KULCS
A SORBANÁLLÁSI ELMÉLETHEZ
ÉS ALKALMAZÁSAIHOZ

Készítette: Dr. Sztrik János

Debreceni Egyetem
Természettudományi Kar
Matematikai és Informatikai Intézet
Debrecen, 2000.

Tartalomjegyzék

A-nak és B-nek

Bevezetés

A sorbanállási elmélet több tudományterület határán fekvő, az alkalmazott matematikához tartozó viszonylag fiatal tudományág. Módszerei hatékonyan alkalmazhatók a megbízhatóságelmélet, operációkutatás, gyártási folyamatok, hírközlési és telekommunikációs, valamint számítógép rendszerek területén felmerülő problémák matematikai modellezésére. Az 1900-as évek elején főleg a telefonforgalom hatékonysági vizsgálataira használták. Az 1960-as években, a számítógéprendszerek rohamos fejlődésének hatására, egyre nagyobb figyelem irányult a bonyolult rendszerek elemzését lehetővé tevő sztochasztikus folyamatok mind szélesebb körben történő alkalmazására. Manapság, az óriási információáradat korában észrevehetően nagy igény mutatkozik mind komplexebb matematikai megközelítések bevezetésére, melynek következtében a leíró véletlen folyamatok is egyre összetettebbek lesznek. A téma fontosságát jól illusztrálják a következő adatok. A Zentralblatt MATH adatbázisát használva kiderült, hogy eddig 9847 olyan publikáció jelent meg, amely a `queueing` tárgyszót tartalmazza, 658 pedig a `queuing`-ot. Ebből 443 könyv, ezek közül 1997-ben 12, 1998-ban 11 került kiadásra, 1997-től 121 cikket ismertettek. Természetesen valójában ennél több a publikációk száma, hiszen ezek az adatok csak a referált anyagokra vonatkoznak.

A mérnöki tudományokban ügyelni kell arra, hogy a modellek lehetőleg egyszerűek legyenek, ne igényeljenek kifinomult matematikai ismereteket, de segítségükkel magyarázni tudjuk egyes paramétereknek a jól definiált rendszerjellemzőkre gyakorolt hatását. Sajnos ez, a fentebb leírtak miatt egyre nehezebben kivitelezhető.

A legegyszerűbb esetekben analitikus úton, azaz zárt alakban megadott képletek segítségével kaphatunk összefüggéseket. Manapság azonban a bonyolultság miatt ez nem elegendő, és a sikeres modellezés reményében ezért kénytelenek vagyunk numerikus, aszimptotikus, szimulációs, és ezek keverését (ú.n. hibrid) módszereket használni. A problémák összetettsége miatt, ha lehet, egyidejűleg több megközelítést is alkalmazunk, hogy ellenőrizni tudjuk magunkat vajon elég körültekintően jártunk-e el?

Természetesen mindez még nem elég hiszen mielőtt még hozzálátnánk a probléma megoldásához meg kell győződnünk arról, hogy mások már vizsgálták-e. Erre szolgálnak a különböző kereső rendszerek. Ha találtunk erre vonatkozó előző munkákat, akkor meg kell ismernünk a tartalmukat, tehát megpróbáljuk megszerezni azokat. Örömmel mondhatjuk, hogy ez a fejlett információsrendszerek jóvoltából egyre könnyebben megy. Ha már tanulmányoztuk mások eredményeit, ha vannak egyáltalán, csak azután érdemes magunknak is hozzáfogni.

Miután valamilyen módszerrel nekünk is sikerült új, vagy a régit megerősítő, eredményt elérni, mindig meg kell győződnünk arról, hogy a modell jól közelíti-e a valódi problémát!

Jelen oktatási segédlet megjelentetésével több célt is tűztünk ki magunk elé, nevezetesen:

- a legegyszerűbb az ú.n. markovi, vagy azokra visszavezethető, szinten tárgyalt sorbanállási rendszerek egyensúlyi jellemzőire egy tematikus összefoglalót adjunk,
- a rendszerek vizsgálatait lehetővé tevő programot mutassunk be, és másokra is információkat nyújtsunk,
- bőséges irodalomjegyzékkel lássuk el az érdeklődő olvasót,
- megmutassuk az internet előnyeit az oktatás és kutatás területén is,
- több hasznos internetes adatbázis címét gyűjtöttük össze és ezt adjuk közzé (kiadók, terjesztők, folyóiratok, könyvtárak, szakmai társaságok, stb.)

Az 1. fejezetben megadjuk a sorbanállási rendszerek vizsgálatához szükséges legfontosabb tudnivalókat, mint pl. a rendszerek osztályozására vonatkozó jelöléseket, definiáljuk a legfontosabb fogalmakat, végül felsoroljuk a legfontosabb jellemzőket.
A 2. fejezetben a hatékonyságvizsgálati eszközöket tárgyaljuk, továbbá részletesen bemutatjuk a MACOM programcsomagot.
A 3. fejezetben bőséges irodalomjegyzéket sorolunk fel a sorbanállási

elméletre, megbízhatóságelméletre, számítógéprendszerek vizsgálataira vonatkozóan.

A 4. fejezetben hasznos információforrások internetes címeit adjuk közzé, pl. referáló folyóiratok, szakmai társaságok, könyvtárak, kiadók, terjesztők stb.

Az 5. fejezetben a legfontosabb diszkrét és abszolút folytonos valószínűségi változókra vonatkozó táblázatokat foglaljuk össze.

A 6. fejezet adja a segédlet gerincét, melyben az alapvető sorbanállási képleteket adjuk meg.

A magyarországi oktatás és jegyzetellátás helyzetét ismerve meggyőződésünk, hogy a jelen munka hiánypótló. Elméleti alapjai a 3.1 részben felsorolt irodalmak közül magyar nyelven pl. Győrfi László [37], L. Kleinrock [43], Sztrik János [63] egyetemi jegyzetekben illetve könyvben megtalálhatók. Az angol nyelvű irodalomból A. Allen [12], R. Cooper [24], B. Haverkort [38], R. Nelson [48], L. Takács [66], H. Takagi [67] műveket javasoljuk. Éppen ezért most az elméleti résszel nem foglalkozunk. Várhatóan szinte mindenki használhatja, aki egy kicsit is érdeklődik az alkalmazott valószínűségszámítás ezen ága iránt. A felépítéséből látható, hogy igyekeztünk bemutatni az internet előnyeit és azokat is rávenni használatára akik eddig vonakodtak ettől. A különböző képek beiktatásával még nagyobb kedvet szerettünk volna csinálni.

Természetesen az internetes változat is hamarosan elkészül, ahol még több kapcsolatos forrást adhatunk meg könnyen áttekinthető formában. Ez várhatóan megtekinthető lesz a KLTE Matematikai és Informatikai Intézet honlapján:

`http://www.math.klte.hu`.

Az előforduló hibákra vonatkozó észrevételeket és mindenfajta javító szándékú megjegyzést örömmel veszünk az alábbi címen:

`jsztrik@math.klte.hu`

`http://it.math.klte.hu/user/jsztrik/index.html`

Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet fejezem ki Dr. Telek Miklós egyetemi docensnek a kézirat gondos átolvasásáért és hasznos megjegyzéseiért. Különösen lekötelezettje vagyok Dr. Almási Béla egyetemi adjunktusnak, aki a 2.1 fejezetben tárgyalt MACOM programcsomaggal és a felmerülő számítástechnikai problémákkal kapcsolatban nagyon sokat segített.

Utoljára, de nem utolsó sorban hálás vagyok Ipacs Zsolt és Sárközi Iván programtervező matematikus hallgatóknak, akik a szerkesztésben segédkeztek, valamint a KLTE Matematikai és Informatikai Intézetének a jó informatikai környezet biztosításáért.

Az anyag elkészítéséhez a Széchenyi Professzori Ösztöndíj és az Oktatási Minisztérium FKFP-04/1999 pályázata részleges anyagi támogatást nyújtottak.

Debrecen, 2000.

A Szerző

1. A sorbanállási rendszerek jellemzői

Ahhoz, hogy teljesen jellemezzünk egy sorbanállási rendszert, azonosítanunk kell azt a sztochasztikus folyamatot, amely a beérkező igényeket írja le, és meg kell adnunk a kiszolgálás szabályait és struktúráját. A beérkező folyamatot általában az egymás után beérkező igények közötti időintervallumok valószínűségeloszlása segítségével jellemezhetjük. Ezt az $A(t)$ szimbólummal jelöljük, ahol

$$A(t) = P(\text{két egymás utáni beérkezési időköz} < t).$$

A sorbanállás elméletében többnyire feltesszük, hogy az egymás utáni beérkezések közötti időközök (röviden *beérkezési időköz*), azonos eloszlású független valószínűségi változók (ezért a beérkezési folyamat ún. *felújítási folyamatot* alkot). A másik sztochasztikus mennyiség, amit meg kell adni, a beérkező igények által a csatornával szemben támasztott követelmények (munka) nagysága; ezt *kiszolgálási időnek* nevezzük és valószínűségeloszlását $B(x)$-szel jelöljük, azaz

$$B(x) = P(\text{kiszolgálási idő} < x).$$

A kiszolgálás ideje annak az időintervallumnak a hosszát jelenti, amelyet az igény a kiszolgáló egységben eltölt.

A kiszolgálás szabályára és struktúrájára vonatkozóan további mennyiségeket kell meghatározni. Ilyen jellemző a rendelkezésre álló *kiszolgálóegységek (csatornák) száma*, valamint a *befogadóképesség*, ami nem más, mint a kiszolgálóegységben és a várakozási sorban tartózkodó igények maximális száma, amit gyakran végtelennek tekintünk. A *kiszolgálási sorrend* írja le azt a szabályt, amely szerint a várakozók közül sorra kerülnek az egyes igények kiszolgálás céljából. A leggyakrabban használt kiszolgálási elvek : FIFO (First In - First Out) - érkezési sorrendben; LIFO (Last In - First Out) - fordított sorrendben történő kiszolgálások. Ha a beérkező igényeket bizonyos csoportokba tartozás szerint meg lehet különböztetni, akkor a csoportok között *prioritást* lehet megállapitani, és ezen a prioritáson alapul a kiszolgálás sorrendje. Ez az egyik legalkalmasabb ütemezési elv, mivel így az igények közötti fontossági sorrendet felállítva történik a kiszolgálás.

A prioritásos sorbanállási elvnek két fő típusa van: *abszolút* és *relatív*. Az előbbi azt jelenti, hogy ha egy igény kiszolgálása folyamatban van, és érkezik egy magasabb prioritású igény, akkor a kiszolgálás megszakad, és újra beáll a várakozási sorba. He legközelebb rákerül a kiszolgálás, akkor az kezdődhet az elejétől vagy a megszakítás helyétől. A relatív prioritásos esetben a fontosabb igény beérkezésekor a kiszolgálás nem szakad meg, hanem folytatódik, majd a befejezéskor a legfontosabb várakozó igény kiszolgálása kezdődik.

A sorbanállási rendszerek hatékonyságának és teljesítményének vizsgálatához a következő mérőszámokat fogjuk meghatározni: az *igények várakozási ideje*; a rendszerben levő *igények száma*; a *foglaltsági intervallum hossza* (vagyis az a folytonos időintervallum, amelyben a kiszolgáló egység állandóan foglalt); az *üresjárati időszakasz hossza*; a pillanatnyi *munkahátralék eloszlása*. Mindegyik mennyiség valószínűségi változó, és így teljes valószínűségszámítási jellemzésüket (vagyis eloszlásfüggvényüket) keressük, amit általában nehéz megadni, így sokszor megelégszünk az átlagos mennyiségekkel.

Az elemi sorbanállási elmélet egyrészt történeti okokból, másrészt pedig azért fontos, mert alkalmas arra, hogy szemléltesse a bonyolultabb sorbanállási rendszerek jellemzőit is.

