szeszfogyasztók arányát. Hány megfigyelést kell elvégezni ahhoz, hogy a megfigyelésből adódó arány a valódi aránytól 95% valószínűséggel legfeljebb 1%-kal térjen el?

16. Legyen a $g(x)$, $x \geq 0$, függvény nemnegatív és monoton növekvő. Mutassuk meg, hogy tetszőleges valószínűségi változóra igaz, hogy

$$P(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{M(g(|\xi|))}{g(\varepsilon)},$$

feltéve, hogy $M(g(|\xi|)) < \infty$!

5. TÖBBDIMENZIÓS VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK

5.1. Többdimenziós valószínűségeloszlás. Eloszlás- és sűrűségfüggvény

1. Végezzünk két kockával dobásokat. A ξ jelentse az egyik kockán dobott számot, η jelentse a másikon dobottat. Írjuk fel a (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását!
2. Egy dobozban n piros, n fehér, n zöld és n kék golyó van. Jelentse ξ a mintában levő piros, η a fehér, és ζ a zöld golyók számát, ha visszatevés nélkül kiveszünk n golyót.
   a) Írjuk fel a (ξ, η, ζ) háromdimenziós valószínűségi változó eloszlását!
   b) Számítsuk ki a ξ peremeloszlását és a (ξ, η) kétdimenziós eloszlást!
3 . Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású a $(-a \le x \le a, -b \le y \le b)$ egyenlőtlenséggel jellemzett téglalapon.
   a) Írjuk fel (ξ, η) eloszlásfüggvényét!
   b) Számítsuk ki a következő valószínűségeket:

$$P(\xi < 0, \eta < 0), \qquad P(\xi < 0, \eta \ge \tfrac{b}{2}),$$
$$P(0 \le \xi < \tfrac{a}{2}, 0 \le \eta < \tfrac{b}{2}), \quad P(\xi > \tfrac{a}{2})!$$

4. A (ξ, η) eloszlásfüggvénye a következő:

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 + e^{-x-y} - e^{-x} - e^{-y}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a ξ és η peremeloszlásokat! Számítsuk ki a $P(\xi < 1, \eta < 1)$-t!

5. Mutassuk meg, hogy az

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & y \leq -x, \\ 1, & y > -x \end{cases}$$

függvény nem lehet eloszlásfüggvény!

6. Számítsuk ki a $P(\xi < 1, \eta < 1)$ és $P(\xi < 1, \eta \geq \frac{3}{2})$ valószínűségeket, ha (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye

a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{különben}, \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{különben!} \end{cases}$

7. Állapítsuk meg, lehet-e sűrűségfüggvény az

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2-2xy+2y^2}{2}}$$

függvény!

8. Határozzuk meg, az A milyen értéke mellett lehet az

$$f(x,y) = x^2 + Ay^2$$

függvény a $(0 < x < 1, 0 < y < 2)$ tartományban egy (ξ, η) kétdimenziós eloszlás sűrűségfüggvénye! Írjuk fel a ξ és η peremsűrűségét is!

9. Határozzuk meg az

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} e^{-\frac{x^2-2xy+3y^2}{4}}$$

sűrűségfüggvénnyel jellemzett (ξ, η) peremsűrűségfüggvényeit!

10. A (ξ, η) kétdimenziós eloszlást normális eloszlásúnak nevezzük, ha az együttes sűrűségfüggvény:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$
$$\exp\left[\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\rho + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right)\right].$$

Mutassuk meg, hogy a peremeloszlások is normálisak, (m_1, σ_1) ill. (m_2, σ_2) paraméterekkel!

11.* A (ξ, η, ζ) háromdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2-2y+2z+2)}$$

Számítsuk ki a ξ, η, ζ peremsűrűségfüggvényeit! Számítsuk ki a (ξ, η) együttes peremsűrűségfüggvényt is!

5.2. Feltételes eloszlások. Valószínűségi változók függetlensége

1. A (ξ, η) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlása:

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	p	p
1	p	$3p$
2	$2p$	$4p$

Számítsuk ki az

a) $P(\xi = i | \eta = 0)$, $i = 0, 1, 2$;

b) $P(\xi < 2 | \eta = 0)$,

c) $P(\xi \geq 1 | \eta = 1)$,

d) $P(\eta = 1|\xi \geq 1)$ valószínűségeket!

2. Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású az $x^2 + y^2 \leq 1$ körön.
   a) Írjuk fel (ξ, η) sűrűségfüggvényét!
   b) Számítsuk ki ξ és η peremsűrűségfüggvényét!
   c) Írjuk fel az $f(x|y)$ és $f(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvényt, majd szármítsuk ki az $F(x|\eta = 0)$ feltételes eloszlásfüggvényt is!
3. Határozzuk meg az $f(x|y)$ és $f(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvényeket, ha (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye
   a) $f(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)}$;
   b) $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - xy + 2y^2)}$!
4. A (ξ, η) kétdimenziós eloszlást jellemezze az

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1 + xy(x^2 - y^2)), & |x| \leq 1, |y| \leq 1, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

sűrűségfüggvény. Állapítsuk meg, független-e a ξ és η vagy nem! Írjuk fel az $f(x|y)$ és $f(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvényeket! Végül számítsuk ki az

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)dx \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(y|x)dy$$

integrálokat!

5. A (ξ, η) sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \ 0 < y < 2(1 - x), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

   a) Állapítsuk meg, függetlenek-e ξ és η!
   b) Írjuk fel az $f(x|y)$ és $f(y|x)$ sűrűségfüggvényeket!
   c) Számítsuk ki a $P\left(0 < \xi < \frac{1}{2}|\eta = \frac{1}{2}\right)$ valószínűséget!

6. Legyen a (ξ, η) normális eloszlású
$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}$$
sűrűségfüggvénnyel. Legyenek ϱ és ν $(0 < \nu < 2\pi)$ a (ξ, η) pont polárkoordinátái. Határozzuk meg ν feltételes eloszlását a $\varrho = r$ feltétel esetén!

7.* Legyenek a ξ és η valószínűségi változók függetlenek, ξ legyen λ paraméterű exponenciális eloszlású, és η legyen a $(0, 2\pi)$ intervallumon egyenletes eloszlású. Vezessük be a $\zeta_1 = \sqrt{\xi}\cos\eta$, $\zeta_2 = \sqrt{\xi}\sin\eta$ jelöléseket. Bizonyítsuk be, hogy ζ_1, ζ_2 függetlenek és közös sűrűségfüggvényük
$$\sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\lambda x^2}!$$

5.3. Valószínűségi változók függvényeinek eloszlása

1. Legyen a (ξ, η) sűrűségfüggvénye:
$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$
Számítsuk ki a $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét!

2. Legyen (ξ, η) sűrűségfüggvénye
$$f(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} e^{-\frac{x^2-2xy+3y^2}{4}}$$
Vezessük be a $\zeta = \eta - \xi, \tau = \eta$ transzformációt!

a) Írjuk fel a ζ és τ együttes sűrűségfüggvényét!

b) Állapítsuk meg, függetlenek-e a ζ és τ változók!

3. Legyen ξ és η mindegyike normális eloszlású $m = 0$, $\sigma = 1$ paraméterekkel. Tegyük fel, hogy ξ és η függetlenek. Írjuk fel a

$$\zeta = a\xi + b\eta + c \quad \text{és} \quad \tau = \eta$$

valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét, és számítsuk ki a ζ sűrűségfüggvényét!

4 . Legyen (ξ, η) egyenletes eloszlású a $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ tartományon. Legyenek

$$\zeta = \xi + \eta, \quad \tau = \xi - \eta.$$

a) Írjuk fel a ζ és τ együttes sűrűségfüggvényét!

b) Számítsuk ki a $P(\zeta < 2, \tau \geq 0)$-t !

c) Számítsuk ki τ sűrűségfüggvényét!

5.* A (ξ, η) kétdimenziós normális eloszlású

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{2}}$$

sűrűségfüggvénnyel. Igazoljuk, hogy ξ és η nem függetlenek! Számítsuk ki a $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét!

6.* Ágyúval egy célpontra tüzelnek, amelyről feltesszük, hogy egy derékszögű koordinátarendszer középpontja. A golyó a (ξ, η) koordinátájú pontra csapódik. ξ és η függetlenek és normális eloszlásúak $m = 0$, $\sigma = 1$ paraméterekkel. Számítsuk ki, milyen eloszlású a lövedék becsapódási helyének a célponttól való távolsága!

7.* Igazoljuk, hogy ha ξ és η független normális eloszlású valószínűségi változók $0, 1$ paraméterrel, akkor $\zeta = \xi + \eta$ és $\tau = \xi - \eta$ függetlenek és normális eloszlásúak!

8.* Legyenek ξ_1 és ξ_2 független, $(1, 0)$ paraméterű Cauchy-eloszlású valószínűségi változók, és legyen

$$\eta = \frac{\xi_1 + \xi_2}{1 - \xi_1 \xi_2}.$$

Bizonyítsuk be, hogy η is Cauchy-eloszlású!

9. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független és a $(0,1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók, és jelölje $f_n(x)$ az

$$\eta = \xi_1 + \dots + \xi_n$$

összeg sűrűségfüggvényét. Bizonyítsuk be, hogy

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\left(x^{n-1} - \binom{n}{1}(x-1)^{n-1} + \binom{n}{2}(x-2)^{n-1} + \dots\right)$$

ahol a zárójelen belül az összeg addig halad, amíg $x, x-1, x-2, \dots$ pozitív számok!

10. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, azonos normális eloszlású valószínűségi változók m és σ paraméterekkel. Legyen

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i.$$

Határozzuk meg a ξ_i-k együttes feltételes eloszlását az η_n adott értéke esetén!

11. Legyen a (ξ, η) pont egyenletes eloszlású az egységkörön. Vezessük be a $\phi = \text{arctg}\frac{\eta}{\xi}, \zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ jelöléseket. Bizonyítsuk be, hogy ϕ és ζ függetlenek!

5.4. A várható értékre és szórásra vonatkozó feladatok. Korrelációs együttható.

1. Legyen ξ és η együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Számítsuk ki a $\xi + \eta$ és $\xi\eta$ várható értékét!

2. Legyen (ξ, η) normális eloszlású

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2-2xy+2y^2}{2}}$$

sűrűségfüggvénnyel. Számítsuk ki $M(\xi\eta)$-t!

3. Jelentse $R(\xi, \eta)$ a ξ és η korrelációs együtthatóját. Igazoljuk, hogy

$$D^2(\xi+\eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) + 2D(\xi)D(\eta)R(\xi,\eta)!$$

4. Számítsuk ki az

$$\eta_1 = 1 - \xi_1 \quad \text{és} \quad \eta_2 = 1 - \xi_2$$

korrelációs együtthatóját, ha $R(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}$!

5. Mutassuk meg, hogy ha

$$\eta_1 = a\xi_1 + b \quad \text{és} \quad \eta_2 = c\xi_2 + d$$

akkor $R(\eta_1, \eta_2) = \pm R(\xi_1, \xi_2)$!

6. A ξ és η együttes eloszlását a következő táblázatban adjuk meg:

$\xi \backslash \eta$	1	0
1	0.5	0.04
0	0.06	0.4

Számítsuk ki $R(\xi, \eta)$-t !

7. Adott az A és B esemény. Ismeretes, hogy $P(A) = 1/4$, $P(B|A) = 1/2$, és $P(A|B) = 1/4$. Legyen $\xi = 1$, ha A bekövetkezik, és $\xi = 0$, ha nem következik be. Hasonlóan legyen $\eta = 1$, ha B bekövetkezik és $\eta = 0$, ha B nem következik be. Számítsuk ki $R(\xi, \eta)$-t! Független-e az η és ξ?

8. A (ξ, η) együttes eloszlását a következő táblázat tartalmazza:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	p	$3p$	$6p$
1	$5p$	$15p$	$30p$

a) Mekkora a p érték? Független-e ξ és η?
b) Számítsuk ki a $\xi + \eta$ szórását!
c) Mekkora az $\eta \geq 0$ valószínűség?

9. Egy dobozban 4 jó, 3 hibás és 3 selejtes termék van. Egymás után, visszatevés nélkül kiveszünk két terméket. Jellemezze ξ az első húzás eredményét, mégpedig $\xi = 0$, ha selejtest húzunk, $\xi = 1$, ha hibásat, $\xi = 2$, ha jót. Jellemezze η a második húzás eredményét ugyanúgy.
a) Független-e ξ és η?
b) Mekkora ξ szórása?

10. A (ξ, η) eloszlását a következő táblázat mutatja:

$\xi \backslash \eta$	2	0	-1
1	p_1	p_2	p_1
0	p_2	p_1	p_2
-2	p_1	p_2	p_1

Tudjuk, hogy $R(\xi, \eta) = 0$. Függetlenek-e?

11. A (ξ, η) lehetséges értékeit a $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$, $(4,0)$ pontok által meghatározott négyzet belsejében lévő egész koordinátájú pontok alkotják. A (ξ, η) ezeket a pontokat egyenlő valószínűséggel veszi fel – a négyzet középpontja kivételével, amely négyszer akkora valószínűséggel következik be, mint a többi. Számítsuk ki az $R(\xi, \eta)$-t. Független-e ξ és η?

12. A (ξ, η) lehetséges értékei: $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$. A (ξ, η) ezeket az értékeket egyenlő valószínűséggel veszi fel.
a) Vizsgáljuk meg, független-e ξ és η?
b) Számítsuk ki $R(\xi, \eta)$-t!

13. Legyen (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x+y^2), & 0<x<1,\ 0<y<1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Számítsuk ki $R(\xi, \eta)$-t!

