5. Összefoglaló táblázatok

5.1 Diszkrét valószínűségi változók

1. Táblázat. Nevezetes diszkrét valószínűségi változók[1]

valószínűségi változó	paraméterek	$p(\cdot)$
Bernoulli	$0 < p < 1$	$p(k) = p^k q^{1-k}$, $k = 0, 1$
binomiális	n $0 < p < 1$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$
polinomiális	n, r, p_i, k_i $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$ $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$	$p(\overline{k}) = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$, ahol $\overline{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_r)$

[1] $q = 1 - p$.

1. Táblázat. (folytatás)

valószínűségi változó	paraméterek	$p(\cdot)$
hipergeometriai	$N > 0$	$p(k) = \dfrac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$,
	$n, k \geq 0$	$k = 0, 1, \ldots, n$, ahol $k \leq r$ és $n - k \leq N - r$.
polihiper-geometriai	$\sum_{i=1}^{l} r_i = N$	$p(k_1, k_2, \ldots, k_l) = \dfrac{\binom{r_1}{k_1}\binom{r_2}{k_2}\cdots\binom{r_l}{k_l}}{\binom{N}{n}}$, $k_i \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad k_i \leq r_i \quad \forall i$ és $\sum_{i=1}^{l} k_i = n$.
geometriai	$0 < p < 1$	$p(k) = q^k p, \quad k = 0, 1, \ldots.$
Pascal (negatív binomiális)	$0 < p < 1$, r természetes szám	$p(k) = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k$, $k = 0, 1, \cdots$
Poisson	$\alpha > 0$	$p(k) = e^{-\alpha} \dfrac{\alpha^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \cdots$

2. Táblázat. Nevezetes diszkrét valószínűségi változók jellemzői[2]

valószínűségi változó	z-transzformált $g[z]$	$E[X]$	$D^2[X]$
Bernoulli	$q + pz$	p	pq
binomiális	$(q + pz)^n$	np	npq
polinomiális	$(p_1 z_1 + p_2 z_2 + \cdots + p_r z_r)^n$	$E[X_i] = np_i$	$\mathrm{Var}[X_i] = np_i q_i$
hipergeometriai	—	$\frac{nr}{N}$	$\frac{nr(N-r)(N-n)}{N^2(N-1)}$
polihiper-geometriai	—	—	—
geometriai	$\frac{p}{1 - qz}$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Pascal (negatív binomiális)	$p^r (1 - qz)^{-r}$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
Poisson	$e^{\alpha(z-1)}$	α	α

[2] $q_i = 1 - p_i$.

5.2 Folytonos valószínűségi változók

3. Táblázat. Nevezetes folytonos valószínűségi változók jellemzői

valószínűségi változó	paraméterek	sűrűségfüggvény
egyenletes	$a < b$	$\frac{1}{b-a}$, $a \le x \le b$, 0 különben
exponenciális	$\alpha > 0$	$f(x) = \alpha e^{-\alpha x}$, $x > 0$, 0 ha $x \le 0$
Gamma	$\beta, \alpha > 0$	$f(x) = \frac{\alpha(\alpha x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x}$, $x > 0$ 0, $x \le 0$
Erlang-k	$k > 0$ $\mu > 0$	$f(x) = \frac{\mu k(\mu k x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu k x}$, $x > 0$ 0, $x \le 0$
H_k[3]	$q_i, \mu_i > 0$ $\sum_{i=1}^{k} \frac{q_i}{\mu_i} = \frac{1}{\mu}$	$f(x) = \sum_{i=1}^{k} q_i \mu_i e^{-\mu_i x}$, $x > 0$ 0, $x \le 0$
χ^2	$n > 0$	$f(x) = \frac{x^{((n/2)-1)} e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}$, $x > 0$, 0 ha $x \le 0$
normális	$\sigma > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$
Student	n	$f(x) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$
F	n, m	$f(x) = \frac{(n/m)^{n/2}\Gamma[(n+m)/2] x^{((n/2)-1)}}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)(1+(n/m)x)^{(n+m)/2}}$, $x > 0$