Egyszerűség kedvéért tekintsünk először egy egykiszolgálós rendszert.

A sorbanállási rendszerek teljesítményének mérésére legalkalmasabb eszköz a torlódás vizsgálata. Legyen ϱ egy dimenzió nélküli mennyiség, amelyet a következőképpen lehet definiálni:

$$\varrho = \text{forgalmi intenzitás} = \frac{\text{átlagos kiszolgálási idő}}{\text{átlagos beérkezési időköz}}.$$

Feltételezzünk egy végtelen populációjú modellt, jelöljük a beérkezési intenzitást λ-val, ami nem más, mint az átlagos beérkezési időköz reciproka, valamint az átlagos kiszolgálási időt $1/\mu$-vel. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\varrho = \text{érkezési intenzitás} * \text{átlagos kiszolgálási idő} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Az 1-nél nagyobb *forgalmi intenzitás* azt mutatja ,hogy az igények gyorsabban érkeznek, mint ahogy egy szerver (kiszolgálóegység, csatorna) ki tudná szolgálni őket. Jelölje $\chi(A)$ az A esemény karakterisztikus függvényét, azaz

$$\chi(A) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } A \text{ teljesül,} \\ 0 & \text{, ha nem } A \text{ teljesül ,} \end{cases}$$

és $X(t) = 0$ azt az eseményt, hogy a kiszolgáló tétlen a t időpillanatban. Ekkor a szerver időegységre eső kihasználtsága

$$\frac{1}{T} \int\limits_0^T \chi\left(X(t) \neq 0\right) dt \ ,$$

ahol T egy elegendően hosszú időintervallum. Ha $T \to \infty$ esetén a fenti mennyiségeknek létezik határértéke, akkor a szerver *kihasználtságán* ezt az U_s-sel jelölt mennyiséget értjük. Továbbá 1 valószínűséggel fennáll

$$U_s = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \chi\left((t) \neq 0\right) dt = 1 - p_0 = \frac{E\delta}{E\delta + Ei},$$

ahol p_0 annak stacionárius valószínűsége, hogy a szerver tétlen, $E\delta$ a kiszolgáló egység átlagos foglaltsági periódushosszát, Ei pedig az átlagos tétlenségi periódushosszát jelöli.

Ez az összefüggés Markov-folyamatoknál speciális esete a következő, gyakran felhasználható relációnak. Legyen $X(t)$ egy ergodikus Markov-folyamat, A pedig állapotterének egy részhalmaza. Látható, hogy $X(t)$ az idő folyamán felváltva tartózkodik A-ban és $\overline{A}$-ban. Ekkor 1 valószínűséggel

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(\int_0^T \chi(X(t) \in A) dt \right) = \sum_{i \in A} p_i$$

$$= \frac{m(A)}{m(A) + m(\overline{A})},$$

ahol $m(A)$ és $m(\overline{A})$ az A ill. az $\overline{A}$ részhalmazban való átlagos tartózkodási időt jelöli egy ciklus alkalmával, p_i pedig az $X(t)$ folyamat ergodikus eloszlása.

Egy m párhuzamos szerverből álló rendszerben T idő alatt átlagosan $\lambda T/m$ igény érkezik szerverenként, feltéve, hogy a forgalom egyenletes eloszlású az m kiszolgáló egység között. Ha minden beérkezett kérés kiszolgálása átlagosan $1/\mu$ ideig tart, akkor a szerver teljes foglaltsági idejének várható értéke $\lambda T/m\mu$. Osszuk el ezt a mennyiséget T-vel, így

$$\varrho = \frac{\lambda}{m\mu}.$$

Mivel a kihasználtság maximum 1 lehet, így az m szerveres rendszer kihasználtsági tényezőre vonatkozó korrekt kifejezés:

$$\varrho = \min\left\{\frac{\lambda}{m\mu}, 1\right\}.$$

Másik gyakran használt teljesítménymérő eszköz a *rendszer átbocsátóképességének* vizsgálata. Ezt a mennyiséget úgy definiálhatjuk, mint az időegységenként kiszolgált igények átlagos számát. m szerveres rendszerben minden időegység alatt $m\varrho\mu$ igény kiszolgálása fejeződik be, így az

$$\text{átbocsátóképesség} = m\varrho\mu = \min\{\lambda, m\mu\}.$$

Ami azt jelenti, hogy az átbocsátóképesség ekvivalens a λ érkezési intenzitással, amennyiben a λ kisebb, mint a maximális kiszolgálási sebesség $(m\mu)$, azon túl az átbocsátóképesség beáll $m\mu$-re.

Az igények szempontjából a legjelentősebb teljesítménymérő eszköz az az idő, amit a várakozási sorban vagy a rendszerben töltenek. Definiáljuk a W_j *várakozási időt*, mint a j-dik igény várakozási sorban eltöltött idejét, és a T_j *válaszidőt*, mint az igény által e rendszerben eltöltött teljes időt. Ezen jelöléseket használva a következő egyenlőséget kapjuk:

$$T_j = W_j + S_j,$$

ahol S_j a kiszolgálási időt jelöli. W_j és T_j is valószínűségi változó, várható értékük $\overline{W_j}$ és $\overline{T_j}$ alkalmas a rendszer teljesítményének mérésére.

A rendszer teljesítményének vizsgálata történhet a *várakozási sor hosszának* mérésével is. A $Q(t)$ valószínűségi változó jelentse a t időpillanatban a sorban található igények számát, és $X(t)$ a t időpillanatban a *rendszerben található igények számát.* Egy rendszerben levő igény vagy a várakozási sorban van, vagy éppen kiszolgálás alatt áll, tehát m szerveres rendszer esetén:

$$Q(t) = \max\{0, X(t) - m\}.$$

Mielőtt rátérnénk az elemi sorbanállási rendszerek vizsgálatára, néhány, Kendalltól származó jelölést vezetünk be, melyek segítségével osztályozhatjuk őket:

A/B/m/K/N

ahol

A: a beérkezési időközök eloszlásfüggvénye,
B: a kiszolgálási idő eloszlásfüggvénye,
m: a kiszolgálók száma,
K: a rendszer befogadóképessége, azaz a kiszolgálóegységben és a várakozási sorban tartózkodó igények maximális száma,
N: az igényforrás számossága.

Ha az említett eloszlások exponenciálisak, akkor az M jelölést használjuk. Továbbá, ha a befogadóképesség vagy az igényforrás számossága végtelen, akkor ezeket a jelöléseket elhagyjuk.

Így pl. az M/M/1 rendszer, egy egy kiszolgálós Poisson beérkezéssel és exponenciális kiszolgálási idővel jellemzett rendszert jelöl. Az M/G/m rendszernél a beérkezések Poisson-folyamat szerint történnek, a kiszolgálási idők általános eloszlásúak, és m szerver áll rendelkezésünkre. Az M/M/r/N/N rendszer esetén az igények egy N elemű forrásból származnak ahol exponenciális eloszlású ideig tartózkodnak, a kiszolgálást r egység végzi exponenciális eloszlású ideig.

2. Hatékonyságvizsgálati eszközök

Ebben a fejezetben néhány nagyon hasznos programot adunk meg, melyek használatával a modellezés bizonyos értelemben automatizálódik. Sokszor a legnagyobb probléma az, hogy hogyan tudjuk megfogalmazni a fel-adatot anélkül, hogy megadnánk az egyensúlyi állapotegyenleteket. Ebben segítenek az ú.n. "tools"-ok, melyek valamilyen sajátos programnyelven lehetővé teszik, hogy leírjuk amit vizsgálni szeretnénk. Ez általában az SPN (Stochastic Petri Nets , Sztochasztikus Petri hálók), vagy különböző fajtái ú.n. színezett, általánosított, stb segítségével tehető meg. Manapság nagyon gyakran grafikus szerkesztő áll rendelkezésünkre.

Ezután a program generálja a leíró sztochasztikus-folyamatot, ez általában Markov-lánc. Ezt követően az ú.n SOLVER feladata, hogy megadja a rendszerjellemzőket. A különböző programoktól függ, hogy milyen módszert alkalmaznak. Ez történhet a lineáris egyenletrendszerek megoldására kifejlesztett eljárással, közelítéssel, szimulációval stb.

A MACOM (Markovian Analysis of COMmunication Systems) programcsomag a KLTE Matematikai es Informatikai Intézetében megtalálható, ezért részletes használati útmutatót adunk róla.

2.1 A MACOM programcsomag

2.1.1 Bevezetés

A MACOM egy telekommunikációs rendszerek modellezésére készült programcsomag. Elméleti alapjait a sorbanállási hálózatok képezik. Ebben az ismertetőben feltételezzük, hogy az olvasó ismeri a sorbanállási elmélet alapfogalmait (ld. pl. [2],[3],[4]), valamint rendelkezik általános számítógépkezelői (windows használati) ismeretekkel. Jelen segédletben a MACOM használatának bemutatása a célunk.
A standard sorbanállási fogalomrendszer a következőkkel bővül a MACOM-ban:

- korlátos kapacitású kiszolgálóegységek
- szimultán érkezés
- állapotfüggő elágazás

– nem exponenciális eloszlások

A telekommunikációs rendszer modellezése a következő lépésekből áll:

1. Modell konstrukció (egy grafikus "modell editor" segítségével)
2. Attribútum definíciók (paraméterek és konstansok megadása)
3. A kiszámítandó rendszerjellemzők meghatározása
4. Kísérlet (ill. kísérlet sorozatok) definíciója (értékadás a paramétereknek)
5. Az analízis végrehajtása
6. Eredmények értékelése

Mielőtt rátérnénk az egyes tevékenységek konkrét leírására, tekintsük át a program használatának általános szabályait.

2.1.2 Általános ismertető

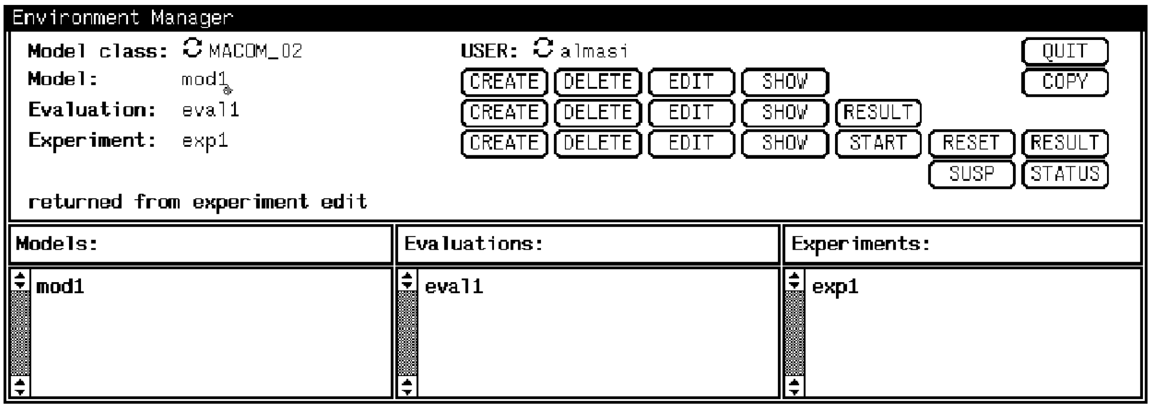
A MACOM program SUN munkaállomásokon SunOS 4.1.3 operációs rendszer alatt használható. A program a macom paranccsal indítható Sunview vagy Openwindows rendszerben. Eredetileg Sunview ablakrendszerben készült, de Openwindows alatt is indítható, bár a program ekkor is a Sunview "szokásokkal" működik. Az egér bal gombja a "Select", a jobb gombja pedig a "Menü" funkciókat látja el.