14. Legyen (ξ, η) együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)}.$$

Számítsuk ki $R(\xi, \eta)$-t!

15. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left[\left(\sqrt{2}e^{-\frac{x^2}{2}} - e^{-x^2}\right)e^{-y^2} + \left(\sqrt{2}e^{-\frac{y^2}{2}} - e^{-y^2}\right)e^{-x^2}\right]$$

akkor $f_\xi(x) = f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $R(\xi, \eta) = 0$, de ξ és η nem függetlenek!

16. Számítsuk ki $R(\xi, \eta)$-t, ha

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} e^{-\frac{x^2-2xy+3y^2}{4}}!$$

17. Legyenek ξ és η független λ, ill. μ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változók. Legyen $\zeta = \xi + \eta$. Határozzuk meg $R(\xi, \zeta)$-t!

18.* A (ξ, η) 2-dimenziós normális eloszlású, ha az együttes sűrűségfüggvény:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[\left(\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}\rho + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\right)\right].$$

a) Bizonyítsuk be, hogy $\xi \in \mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $\eta \in \mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, és $R(\xi, \eta) = \rho$!

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $R(\xi, \eta) = 0$, akkor ξ és η függetlenek!

19.* Legyenek ξ és $\eta \in \mathcal{N}(0, 1)$ és (ξ, η) is normális, $\rho = R(\xi, \eta)$. Határozzuk meg a $P(\xi \geq 0, \eta \geq 0)$ valószínűséget!

20.* Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_n$ azonos eloszlású valószínűségi változók, és tegyük fel, hogy

$$R(\xi_i, \xi_j) = \rho \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Mutassuk meg, hogy $\rho \geq 0$!

21.* Legyen a (ξ, η) pont egyenletes eloszlású a $D \subset \mathcal{R}^2$ halmazon. Számítsuk ki $R(\xi, \eta)$-t, ha

a) $D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$,

b) $D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$!

6. A LEGFONTOSABB VALÓSZÍNŰSÉGELOSZLÁSOK

6.1. Binomiális eloszlás

1. Annak valószínűsége, hogy egy üzemben a nyersanyagellátás valamely napon zavartalan, 0.75.
   a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy héten (6 napon) keresztül csak három napon át lesz az ellátás zavartalan?
   b) Mennyi lesz az egy heti zavartalan ellátású napok számának várható értéke?
2. 100 darab alkatrész közül 2 darab selejtes. Egymás után ötször veszünk ki 5 elemű mintát, véletlenszerűen visszatevéssel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind az ötször jó alkatrészt húzunk?
3. Egy alkatrészhalmazból 6 elemű mintát vettünk visszatevéssel. Annak valószínűsége, hogy a minta 3 db selejtet tartalmaz 4/25. Mekkora a selejtarány?
4. Egy automata gépnél megfigyelték, hogy naponta átlagosan 12 db termék lesz selejtes, ezek számának szórása 3.41 .
   a) Hány terméket készít naponta a gép?
   b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy napon a selejtes termékek száma 10-nél kevesebb?
5. Hányszor dobjunk fel egy kockát, ha azt akarjuk, hogy 1/2-nél ne legyen kisebb annak a valószínűsége, hogy a hatos dobások száma legalább 2 legyen?
6. Egy forgalnas postahivatalban egy év alatt 1017 címzetlen levelet adtak fel. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy nap 2-nél több címzés nélküli levelet adtak fel?

7. Annak valószínűsége, hogy egy löveg célba talál, minden lövésnél 0.001. Mekkora a valószínűsége, hogy 2000 lövés közül legalább 2 lövés célba talál?

8.* Egy 1000 nézőt befogadó színháznak két bejárata van. Mindegyik bejárat mellett van egy ruhatár. Hány fogasnak kell lennie mindegyik ruhatárban ahhoz, hogy 100 néző közül átlagosan 99 abban a ruhatárban vetkőzhessen le, amelyik mellett bement?

   Vizsgáljuk neg a következő eseteket:

   a) a nézők párosan érkeznek,

   b) a nézők egyenként érkeznek. Tegyük fel, hogy a nézők azonos valószínűséggel választanak a két bejárat közül.

9.* Egy településen 2500 lakos él. Mindegyik lakos körülbelül 6-szor utazik havonta vonattal a városba. Az utazás napját véletlenszerűen és egymástól függetlenül választják meg. Mennyi legyen a vonaton férőhelyek legkisebb száma, hogy a vonat 100 nap közül legfeljebb egyszer legyen túlzsúfolt (a vonat naponta egyszer közlekedik)?