[3] k fázisú hiper-exponenciális

4. Táblázat. Nevezetes folytonos valószínűségi változók jellemzői

valószínűségi változó	$E[X]$	$D^2[X]$	Laplace–Stieltjes transzformált $X^*[\Theta]$
egyenletes	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{-b\Theta}-e^{-a\Theta}}{\Theta(a-b)}$
exponenciális	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{\alpha}{\alpha+\Theta}$
Gamma	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{\beta}{\alpha^2}$	$\left(\frac{\alpha}{\alpha+\Theta}\right)^{\beta}$
Erlang-k	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{k\mu^2}$	$\left(\frac{k\mu}{k\mu+\Theta}\right)^{k}$
H_k[4]	$\frac{1}{\mu}$	$\left(2\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i}{\mu_i^2}\right)-\frac{1}{\mu^2}$	$\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i\mu_i}{\mu_i+\Theta}$
χ^2	n	$2n$	$\left(\frac{1}{1+2\Theta}\right)^{n/2}$

[4] k fázisú hiper-exponenciális

5.3 A Laplace-transzformált

1. Táblázat. A Laplace-transzformált jellemzői [5]

	függvény	transzformált
1.	$f(t)$	$f^*[\Theta] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\Theta t} f(t)dt$
2.	$af(t) + bg(t)$	$af^*[\Theta] + bg^*[\Theta]$
3.	$f\left(\frac{t}{a}\right), \quad a > 0$	$af^*[a\Theta]$
4.	$f(t-a), \quad t \geq a$	$e^{-a\Theta} f^*[\Theta]$
5.	$e^{-at} f(t)$	$f^*[\Theta + a]$
6.	$tf(t)$	$-\frac{df^*[\Theta]}{d\Theta}$
7.	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n f^*[\Theta]}{d\Theta^n}$
8.	$\int_0^t f(u)g(t-u)du$	$f^*[\Theta]g^*[\Theta]$
9.	$\frac{df(t)}{dt}$	$\Theta f^*[\Theta] - f(0)$
10.	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$\Theta^n f^*[\Theta] - \sum_{i=1}^{n} \Theta^{n-i} f^{(i-1)}(0)$
11.	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{f^*[\Theta]}{\Theta}$
12.	$\frac{\partial f(t)}{\partial a} \quad a$ paraméter	$\frac{\partial f^*[\Theta]}{\partial a}$

[5] Az f szakaszosan folytonos és exponenciális nagyságrendű. Azaz, léteznek M és a pozitív számok, melyre $|f(t)| \leq Me^{at}$, $t \geq 0$.

2. Táblázat. Laplace-transzformáltak

	függvény	transzformált
1.	$f(t)$	$f^*[\Theta] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\Theta t} f(t)dt$
2.	$f(t) = c$	$\frac{c}{\Theta}$
3.	$t^n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$	$\frac{n!}{\Theta^{n+1}}$
4.	$t^a, \quad a > 0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{\Theta^{a+1}}$
5.	e^{at}	$\frac{1}{\Theta - a}, \quad \Theta > a$
6.	te^{at}	$\frac{1}{(\Theta - a)^2}, \quad \Theta > a$
7.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(\Theta - a)^{n+1}}, \quad \Theta > a$
8.[6]	$\delta(t)$	1
9.	$\delta(t-a)$	$e^{-a\Theta}$
10.[7]	$U(t-a)$	$\frac{e^{-a\Theta}}{\Theta}$
11.	$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-a\Theta} f^*[\Theta]$

[6] A Dirac delta függvény $\delta(\cdot)$ definíció szerint $\delta(t) = 0$ $t \neq 0$, de $\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(t-a) f(t)dt = f(a)$ minden f és minden $\epsilon > 0$.

[7] Az egység lépcsős függvény $U(\cdot)$ definíció szerint

$$U(t-a) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ 1 & , t \geq a. \end{cases}$$