A MACOM-ban egy rendszer három szinten kerül modellezésre: Az első szint a "Modell", ez jelenti a modell vázát. A következő a Számítás ("Evaluation"), ahol megadhatjuk, hogy a vizsgált modell mely jellemzőit kívánjuk meghatározni. Egy modellhez több Számítás is tartozhat. A harmadik szint a Kísérlet ("Experiment"), ahol a modell paraméterei, ill. a konkrét numerikus számítás módszere adható meg. Természetesen itt is fennáll, hogy egy Számításhoz több Kísérlet is tartozhat.

Általános érvényű szabály, hogy ha egy szinten törlünk, akkor a szint alatti valamennyi objektum törlődik. Ha egy szint egy objektumát módosítani akarjuk, akkor előtte az összes alatta lévő objektumot törölni kell.
Pl. Ha egy Modell szintű változtatás szükséges, akkor az adott modellhez tartozó valamennyi Számítást törölnünk kell.
Egyébként a szintek kezelése egységes, valamennyi szinten a következő tevékenységek segítik a munkánkat (ld. 1.ábra):

Create - Az adott szinten új objektum létrehozása (a megadott névvel).
Edit - A megnevezett objektum módosítása.
Show - A megnevezett objektum bemutatása.
Delete - A megnevezett objektum törlése.

Egy már létező objektum az objektum nevére irányuló "Select" művelettel választható ki.

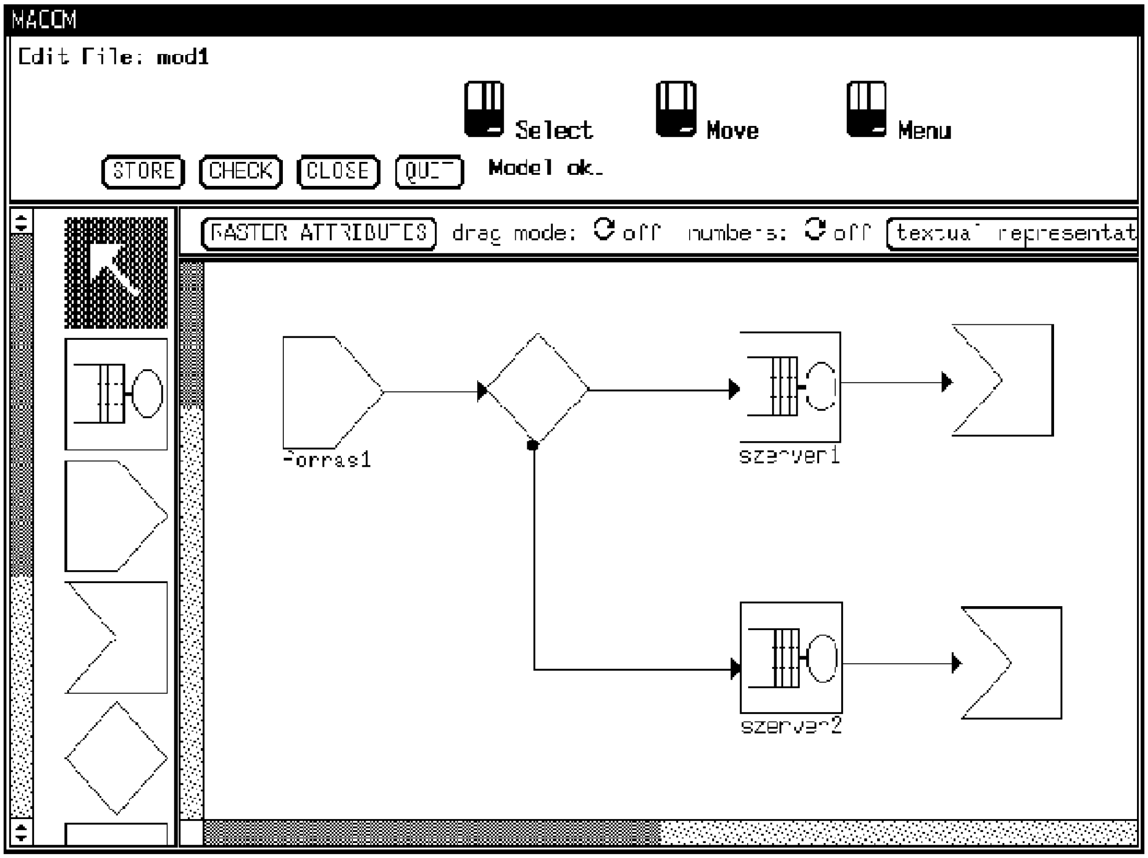


1. ábra

Tekintsük át ezután egy új modell készítésének lépéseit.

2.1.3 Modellezés

A modell nevét begépelve a "**Create**" művelettel hozhatunk létre egy új (üres) modellt, amely ezután az "**Edit**" művelettel módosítható. Az "**Edit**" művelet egy új ablakot jelenít meg (ld. 2.ábra). Ez az ablak egy grafikus editor, mely lehetővé teszi a sorbanállási rendszer könnyű, gyors definícióját.



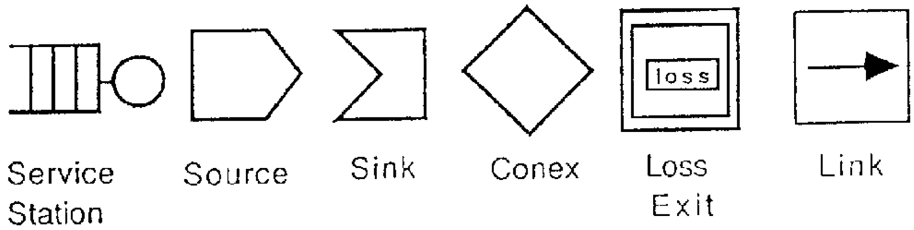
2. ábra

2.1.3.1 Modell konstrukció

A MACOM-ban - mint általában a sorbanállási modellekben - források által keltett igények haladnak, az igények a kiszolgáló egységeknél sorbanállhatnak, kiszolgálásuk után pedig vagy elhagyják a rendszert, vagy újra sorbaállnak valamely kiszolgálóegységnél.

A modell alapegysége a Lánc ("Chain"), amelynek kiindulópontja a Forrás ("Source"), a végpontja pedig vagy egy Végállomás ("Sink"), vagy egy Elvesztés ("Loss Exit"). A kezdő- és a végpont között az igények a Kiszolgálóegységeken ("Service Station") haladnak keresztül. Egy igény a rendszerben egy láncon halad végig. A lánc vonalvezetése lehet nemdeterminisztikus is a Feltételes elágazások ("Conex") segítségével. Az objektumok közötti átjárás a Linkeken keresztül történik. Fontos megjegyeznünk, hogy egy Linken csak egy Forrástól származó igények haladhatnak, de az objektumok között tetszőleges számú Link alakítható ki.

Mivel egy Lánchoz egy Forrás tartozik, így a Forrás neve lesz a Lánc neve is. A grafikus editoron az előbbi objektumokat a következő ábrák jelzik:



A modell konstrukciója a grafikus editor segítségével egyszerű "Select" egérműveletekre redukálódik. A grafikus editorban a középső egérgombbal mozgathatjuk az objektumokat.

2.1.3.2 Attribútum definíciók

Ha a modell konstrukciójával készen vagyunk, akkor a következő lépés a modell objektumaihoz tartozó attribútumok megadása. Ez ugyancsak a modell editor ablakban tehető meg oly módon, hogy az egérrel az objektumra pozícionálunk, s a "Menü" egérgombbal lehívjuk az objektumhoz tartozó menüt. A menüben a "Delete" opcióval törölhetjük az objektumot, a "Check" opcióval pedig ellenőrizhetjük a felvitt attribútumok helyességét. A teljes modell a szerkesztő részen kívül található Check feliratú nyomógombbal ellenőrizhető. Az elkészült modell a Store nyomógombbal tárolható le.

Fontos! A kiszámítandó rendszerjellemzőket itt még nem kell megadnunk, azt elegendő a Számítás szinten meghatároznunk.

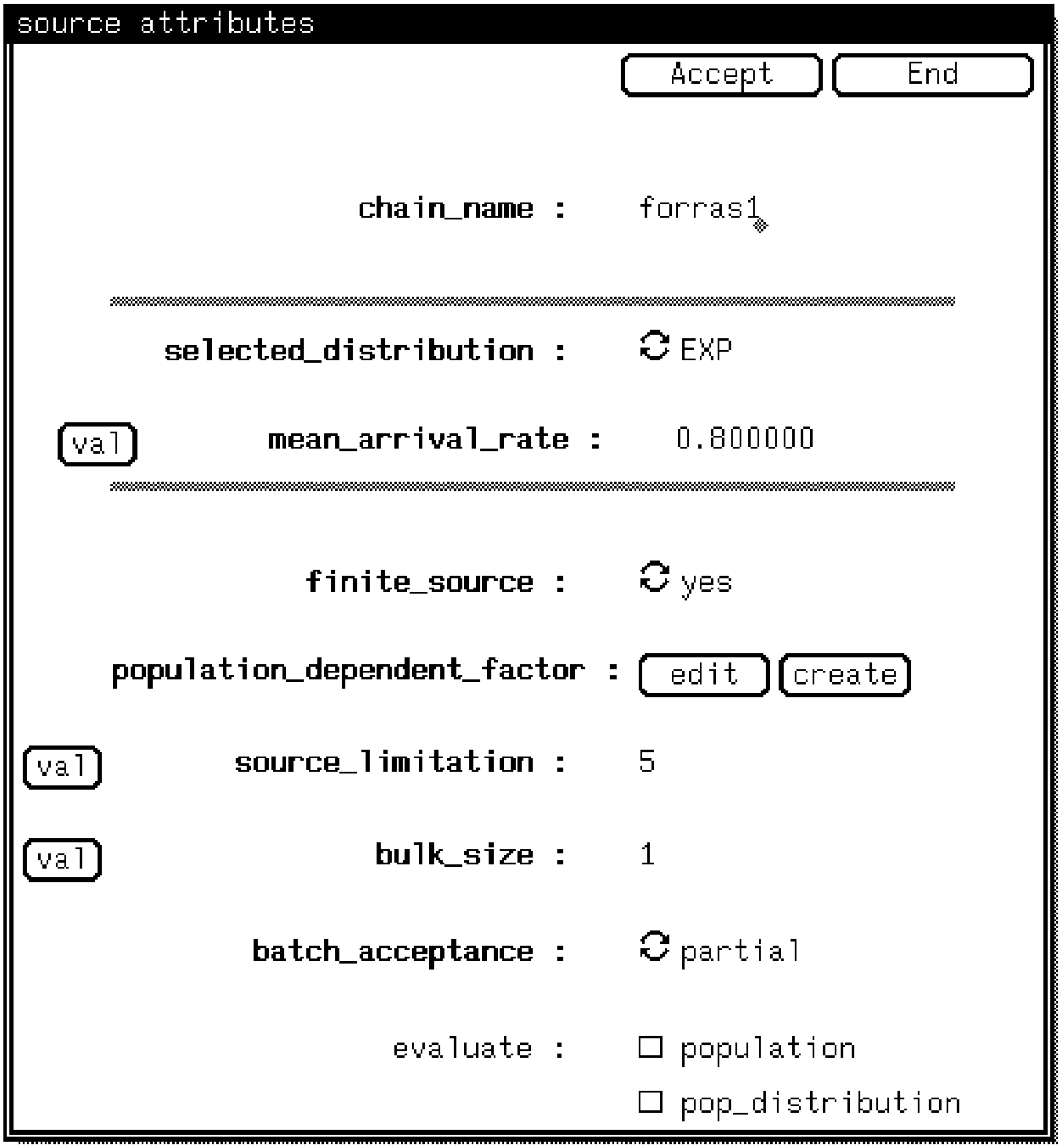
Tekintsük át az egyes objektumokhoz tartozó attribútumok jelentését.