6.2. Poisson-eloszlás

1. Egy augusztusi éjszakán átlag 10 percenként észlelhető csillaghullás. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy negyedóra alatt két csillaghullást látunk?
2. Egy konzervgyár valamelyik üveggyártól 1 literes üvegeket rendel. 200 db üveg közül átlagosan 3 üveg selejtes. Mekkora annak a valószínűsége, hogy 1000 üveget átnézve, abban pontosan 10 selejtes üveget találunk?
3. Kalácssütéskor 1 kg tésztába 30 szem mazsolát tesznek. Mennyi a valószínűsége, hogy egy 5 dkg-os szeletben 2-nél több mazsola lesz?
4. Egy 500 oldalas könyvben 200 sajtóhiba található. Mekkora a valószínűsége, hogy 10 véletlenszerűen kiválasztott lapon nem lesz sajtóhiba?

5. Egy ruhaszövet anyagában 100 m-enként átlag 5 hiba van. Egy 300 méteres szövetet 3 méteres darabokra vágnak. Előreláthatólag hány hibátlan darab lesz ezek között?
6. Egy elektronikus műszer 1000 alkatrészből áll. Egy alkatrész a többitől függetlenül 0.001 valószínűséggel romlik el egy éve alatt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy év alatt legalább 2 alkatrész elromlik?
7. Egy telefonközponthoz 600 előfizető tartozik. Tegyük fel, hogy 0.005 a valószínűsége annak, hogy valamelyik előfizető egy meghatározott órában kapcsolást kér. Mennyi a valószínűsége annak, hogy abban az órában éppen 4 előfizető kér vonalat?
8. Televízió-készülékek gyártásakor 200 készülékre átlagosan 100 hiba jut. Az előző tapasztalatokból tudjuk, hogy a hibák Poisson-eloszlásúak. Legfeljebb hány legyártott készüléket választhatunk ki egyszerre úgy, hogy a kiválasztott készülékek legalább 0.1 valószínűséggel mind hibátlanok legyenek?
9. Egy áruházban adott Δt hosszúságú időtartam alatt megjelent látogatók száma Poisson-eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel. Ismeretes, hogy egy látogató p valószínűséggel vásárol valamit. Mennyi a valószínűsége annak, hogy adott Δt időintervallumban éppen k személy vásárol?
10. Bizonyítsuk be, hogy ha ξ λ paraméterű, η μ paraméterű egymástól független, Poisson-eloszlású valószínűségi változók, akkor $\xi + \eta$ $\lambda + \mu$ paraméterű Poisson-eloszlású! Általánosítunk a feladatot n db valószínűségi változó esetére!
11. Egy gyümölcsösben az egyes gyümölcsöket támadó férgek száma egymástól független, Poisson-eloszlású valószínűségi változó, gyümölcsönként $\lambda = 2$ várható értékkel. A gyümölcsöst rovarirtóval kezelik, és ez $p = 0.75$ valószínűséggel öli meg a férget. Ebből a gyümölcsből származó 10 gyümölcsöt vásárolunk.
    a) Mennyi a valószínűsége, hogy egy sem lesz férges?
    b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy összesen k férget találunk a 10 gyümölcsben?

c) Mennyi a 10 gyümölcsben levő férgek számának várható értéke és szórása?

d) Határozzuk meg a férges gyümölcsök számának valószínűségeloszlását, várható értékét és szórását!

12. Legyen ξ λ paraméterű Poisson-eloszlású.
Határozzuk meg $M\left(\frac{1}{1+\xi}\right)$-t!

13.* Legyen ξ_λ Poisson-eloszlású λ várható értékkel. Számítsuk ki a

$$\lim_{\lambda\to\infty} D^2(\sqrt{\xi_\lambda})\text{-t!}$$

14.* Egy telefonközpontban véletlen időpillanatokban érkeznek hívások. Tegyük fel, hogy a hívások közötti időintervallumok egymástól független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Jelölje $V(t)$ a $(0,t)$ intervallumban érkező hívások számát. Bizonyítsuk be, hogy

$$P(V(t)=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}!$$

15. Egy kiszolgáló helyhez λ paraméterű Poisson-eloszlás szerint érkeznek az igények. Egy irányító berendezés az igényeket egymástól függetlenül p_i valószínűséggel küldi az i-dik kiszolgálóegységhez,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Jelölje V_i az i-dik kiszolgálóegységhez érkező igények számát,

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Bizonyítsuk be, hogy a V_i valószínűségi változók egymástól függetlenek és

$$P(V_i = k) = \frac{(\lambda p_i)^k}{k!} e^{-\lambda p_i}, \quad i = 1, \ldots, n!$$