A "val" jelű attribútumok konstansok (általában numerikus konstansok) lehetnek. Ha a "val" szóra kattintunk az egérrel, akkor az "par" jellé változik, s ekkor ez a jellemző egy paraméter, amit később a kísérleteknél adhatunk meg. Ezáltal a paraméter hatása gyorsabban, könnyebben megfigyelhető.

Az attribútumok esetén általában az "Accept" nyomógomb a definíciók véglegesítését (elfogadását), az "End" pedig az attribútumdefiníciók befejezését jelenti.

Forrás attribútumok

A forrás attribútumok írják le a rendszerbe érkező igényeket.



3. ábra

Az ábrán látható forrás attribútumok jelentése:

Chain Name: A Forrás neve (egyben ez lesz a Lánc neve)
Selected Distribution: A Forrás által generált igények ”generálási

idejének" eloszlása. Itt választhatunk exponenciális, COX, COXG, Hyper-exponenciális, Erlang, PH, MMPP, MAP, IPP közül (ld.: [1]).

Mean arrival rate: A kiválasztott eloszlás paramétere. (Érkezési ráta") Ha itt konstanst akarunk megadni, akkor azt egyszerűen beírhatjuk. Ha az attribútum előtt álló "val" szócskára klikkelünk az egérrel, akkor az attribútum paraméter lesz (ezt a "par" szó jelzi a képernyőn), s a paraméter nevét kell begépelnünk. A paraméter értékét a Kísérlet definíciójánál adhatjuk meg. Ez a módszer általános a MACOM-ban, azaz ahol a "val" szót látjuk, ott ugyanezzel a módszerrel definiálhatunk paramétert. A paraméterdefinícióval lehetőség nyílik az attribútum hatásának gyors numerikus elemzésére kísérletsorozatokon keresztül.

Finite source: A forrás véges voltát állíthatjuk itt be. Fontos! A végtelen forrásokkal körültekintően kell dolgoznunk, mert az állapotszám ebben az esetben könnyedén minden határon túlnőhet, ami nyilván nem modellezhető.

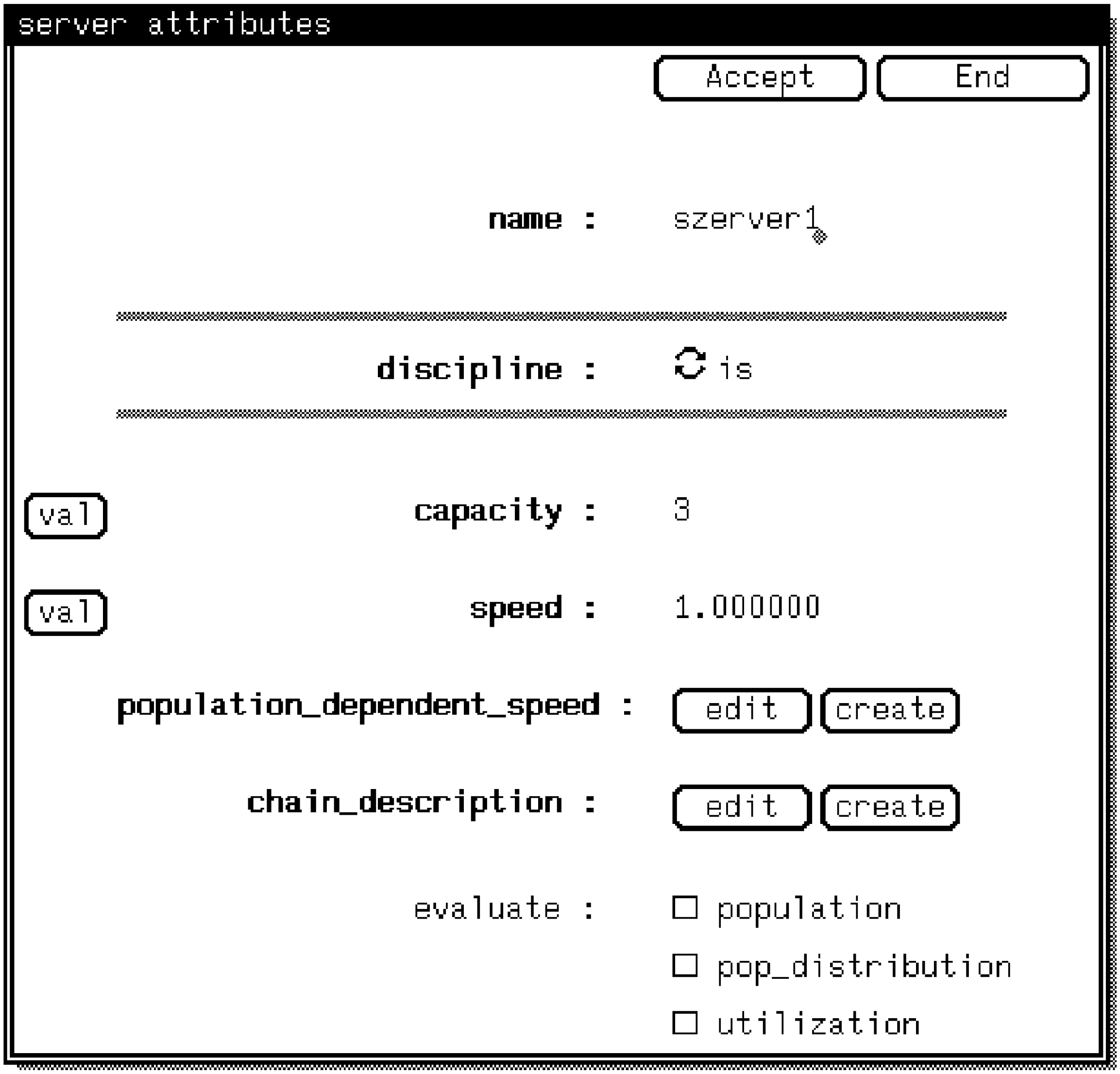
Pop. dep. factor: Az igény generálási idejének eloszlása a rendszer aktuális állapotától (a rendszerben tartózkodó igények populációjától) függővé tehető ezzel a faktorral (ld. [1]).

Source Limit.: A rendszerben tartózkodó igények maximális számát adhatjuk meg itt. (Azaz, ha a rendszerben már az itt megadott számú igény van, s a Forrás egy újabbat generál, akkor az újonnan generált igény elvész, nem lép be a rendszerbe.) Bulk Size: A MACOM lehetőséget ad arra, hogy az igények egy időpillanatban nagy tömegben ("Batch" vagy "Bulk" módon) érkezzenek. Itt a "Batch" méretét állíthatjuk be.

Batch accept.: Előfordulhat, hogy egy érkező "Batch" igénytömeg átlépi a "Source Limit"-nél beállított értéket. Ennél a paraméternél arról dönthetünk, hogy ebben az esetben az egész igénytömeg elvesszen ("whole" érték), vagy csak az igénytömeg többletrésze ("partial" érték).

Evaluate: Itt adhatjuk meg, hogy a forrásra vonatkozóan milyen rendszerjellemzők számítását kérjük. Ezt a modell definíciójakor üresen hagyhatjuk, mert ezt a Számítás szinten kell definiálnunk.

Kiszolgálóegység attribútumok



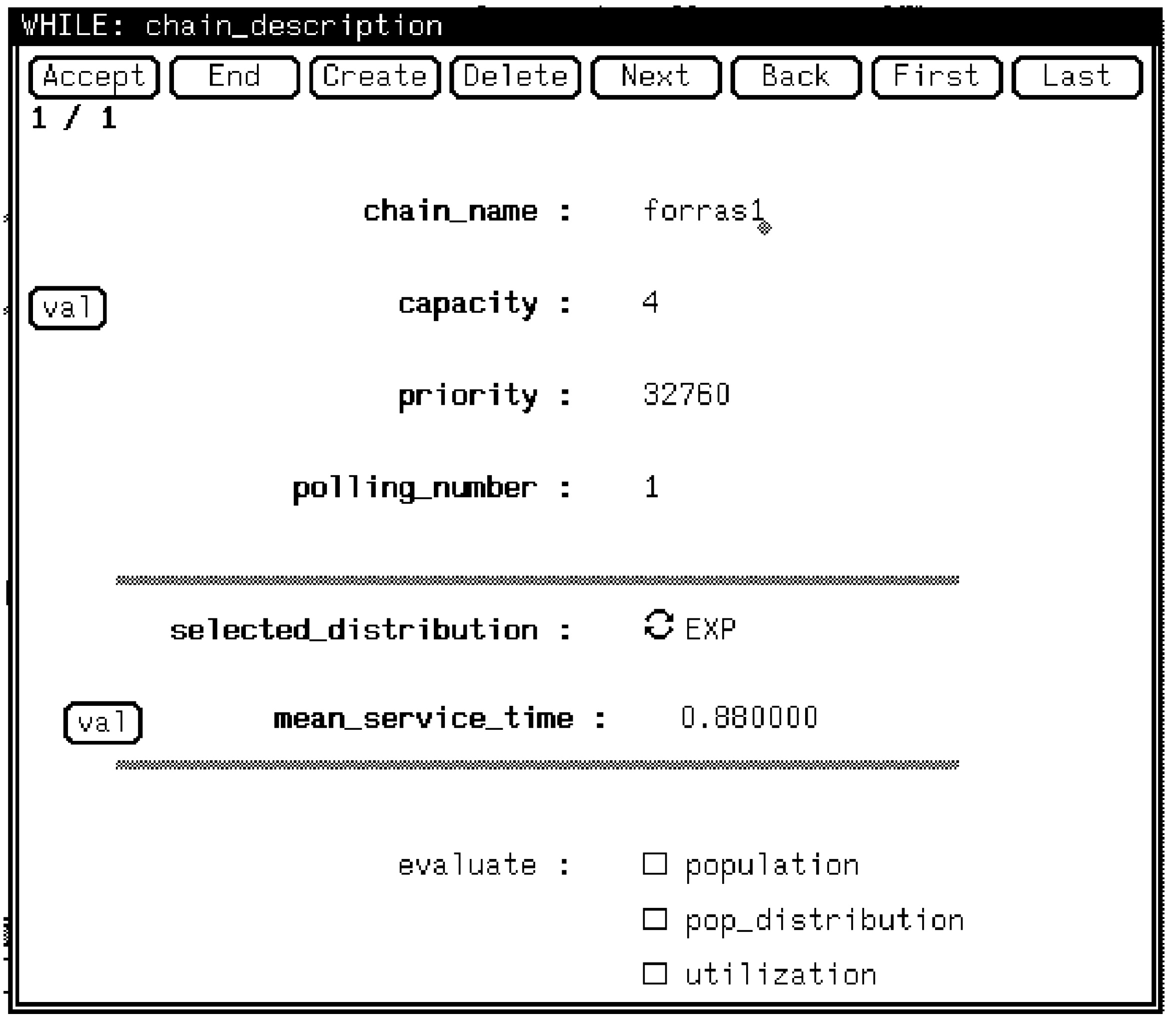
4. ábra

A kiszolgálóegység attribútumainak jelentése:

Name: A kiszolgálóegység neve.
Discipline: A kiszolgálási diszciplína (ld. [1]): IS, PS, Random, Random_q, PRIONP, PRIOPR, Polling, Polling_exhaustive.
Capacity: A kiszolgálóegység maximális kapacitása. Ha a kapacitáson túl igény érkezik, akkor az elvész.
Speed: Kiszolgálási sebesség.

Pop. dep. speed: Ez a faktor a kiszolgálási sebességet változtatja a várakozó igények számának függvényében (hasonló, mint a források esetén a "Pop. dep. factor" volt).

Chain desc.: Egy kiszolgálóegységhez több forrástól is érkezhetnek igények. Az egyes forrásoktól származó igényekre további specialitások meghatározhatók:



5. ábra

A "Chain description" attribútumok jelentése:

Chain Name: Itt kell megadnunk, hogy mely forrástól származó igények speciális attribútumait definiáljuk. Ha a kiszolgálóegységhez több forrástól is érkezik igény, akkor minden egyes forrásra meg kell adnunk a "Chain description" részleteket.

Capacity: Az adott forrásra vonatkozó kapacitás.

Priority: Prioritási jelzőszám (prioritásos kiszolgálási diszciplínák esetén használt).

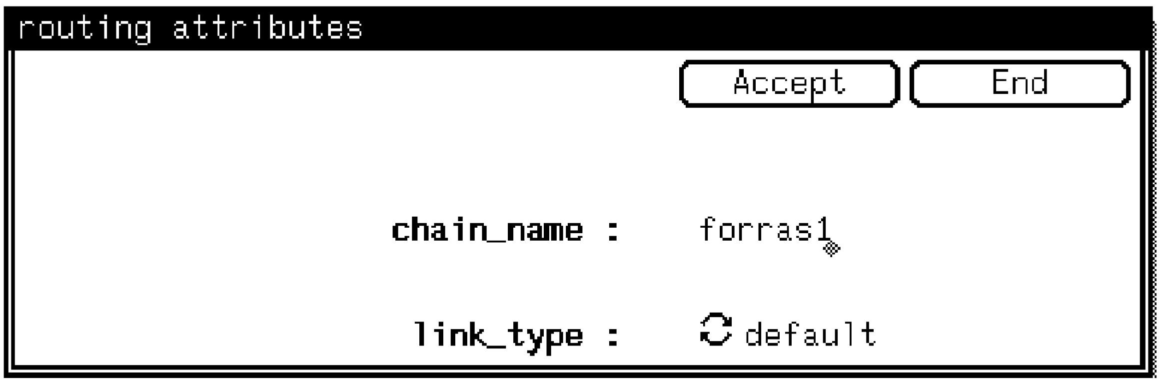
Polling Number: Polling sorszám (polling kiszolgálási diszciplínák esetén használt).

Selected Distrib.: Az adott forrástól származó igény kiszolgálási idejének eloszlása (Exponenciális, COX, COXG, Hyper-exponenciális, Erlang).

Mean service time: A választott eloszlás paramétere (itt átlag).

Evaluate: Az adott forrástól származó igények kiszolgálási jellemzői. Ezeket csak a Számítás szinten kell definiálnunk.

Link attribútumok



6. ábra

A link definiálja, hogy egy objektumtól az igény mely objektumhoz továbbítódik. Az attribútumok jelentése:

Chain Name: Itt adjuk meg, hogy mely forrástól származó igény útját definiáljuk.

Link Type: (”default” / ”alternative”) : Alapértelmezés a ”default” érték. Az ”alternative” érték akkor kell, ha a link egy ”Conex”-nek a második (azaz alternatív) kimenete.

Conex attribútumok

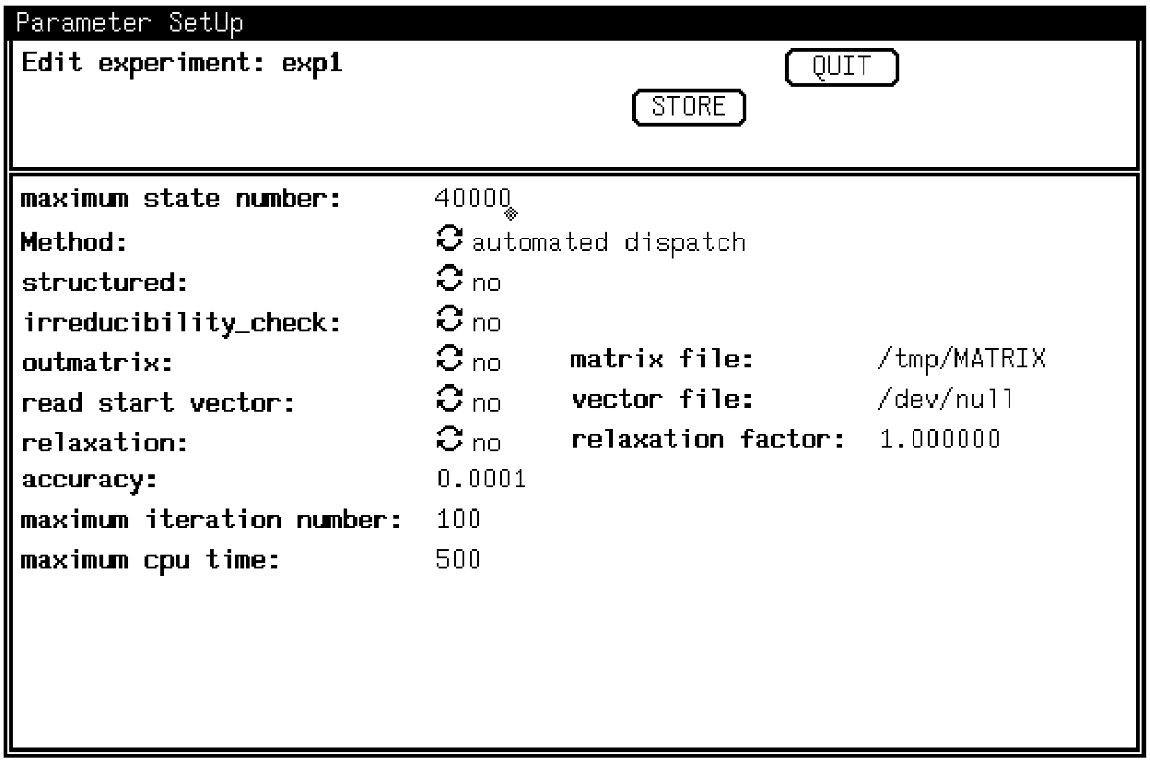
A Conex - Feltételes elágazás - objektumok teszik lehetővé, hogy egy forrástól származó igény útja a rendszerben lehet előre nem meghatározott. A Conex egy bemeneti linkkel, s két (esetleg több) kimeneti linkkel rendelkezik. Az, hogy egy igény melyik kimeneten távozik definiálható távozási valószínűséggel, illetve az aktuális rendszerállapottól függően is leírható.

2.1.3.3 A kiszámítandó rendszerjellemzők

Az előzőekben a Modell szintű tevékenységeket tekintettük át. Ha a modell definíciója kész, akkor definiálhatunk a modellhez "Számításokat", azaz megadhatjuk, hogy mely rendszerjellemzőket kérjük kiszámítani. Ez ugyancsak a 2. ábrán látható "Modell Editor" ablakban történik az egyes objektumok attribútum ablakaiban az "Evaluate" mezők kitöltésével.

2.1.3.4 Kísérletek megadása

A 7. ábrán látható ablakban definiálhatjuk az adott modell adott számításához tartozó paramétereket.



7. ábra

2.1.3.5 A modell analízise

A MACOM főképernyőjén (ld. 1. ábra) a **Reset** nyomógombbal állíthatjuk alaphelyzetbe az analízist. Maga az analízis a **Start** nyomógombbal indítható, a **Status** nyomógomb szolgál a futó analízis státuszának lekérdezésére. Ha az analízis befejeződött, akkor az eredmények a **Result** nyomógombbal kérhetők le (egy Kísérletre ill. egy Számításra vonatkozóan).

Fontos! Ha a **Result** nyomógomb hatására az eredmények nem jelennek meg, akkor a modellezés sikertelen volt. Ennek oka lehet pl. az, hogy a modellezett rendszer állapotainak száma túllépi a Kísérletnél megadott "maximum state number" értéket.

2.1.3.6 Egy konkrét modell analízise

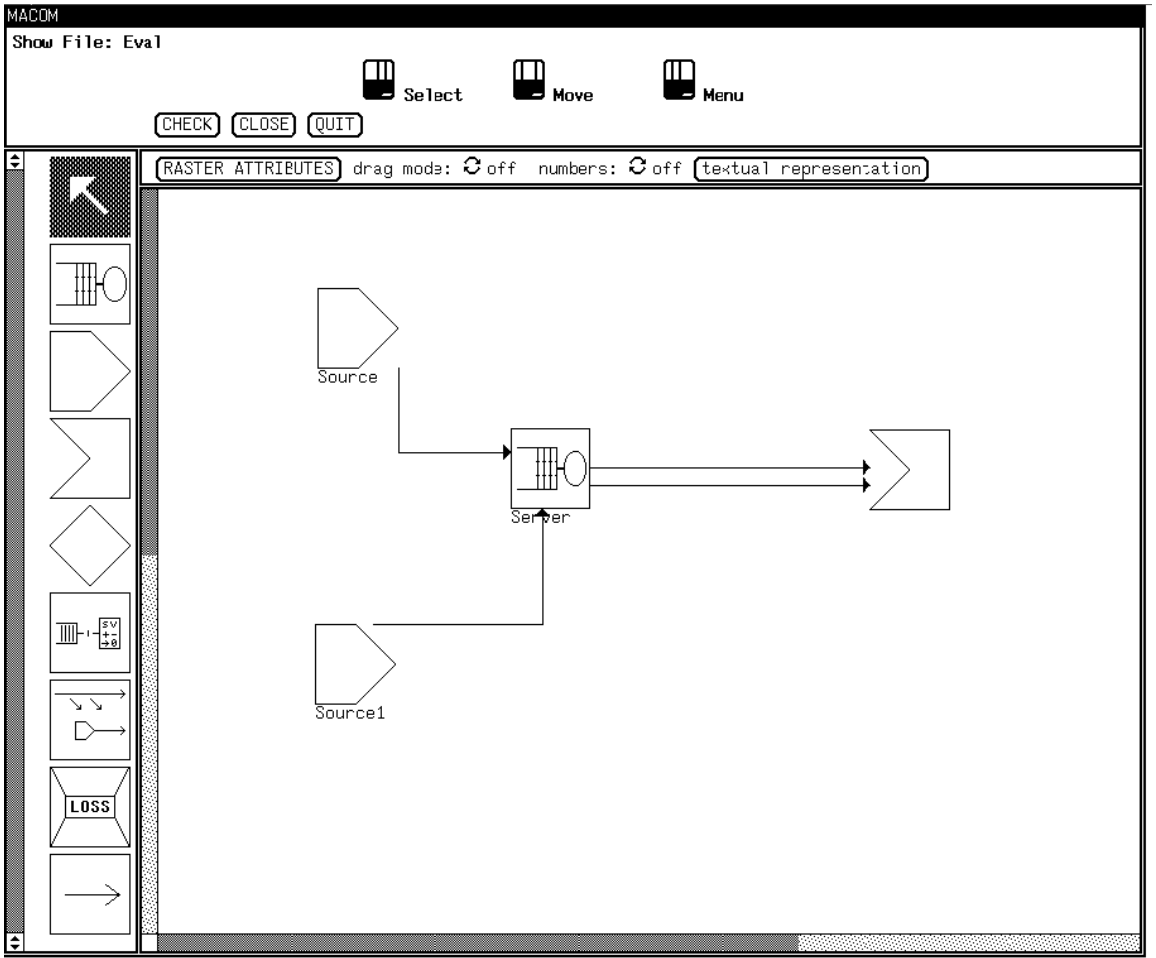
Ebben a részben szeretnénk bemutatni az eszköz használatát a következő rendszer esetében.

- **Beérkezési folyamat**
  Kétfajta igényünk van, amelyek egyesével, egymástól független Poisson-folyamat szerint érkeznek a kiszolgáló egységhez, 2 ill. 3 átlagos beérkezési intenzitással, ahol belőlük egyidejűleg maximum 10 ill. 15 egyed lehet. A 9. ill. 10. ábrán láthatók az egyes jellemzők (Source ill. Source1 azonosítókkal).