16.* Legyen ξ_1 λ_1 paraméterű Poisson-eloszlású, ξ_2 λ_2 paraméterű Poisson-eloszlású, $\lambda_2 > \lambda_1$. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges k természetes számra

$$P(\xi_1 \leq k) > P(\xi_2 \leq k)!$$

6.3. Egyenletes eloszlás

1. Mekkora valószínűséggel vesz fel egy, a $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó olyan értéket, amely a várható értékétől szórásánál nagyobb értékkel tér el?
2. A ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó, és $M(\xi) = D^2(\xi) = 4$. Írjuk fel a ξ eloszlásfüggvényét!
3. A ξ egyenletes eloszlású az $(a, 5)$ intervallumon. Ismeretes, hogy

$$P(\xi \geq M(\xi^2 - 2\xi + 1)) = \frac{1}{6}.$$

Mekkora a

$$P(\xi \geq M(\xi - 1))?$$

4. A ξ egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon. Az a, b értékeket nem ismerjük. Tudjuk viszont, hogy a $(2, 5)$ intervallum teljes egészében az (a, b) intervallumon fekszik, és

$$P(2 \leq \xi \leq 5) = \frac{1}{3}.$$

a) Mekkora a $P(3 \leq \xi \leq 5)$?
b) Mekkora lehet az a minimális és a b maximális értéke?

c) Az adott feltételek mellett milyen becslést adhatunk a $P(1 \leq \xi \leq 3)$ valószínűségre?

5. Legyen a ξ egyenletes eloszlású a $(0, 4\pi)$ intervallumon. Határozzuk meg az $\eta = \sin \xi$ sűrűségfüggvényét!
6. Legyenek ξ, η független, a $(-1/2, 1/2)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét!
7. Legyenek ξ, η független, a $(-1, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a $\xi - \eta$ sűrűségfüggvényét!
8. Legyenek ξ, η független, a $(-1, 1)$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a $\xi\eta$ sűrűségfüggvényét!
9. Koktélt akarunk keverni 2/3 rész Gin és 1/3 rész Martini arányban. A Gin és Martini adagolásával azonban egymástól független hibákat követünk el, mégpedig oly módon, hogy a hiba egyenletes eloszlású mind a Gin, mind a Martini saját mennyiségének 0 – 10%-ában. Mennyi a Gin arányának várható értéke?

10.* Az $A = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ pont egyenletes eloszlású az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömbön. Határozzuk meg az A pont (x, y) síkra, valamint az x tengelyre eső merőleges vetületének eloszlását!

6.4. Exponenciális eloszlás

1. Egy ξ valószínűségi változó jelenti annak az útnak a hosszát, amelyet egy gépkocsi az első műszaki hibáig megtesz. Tegyük fel, hogy ξ exponenciális eloszlású 500 km várható értékkel. Számítsuk ki, mennyi a valószínűsége annak, hogy ξ a várható értékénél kisebb értéket vesz fel!
2. Egy radioaktív anyag bomlását vizsgáljuk. Legyen a ξ értéke egy tetszőleges atom bomlásáig eltelt idő. Legyen az atomok élettartamának várható értéke 2 év. Határozzuk meg a felezési idejüket!

3. Mutassuk meg, hogy az exponenciális eloszlás rendelkezik az "örökifjú" tulajdonsággal, azaz

$$P(\xi < x+t|\xi \geq t) = P(\xi < x),$$

illetve

$$P(\xi \geq x+t|\xi \geq t) = P(\xi \geq x),$$

4. Legyenek a ξ_i-k egymástól független, λ_i paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, $i = 1, \ldots, n$. Mutassuk meg, hogy

$$P(\min(\xi_1, \ldots, \xi_n) < x) = 1 - e^{-(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)x}, \quad x > 0!$$

5. Egy szövőgép 400 szállal dolgozik. Az egyes szálak "élettartama", tehát az az idő, amíg az adott szál el nem szakad exponenciális eloszlású, minden szálra 150 óra várható értékkel. Feltételezve, hogy a szálak egymástól függetlenek, mennyi a valószínűsége annak, hogy a gép fonalszakadás miatt a megindulástól számított 3 órán belül megáll?
6. Annak valószínűsége, hogy egy benzinkútnál a tankolásra 6 percnél többet kell várakozni, a tapasztalat szerint 0.1. Feltételezve, hogy a várakozási idő exponenciális eloszlású, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen a benzinkúthoz érkező gépkocsi 3 percen belül sorra kerül?
7. Egy forgalmas trafikba a vevők Poisson-eloszlás szerint érkeznek, átlagosan 1 vevő percenként. Mennyi a valószínűsége annak, hogy valamelyik vevő távozása után 5 percig nem érkezik újabb vevő?
8. Legyen a ξ valószínűségi változó λ paraméterű exponenciális eloszlású. Határozzuk meg a következő valószínűségi változók sűrűségfüggvényét:
   a) $\sqrt{\xi}$;
   b) ξ^2 ;
   c) $\frac{1}{\lambda} \ln \xi$;

d) $\{\xi\}$ $(\{\ \}$ törtrész);

e) $1 - e^{-\lambda\xi}$!