- **Relatív prioritásos kiszolgálási folyamat**
  A kiszolgáló egységnél maximum 32 igény tartózkodhat, a Source azonosítójú igényeknek relatív prioritásuk van a Source1-beliekkel szemben, ezt mutatják a 32760 ill. a 32 prioritási indexek. Az igények kiszolgálási ideje exponenciális eloszlást követ 1.5 ill. 1 várható értékkel. Ezeket a részleteket a 11. ill. 12. ábrán láthatjuk.

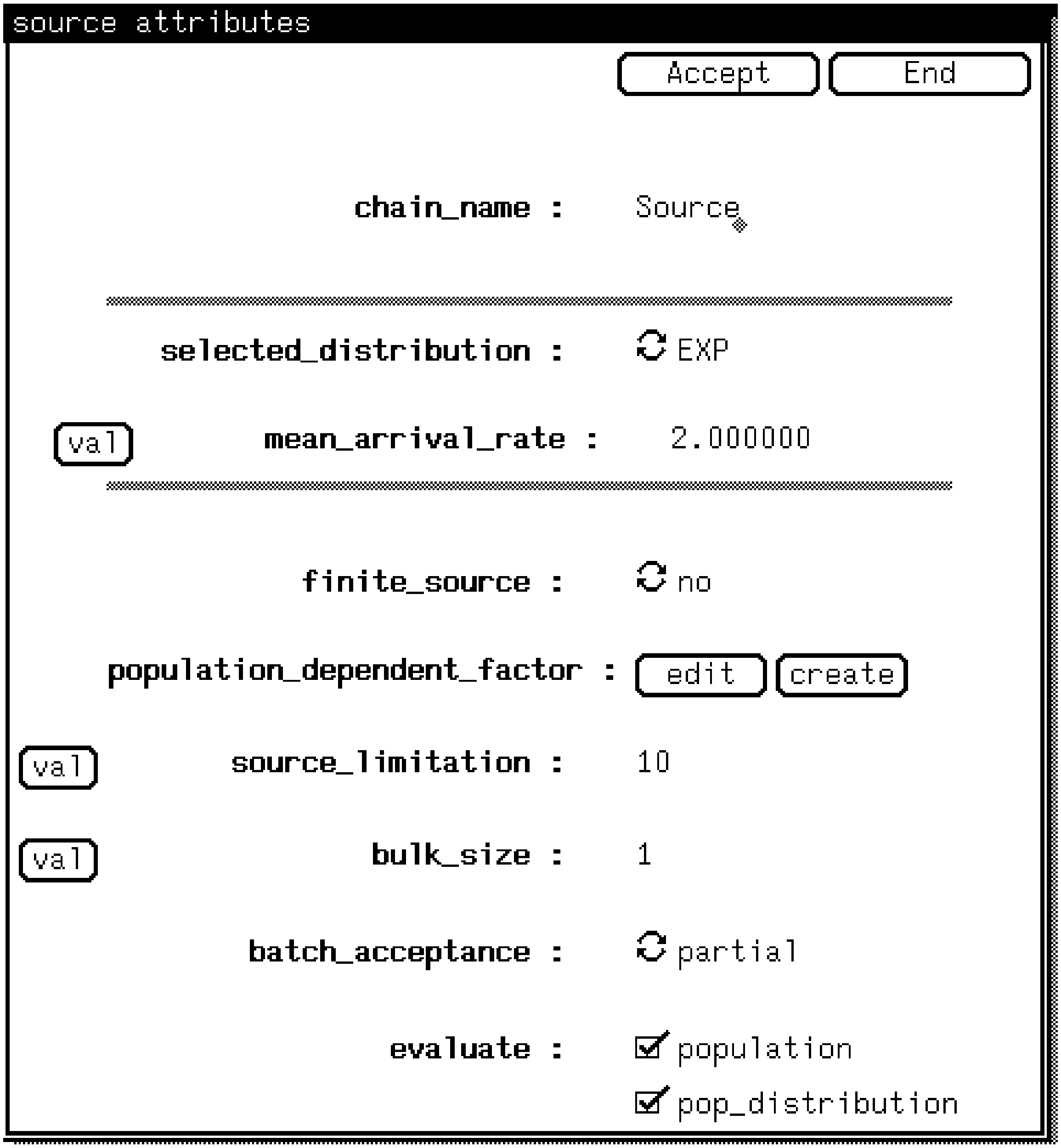
- **Rendszerjellemzők**
  A kívánt jellemzőket, melyek jelen esetben az *igények számának várható értéke, szórásnégyzete, szórása, relatív szórása, valamint a kihasználtságok*, a Grassmann-módszerrel megkapott stacionárius valószínűségekből nyerhetjük, mégpedig külön-külön az egyes forrásokra ill. az összesített igényfolyamatra. A program ezeket egy file-ba írja, melyet az alábbiakban megtekinthetünk.