9. A ξ és η valószínűségi változók függetlenek és exponenciális eloszlásúak 1 várható értékkel. Határozzuk meg a következő valószínűségi változók sűrűségfüggvényét:

a) $\xi + \eta$;

b) $\xi - \eta$;

c) $|\xi - \eta|$;

d) ξ/η!

10. Határozzuk meg a $\xi + \eta$ összeg sűrűségfüggvényét, ha ξ és η függetlenek, ξ egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon és η exponenciális eloszlású 1 várható értékkel!

11. Legyenek ξ és η független, λ paraméterű, exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg a $|\xi - \eta|$ sűrűségfüggvényét!

12.* Legyenek a ξ_i-k egymástól független, azonos λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, $i = 1, ..., n$. Mutassuk meg, hogy összegük sűrűségfüggvénye

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0! \end{cases}$$

13. Egy szervízállomáson az egyes gépek javítására fordított idő exponenciális eloszlású 1/2 óra várható értékkel. Mennyi a valószínűsége, hogy a negyediknek beérkezett javítandó gépre nem kell 2 óránál többet várakozni, ha a gépek javítását a beérkezés sorrendjében végzik?

14.* Egy kétfülkés telefonnál 3 ember akar telefonálni. Az első és a második ember elfoglalta az 1. és 2. számú fülkét, a harmadik pedig várakozott. Tegyük fel, hogy ξ_1, ξ_2, ξ_3 beszélgetési idők független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg:

a) annak valószínűségét, hogy a harmadik ember az 1. számú fülkéből telefonál;

b) a harmadik telefonáló várakozási idejének sűrűségfüggvényét;

c) annak valószínűségét, hogy a harmadik telefonáló hamarabb befejezi a beszélgetést, mint az első vagy a második!

15.* Legyenek ξ és η független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók ugyanazon várható értékkel. Mutassuk meg, hogy

$$P\left[\log\left(\frac{1+\frac{\max(\xi,\eta)}{\min(\xi,\eta)}}{2} < x\right)\right] = \begin{cases} 1-e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

16.* Legyenek a ξ_i-k egymástól független, λ_i paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Mutassuk meg, hogy összegük sűrűségfüggvénye:

$$f_n(x) = (-1)^{n-1}\lambda_1 \ldots \lambda_n \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_k x}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n}(\lambda_k - \lambda_j)}!$$

17.* Az előző feladat feltételei mellett mutassuk meg, hogy

$$P(\min(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \xi_i) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n}!$$

6.5. Normális eloszlás

1. Egy repülőgép pilótájával közlik a 100 m magasságú légifolyosó közepének földtől mért távolságát. A repülőgép repülési magasságának ettől való eltérése egy ξ valószínűségi változó, amely normális eloszlású, 20 m várható értékkel és 50 m szórással. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a repülőgép a légifolyosó alatt, a légifolyosóban, ill. a felett halad!

2. Valamely súlyméréskor a valódi és a mérleg által mutatott súly különbségét, vagyis a mérési hibát tekintjük valószínűségi változónak, amely normális eloszlású, várható értéke 0, szórása 60 gr. Legalább

hány mérést kell végezni ahhoz, hogy 0.9-nél nagyobb valószínűséggel legalább az egyik mérés hibájának abszolút értéke ne lépje túl a 7.5 gr-ot?