A rendszer modellje



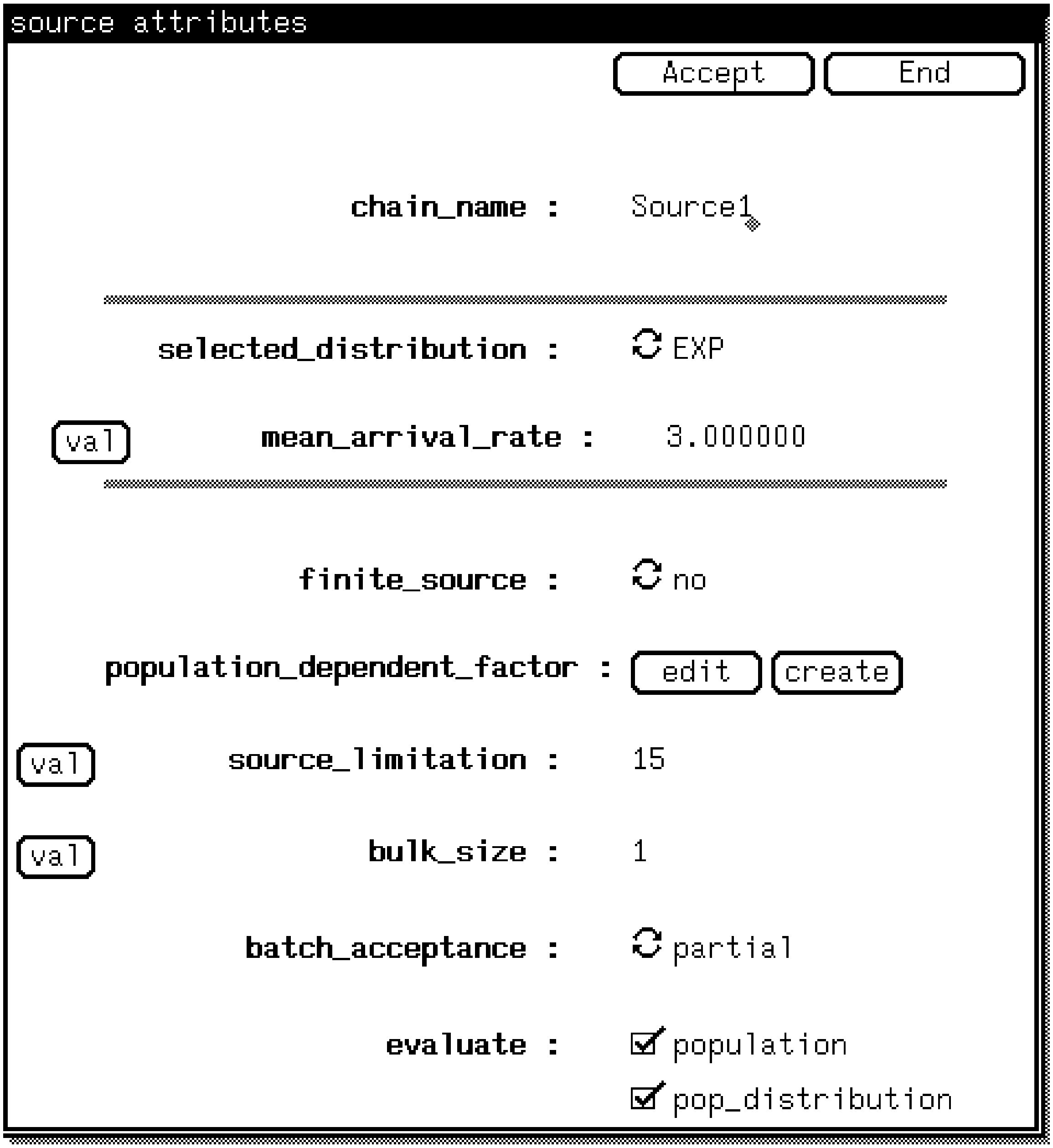
8. ábra

Egyik beérkezési folyamat



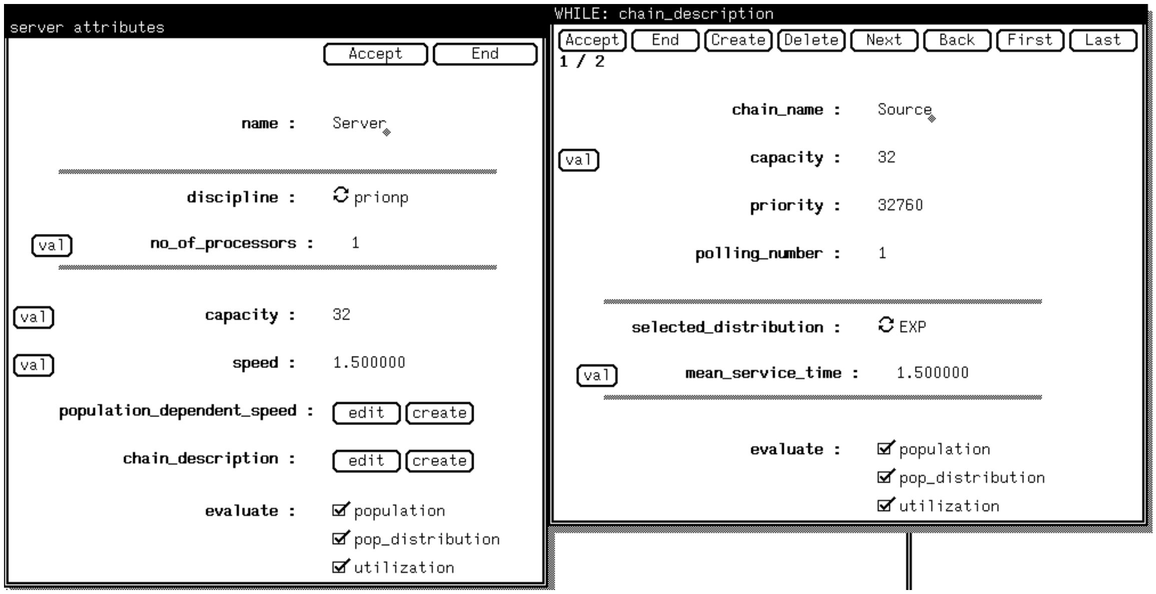
9. ábra

Másik beérkezési folyamat



10. ábra

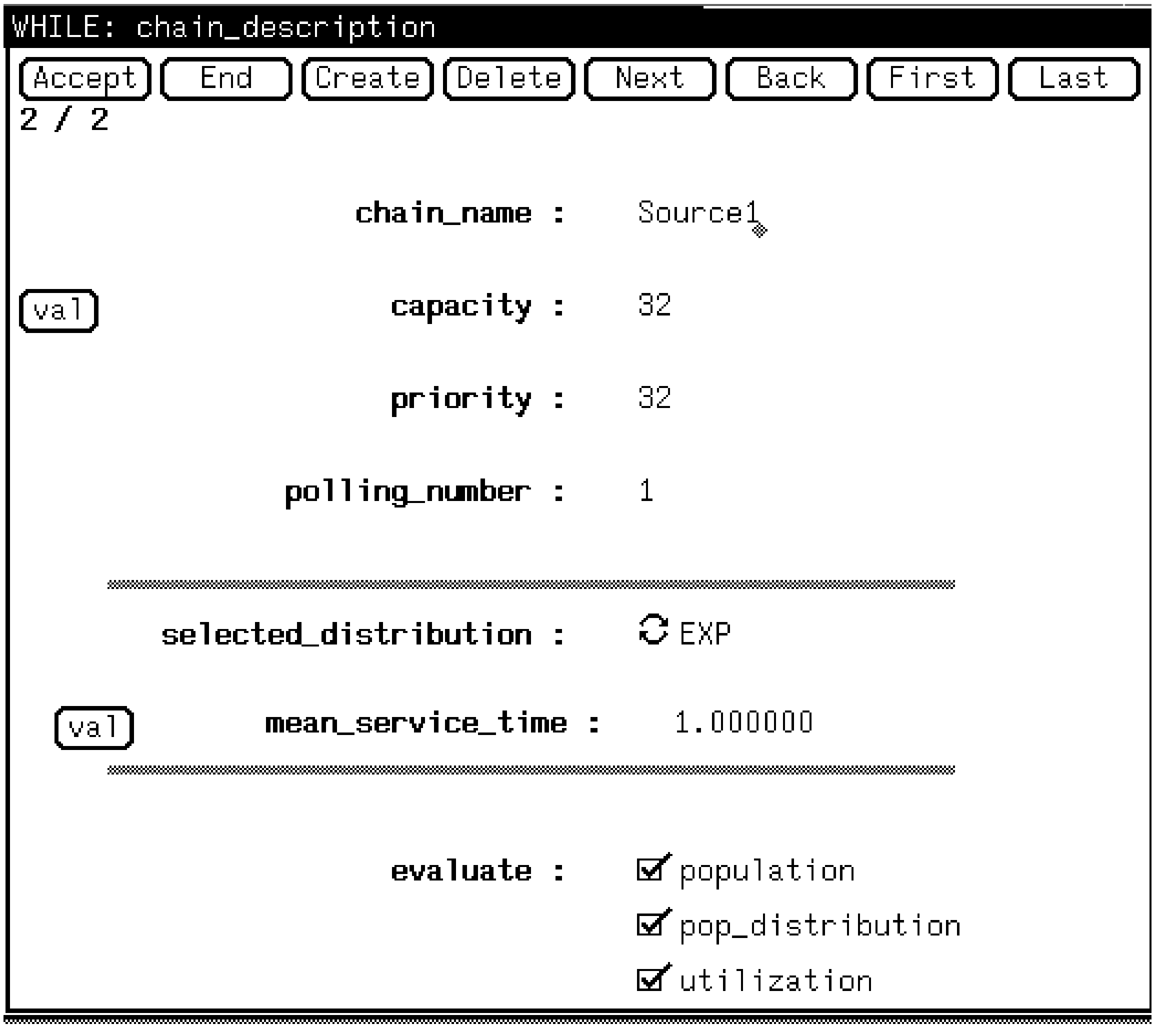
Egyik kiszolgálási folyamat



11. ábra

Az egymás mellé helyezett ábrákból látható, hogy a bal oldali a teljes rendszerre vonatkozik, míg a jobb oldali a Source azonosítójú igényekre. A kipipált négyzetekkel adjuk meg mely rendszerjellemzőket akarjuk meghatározni.

A másik kiszolgálási folyamat



12. ábra

A rendszerjellemzők listája

```
MODEL               Exp.mod

USED METHOD         GRASSMANN

Measure : Source1_at_station_Server
-----------------------------------
+-----------+-----------+
| Estimator |  Popul.   |
+-----------+-----------+
| Mean      | 1.400e+01 |
| Var.      | 1.993e+00 |
| Stdev.    | 1.412e+00 |
| CV        | 1.008e-01 |
+-----------+-----------+

+-----------+------------------------------------+
| Estimator |       Range          |  Probability |
+-----------+------------------------------------+
| Frequency |    0           1       9.53710e-06 |
|           |    1           2       2.62270e-05 |
|           |    2           3       5.78187e-05 |
|           |    3           4       1.19661e-04 |
|           |    4           5       2.42339e-04 |
|           |    5           6       4.86942e-04 |
|           |    6           7       9.75581e-04 |
|           |    7           8       1.95243e-03 |
|           |    8           9       3.90582e-03 |
|           |    9          10       7.81236e-03 |
|           |   10          11       1.56253e-02 |
|           |   11          12       3.12509e-02 |
|           |   12          13       6.25022e-02 |
|           |   13          14       1.25005e-01 |
|           |   14          15       2.50009e-01 |
|           |   15          16       5.00019e-01 |
+-----------+------------------------------------+
```

```
Measure : Source1_at_station_Server
-----------------------------------
+-----------+----------+
| Estimator |  Util.   |
+-----------+----------+
| Mean      | 1.000e+00 |
| Var.      | 3.815e-05 |
| Stdev.    | 6.176e-03 |
| CV        | 6.177e-03 |
+-----------+----------+

Measure : Source_at_station_Server
----------------------------------
+-----------+----------+
| Estimator |  Popul.  |
+-----------+----------+
| Mean      | 1.000e+01 |
| Var.      | 2.960e-05 |
| Stdev.    | 5.440e-03 |
| CV        | 5.440e-04 |
+-----------+----------+
+-----------+-----------------------------------+
| Estimator |        Range        | Probability |
+-----------+-----------------------------------+
| Frequency |   0            1     7.29631e-12 |
|           |   1            2     3.56280e-11 |
|           |   2            3     1.68489e-10 |
|           |   3            4     7.94234e-10 |
|           |   4            5     3.74271e-09 |
|           |   5            6     1.76365e-08 |
|           |   6            7     8.31068e-08 |
|           |   7            8     3.91617e-07 |
|           |   8            9     1.84538e-06 |
|           |   9           10     1.67317e-05 |
|           |  10           11     9.99981e-01 |
+-----------+-----------------------------------+
```

```
Measure : Source_at_station_Server
----------------------------------
+-----------+-----------+
| Estimator |  Util.    |
+-----------+-----------+
| Mean      | 3.815e-05 |
| Var.      | 3.815e-05 |
| Stdev.    | 6.176e-03 |
| CV        | 1.619e+02 |
+-----------+-----------+

Measure : Server
----------------
+-----------+-----------+-----------+
| Estimator |  Popul.   |   Util.   |
+-----------+-----------+-----------+
| Mean      | 2.400e+01 | 1.000e+00 |
| Var.      | 1.994e+00 | 1.995e-12 |
| Stdev.    | 1.412e+00 | 1.412e-06 |
| CV        | 5.883e-02 | 1.412e-06 |
+-----------+-----------+-----------+

+-----------+-----------------------------------+
| Estimator |        Range        | Probability |
+-----------+-----------------------------------+
| Frequency |   0           1      1.99398e-12 |
|           |   1           2      9.07871e-12 |
|           |   2           3      4.25437e-11 |
|           |   3           4      2.00292e-10 |
|           |   4           5      9.43676e-10 |
|           |   5           6      4.44669e-09 |
|           |   6           7      2.09537e-08 |
|           |   7           8      9.87380e-08 |
|           |   8           9      4.65274e-07 |
|           |   9          10      2.19247e-06 |
|           |  10          11      1.01111e-05 |
```

```
|          | 11          12       2.60549e-05 |
|          | 12          13       5.73605e-05 |
|          | 13          14       1.19143e-04 |
|          | 14          15       2.41861e-04 |
|          | 15          16       4.86539e-04 |
|          | 16          17       9.75259e-04 |
|          | 17          18       1.95218e-03 |
|          | 18          19       3.90563e-03 |
|          | 19          20       7.81222e-03 |
|          | 20          21       1.56252e-02 |
|          | 21          22       3.12509e-02 |
|          | 22          23       6.25021e-02 |
|          | 23          24       1.25005e-01 |
|          | 24          25       2.50009e-01 |
|          | 25          26       5.00019e-01 |
+----------+--------------------------------+
```

2.1.4 Irodalomjegyzék

[1] PROF. DR.-ING. H. *Beilner MACOM Benutzerhandbuch Ver. 2.0.01* Universität Dortmund Informatik IV, Januar 1991

[2] R. GOODMAN *Introduction to Stochastic Models* California, Benjamin/Cummings, 1988

[3] L. KLEINROCK *Queueing Systems vol. I-II* New York, Wiley-Interscience, 1975,1976

[4] SZTRIK JÁNOS *Bevezetés a sorbanállási elméletbe és alkalmazásaiba* Debrecen, KLTE egyetemi jegyzet, 1994

2.2 További eszközök

Az alábbiakban megadunk néhány hasznos programnevet és címet, amelyeket érdemes meglátogatni és esetleg kipróbálni.

- A dortmundi egyetemen kifejlesztett programok:
  HIT, MACOM, HiQPN,DSPNexpress
  `http://ls4-www.informatik.uni-dortmund.de/tools.html`

- Az aacheni egyetemen programja:
  SPN2MGM
  `http://www-ls.informatik.rwth-aachen.de/tools/spn2mgm.html`

- Az erlangeni egyetemen kifejlesztett programok:
  PEPSY, MOSEL
  `http://www4.informatik.uni-erlangen.de/Project/PEPSY/`

- A Duke egyetem CACC-Duke kutatóközpontjában elkészített programok:
  SHARPE, SPNP, iSPN, RAFT
  `http://www.ee.duke.edu/ kst/tools.html`

Kedvcsinálás végett nézzünk meg néhány oldalt.

Tools/Software

PE-Tools: Development and Usage

Parallel to our methodological work we continuously developed and used tools for performance evaluation (PE). Their intention is to provide facilities for a model description close to the original system specification and hiding details of the analysis techniques. Such tools map the model specification automatically to an analysable model. The set of tools developed by Informatik IV comprises amongst others

HIT: (Postscript)
: The software tool HIT provides for model-based performance evaluation of computing and communication systems during all phases of their life cycle. Specification of (models of) dynamic, discrete-event, stochastic systems is achieved by particular language- and graphics-based description options. Performance evaluation of accordingly specified models is supported by a variety of techniques of the simulative and analytical types.

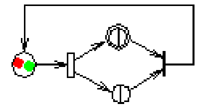
MACOM: (Postscript)
: MACOM (Modelling and Analysis of Communication Systems) is a software tool for model based performance evaluation of (parts of) communication systems. Models are specified by graphical interactive means, model solution is performed by using eithter simulation or numerical techniques for Markovian models. Compared to purely analytic approaches, this approach allows for a considerably enhanced model world. Numerical analysis of stationary behavior is possible for models of sizes up to hundreds of thousands of states, depending on the available hardware.

HiQPN: (Postscript)
: **HiQPN-Tool** supporting the analysis of hierarchical QPN models, a superset of Coloured GSPNs and Queueing Networks. These models can be analysed with respect to qualitative and quantitative aspects.

DSPNexpress
: **DSPNexpress** is a software package for performance and reliability modelling of computer systems with deterministic and stochastic Petri nets (DSPN). DSPNexpress has a user-friendly graphical interface for definition, analysis and graphical animation of DSPNs. The package has been called DSPNexpress because this software package solves complex DSPNs with four orders of magnitude less CPU time than other packages previously introduced.

All tools provide a graphical user interface and are available for usual type of workstations. s, research institutes and industry.

Queueing Petri Nets (QPNs)



System analysis is often needed with respect to both qualitative and quantitative aspects. In the last decades, several formalisms have been developed that attempt to combine these aspects in one description. Present emphasis is on Stochastic Petri Nets. Amongst others, one disadvantage of these formalisms lies with the difficulties when describing scheduling strategies with Petri Net elements.

Queueing Petri Nets (QPNs), which combines Queueing Networks and Petri Nets, aims at eliminating these disadvantages. QPNs are a superset of Coloured GSPNs also integrating queues into places.