3. Legyen a ξ normális eloszlású $m = 3$ és $\sigma = 2$ paraméterekkel. Mekkora legyen az A szám, ha azt kívánjuk, hogy a ξ a $(2, A)$ intervallumba legalább 1/2 valószínűséggel essen?
4. Hogyan jellemezhetők azok a normális eloszlású ξ valószínűségi változók, melyekre 95% valószínűséggel teljesül az, hogy a ξ-nek a várható értéktől való eltérése 1-nél kisebb?
5. Egy fafeldolgozó telepen deszkákat készítenek. Ezek hossza normális eloszlású $m = 400$ cm és $\sigma = 3$ cm paraméterekkel.
   a) A deszkák hány százaléka lesz 398 cm-nél hosszabb és 401 cm-nél rövidebb?
   b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a deszkák hossza 400 cm-től legfeljebb 2.5 cm-rel tér el?
6. Egy löveg tüzel egy 1200 méter távoli célpontra. A lőtávolság ingadozása a 1200 m körül normális eloszlású 40 m szórással. Hatásosnak tekinthető egy lövés, ha a találat a célhoz 50 m-nél közelebb esik. A lövések hány százaléka lesz hatástalan?
7. Valamely gép 15 mm átmérőjű alkatrészeket gyárt 0.5 mm szórással. Normális eloszlásúnak tekintve a legyártott alkatrész átmérőjét, mekkora valószínűséggel gyárt a gép a névleges érték 5%-nál nagyobb eltérésű alkatrészt?
8. Valamely szolgáltató vállalathoz a naponta beérkező megrendelések száma normális eloszlású valószínűségi változó 10 szórással. Mekkora a megrendelések várható száma, ha tudjuk, hogy

$$P(\xi < 20) = 0.1?$$

9. Egy gyár rádiócsöveket gyárt. Egy bizonyos fajta adócső élettartama a vizsgálatok szerint normális eloszlású, 1170 óra várható értékkel és 100 óra szórással. A gyár a csövekre garanciát vállal. Hány órás

működésre szóljon a garancia, ha a gyár legfeljebb 5% garanciaigényt kíván kielégíteni?

10.* Egy automata gép zacskókba vegyszert adagol. A betöltött vegyszer súlya normális eloszlású valószínűségi változó 100 gr várható értékkel és 2 gr szórással. A gép a vegyszert egymástól függetlenül adagolja. Az egy nap alatt elkészített csomagok száma Poisson-eloszlású, $\lambda = 1000$ várható értékkel. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az egy nap alatt elkészített csomagok között legfeljebb 20 olyan csomag van, amelyben a betöltött mennyiség nem 95 és 105 gramm közé esik?

11. Egy urnában fehér és fekete golyók vannak. Annak valószínűsége, hogy fehér golyót húzunk, 0.7. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 1000 visszatevéssel húzott golyó között a fehér golyók száma 681 és 720 közé esik?

12. Legyen ξ az A esemény megfigyelésére végzett n független kísérlet esetén az A bekövetkezéseinek száma.
Mutassuk meg, hogy ha $P(A) = 0.5$, akkor a

$$0.5n - 0.98\sqrt{n} \leq \xi \leq 0.5n + 0.98\sqrt{n}$$

egyenlőtlenség 95% valószínűséggel teljesül!

13.* Ha ξ nornális eloszlású m és $\sigma > 0$ paraméterekkel, akkor az $\eta = e\xi$ valószínűségi változó "logaritmikusan normális" eloszlású

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y - m)^2}{2\sigma^2}}, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel.

a) Igazoljuk ezt az állítást!

b) Számítsuk ki $M(\eta)$-t és $D^2(\eta)$-t!

c) Mutassuk meg, hogy ebben az esetben fennáll az

$$M(e^{\xi}) > e^{M(\xi)}$$

egyenlőtlenség!

14. Igazoljuk, hogy ha ξ logaritmikusan normális eloszlású, akkor az

$$\eta = a\xi^n, \quad a > 0, \ n \geq 1$$

szintén logaritmikusan normális eloszlású!

15. Legyenek ξ_1 és ξ_2 független, $\mathcal{N}(0, \sigma_1)$, illetve $\mathcal{N}(0, \sigma_2)$ eloszlású valószínűségi változók. Határozzuk meg ξ_1/ξ_2 sűrűségfüggvényét!

16.* Legyen ξ $\mathcal{N}(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki a

$$M(\xi \cos \xi), \quad M(\xi/(1 + \xi^2)) \quad \text{és} \quad M(\sin \xi)$$

várható értékeket!

17.* Legyen ξ $\mathcal{N}(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változó. A $D^2(\sin \xi)$ vagy $D^2(\cos \xi)$ értéke lesz nagyobb?

18.* Egy folyó feletti híd téglalap alakú, koordinátái a Descartes-féle koordinátarendszerben eleget tesznek a következő feltételeknek:

$$|x| \leq 10, \quad |y| \leq 100.$$

Tüzérségi támadás esetén a lövedék becsapódásának (ξ, η) pontja, ugyanabban a koordinátarendszerben, kétdimenziós normális eloszlású, független koordinátákkal és $\sigma_\xi = 10$, $\sigma_\eta = 40$. Az $(M\xi, M\eta)$ pontot célpontnak nevezzük. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a lövedék a hídra esik, ha a célpont:

a) $(0, 0)$;
b) $(10, 0)$;
c) $(5, 20)$!