The complexity of a quantitative analysis is significantly reduced if the QPN has a hierarchical structure, which recently led to an extension of the model formalism towards Hierarchically Combined Queueing Petri Nets (HQPNs).

- QPNs (A short introduction)
- QPNs
- Hierarchically Combined QPNs (HQPNs; a superset of QPNs)
- QPN-Tool:
    - Version 1.0
    - Version 2.0 supporting HQPNs
        - Special features
    - X-WINDOW VERSION FOR DOWNLOADING: (for Sun-OS 5.5.x / Solaris 2)
      Readme-File
      Licence Agreement
      Tool-Installation-File (2.8MB)
- Abstract Petri Net Notation (APNN)(A model interchange format for Petri Nets; 324KB PS-File)
- Bibliography

SPN2MGM

SPN2MGM is a tool for specifying stochastic Petri Nets of which the underlying Markov chain can be solved using matrix-geometric methods.

Features

- Model specification
  - Easy model creation using an expressive variant of GSPNs.
  - Specification of performance measures of interest at the Petri-net level using reward functions.
  - Easy evaluation of parameterized models.
  - Graphical user interface for Petri net specification based on the agnes editor.
- Model evaluation
  - Implementation of several matrix-geometric solution algorithms (including the logarithmic reduction algorithm by Latouche and Ramaswami and Naoumov’s method).
  - Efficient numerical implementation using high-performance linear algebra subroutines.
  - Graphical user interface for parameter control (in addition to a command-line interface).

Public access

We offer an email-based access method to a trial version of SPN2MGM, so you can easily try it without installing the whole package at your site. If you send us an email containing a model specification, the model will be evaluated automatically, and the evaluation results will be sent back to you immediately. Please refer to our short manual for further information on this.

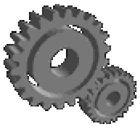
Two simple ready-to-send examples are also available.

A. Ost, 29 Jan 1998

Homepage

Center for Advanced Computing and Communication

Duke University



Tools developed by CACC-Duke

Tool development has always been an important part of the research efforts of the group. It is a means of making the theories and techniques the group develops available to the rest of the world!

TOOL AVAILABLE:

- **SHARPE** - Symbolic Hierarchical Reliability and Performance Evaluator
- **SPNP** - Stochastic Petri Net Package
- **iSPN** - Integrated environment for modeling using SPNs
- **RAFT** - Reliability Analyzer using Fault Trees

TOOLS UNDER DEVELOPMENT:

- **SREPT** - Software Reliability Estimation and Prediction Tool

Comments: *Srinivasan Ramani*
Last modified: Dec 16, 1998

3. Irodalomjegyzékek

Mint a bevezetésben említettük a sorbanállási elméletben használatos módszerek hatékonyan alkalmazhatók más területeken is. Mindenfajta kutatás és oktatás elképzelhetetlen jól felszerelt könyvtárak nélkül. Elengedhetetlenül szükségünk van könyvekre és természetesen folyóiratokra.

Az alábbiakban megadjuk a KLTE Matematikai és Informatikai Intézet könyvtárában található idetartozó könyvek. Ezt azért tesszük, mert nem biztos, hogy minden olvasó használhatja az internetet. Természetesen ezek az információk megszerezhetők a KLTE Könyvtár lekérdező rendszerével is: `http://www.lib.klte.hu`

3.1 Sorbanállási elmélet

[1] Edited by A. B. Clarke Mathematical methods in queueing theory: proceedings of a conference at Western Michigan University, May 10-12, 1973 *Berlin; New York: Springer-Verlag, 1974*

[2] Wolf-Dieter Heller, Henner Lindenberg, Manfred Nuske ... [et al.]. Stochastische Systeme: Markoffketten, stochast. Prozesse, Warteschlangen *Berlin; New York: De Gruyter, 1978*

[3] by P. Franken ... [et al.] Queues and point processes *Berlin: Akademie-Verlag, 1981*

[4] ed. O. Gadó et al.] The domino corporate default or companies queueing: Disorders in the Hungarian system of finances *Bp.: Perfekt, 1991*

[5] ed. by F.P. Kelly, S. Zachary, I. Ziedins Stochastic networks: Theory and applications *Oxford: Clarendon Press, 1996*

[6] ed. by J. W. Cohen, Charles D. Pack Queueing, performance and control in ATM: ITC-13 workshops: proceedings of the Thirteenth International Teletraffic Congress, Coppenhagen, Denmark, June 19-26, 1991 *Amsterdam; London: North-Holland, 1991*

[7] ed. by P. Bártfai, J. Tomkó Point processes and queuing problems *Amsterdam; New York: North-Holland Pub. Co.; Budapest: János Bolyai Mathematical Society, 1981*

[8] ED. BY U. NARAYAN BHAT, ISHWAR V. BASAWA Queueing and related models *Oxford: Clarendon, 1992*

[9] EDITED BY G. LOUCHARD AND G. LATOUCHE Probability theory and computer science *London; New York: Academic Press, 1983*

[10] EDITED BY JEWGENI H. DSHALALOW Advances in queueing: theory, methods, and open problems *Boca Raton, FL: CRC Press, c1995*

[11] EDITED BY JEWGENI H. DSHALALOW Frontiers in queueing: models and applications in science and engineering *Boca Raton, Fla.: CRC Press, 1996*

[12] ALLEN, ARNOLD O. *Probability, statistics, and queueing theory: with computer science applications* New York: Academic Press, 1978

[13] BENES, VÁCLAV E. *General stochastic processes in the theory of queues* Reading, Mass.: Palo Alto: London: Addison-Wesley, cop. 1963

[14] BRÉMAUD, PIERRE *Point processes and queues, martingale dynamics* New York: Springer-Verlag, c1981

[15] BRUELL, STEVEN C. *Computational algorithms for closed queueing networks* New York: North Holland, 1980

[16] BRUNEEL, HERWIG *Discrete-time models for communication systems including ATM* Boston: Kluwer Academic Publishers, c1993

[17] BUNDAY, BRIAN DESMOND *Basic queueing theory* London; Baltimore, MD, USA: E. Arnold, 1986

[18] COHEN, JACOB WILLEM *On regenerative processes in queueing theory* Berlin; New York: Springer-Verlag, 1976

[19] COHEN, JACOB WILLEM *Boundary value problems in queueing system analysis* Amsterdam; New York: North-Holland Pub. Co.; New York, N.Y.: Sole distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier Science Pub. Co., 1983

[20] COHEN, JACOB WILLEM *The single server queue* Amsterdam: North-Holland Pub. Co., 1969

[21] COHEN, JACOB WILLEM *The single server queue* Amsterdam; London: North-Holland, 1982

[22] COHEN, JACOB WILLEM *The single server queue* Amsterdam; London: North-Holland, 1992

[23] COOPER, ROBERT B. *Introduction to queueing theory* New York: MacMillan; London: Collier-Macmillan, 1985

[24] COOPER, ROBERT B. *Introduction to queueing theory* Washington: CEEPress Books, 1990

[25] COURTOIS, PIERRE JACQUES (1937-) *Decomposability: queueing and computer system applications* New York: Academic Press, 1977

[26] COX, DAVID ROXBEE *Teori oceredej* Moszkva: MIR, 1966

[27] DAIGLE, JOHN N. *Queuing theory for telecommunications* Reading [Mass.]: Addison-Wesley Publ. Co., [1992]

[28] DISNEY, RALPH L. (1928-) *Traffic processes in queueing networks: A Markov renewal approach* Baltimore: The John Nopkins Univ. Press, 1987

[29] DOORN, ERIK VAN *Stochastic monotonicity and queueing applications of birth-death processes* New York: Springer-Verlag, c1981

[30] EVERLING, WOLFGANG *Exercises in computer systems analysis* Berlin; New York: Springer-Verlag, 1972

[31] FALIN, GUENNADI I. *Retrial queues* London; New York, NY: Chapman & Hall, 1997

[32] GELENBE, EROL (1945-) *Introduction to queueing networks* Chichester; New York: Wiley, 1987

[33] GELENBE, EROL (1945-) *Analysis and synthesis of computer systems* London; New York: Academic Press, 1980

[34] GHOSAL, A. *Some aspects of queueing and storage systems* Berlin; New York; Springer-Verlag, 1970

[35] GNEDENKO, BORIS VLADIMIROVIC (1912-) *Vvedenie v teoriiu massovogo obsluzhivaniia* Moskva: "Nauka," Glav. red. fiziko-matematicheskoi lit-ry, 1987

[36] GROSS, DONALD *Fundamentals of queueing theory* New York: Wiley, 1985

[37] GYŐRFI LÁSZLÓ *Tömegkiszolgálás informatikai rendszerekben* [Budapest]: Műegyetemi Kiadó, 1996

[38] HAVERKORT, BOUDEWIJN R. *Performance of computer communication systems: a model-based approach* Chichester; New York: J. Wiley, 1998

[39] HILLIER, FREDERICK S. *Queueing tables and graphs* New York: North Holland, 1981

[40] Iglehart, Donald L. (1933-) *Regenerative simulation of response times in networks of queues* Berlin; New York: Springer-Verlag, 1980

[41] Jaiswal, N. K. *Priority queues [by] N. K. Jaiswal* New York: Academic Press, 1968

[42] Kintcin, A. Y. *Mathematical methods in the theory of queueing* New York: Hafner, 1969

[43] Kleinrock, Leonard *Sorbanállás, kiszolgálás: Bevezetés a tömegkiszolgálási rendszerek elméletébe* Budapest: Műszaki Kvk., 1979-

[44] Kleinrock, Leonard *Queueing systems* New York: John Wiley, [1976]-

[45] Lee, Alec M. *Applied queueing theory* London; Melbourne; Toronto: MacMillan, 1966

[46] Medhi, Jyotiprasad *Stochastic models in queueing theory* Boston: Acadademic Pr.: Harcourt Brace Jovanovich, Publ., 1991

[47] Miskoj, Georgij Konstantinovic *Verotnosti sostoni prioritetnyh sistem v nestacionarnom rezime* Kisinev: Shtiinca, 1979

[48] Nelson, Randolph *Probability, stochastic processes, and queueing theory: the mathematics of computer performance modelling* New York: Springer-Verlag, 1995

[49] Newell, Gordon Frank (1925-) *Applications of queueing theory* London; New York: Chapman and Hall, 1971

[50] Newell, Gordon Frank (1925-) *Applications of queueing theory* London; New York: Chapman and Hall, c1982

[51] Newell, Gordon Frank (1925-) *Approximate stochastic behavior of n-server service systems with large n, [by] G. F. Newell* Berlin: New York: Springer, 1973

[52] Page, Eric *Queueing theory in OR* New York: C. Russak, [1972]

[53] Panico, Joseph A. *Queuing theory: a study of waiting lines for business, economics, and science* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, [1969]

[54] Papadopoulos, H. T. *Queueing theory in manufacturing systems analysis and design* London; New York: Chapman & Hall, 1993

[55] Prabhu, Narahari Umanath (1924-) *Foundations of queueing theory* Boston: Kluwer Academic Publishers, c1997

[56] SAUER, CHARLES H. *Computer systems performance modeling* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, c1981

[57] SEELEN, L. P. (1958-) *Tables for multi-server queues* Amsterdam; New York: North-Holland, 1985

[58] SRIVASTAVA, H. M. *Special functions in queuing theory: and related stochastic processes* New York: Academic Press, 1982

[59] SZTRIK JÁNOS (1953-) *A queueing model for a non-homogeneous terminal system subject to BR992* London: Pergamon, 1993

[60] SZTRIK JÁNOS (1953-) *A queueing model for a terminal system subjecy to breakdowns* London: Pergamon, 1990

[61] SZTRIK JÁNOS (1953-) *A recursive solution of a queueing model for a multi-terminal system subject to breakdowns* [Amsterdam]: Elsevier, 1990

[62] SZTRIK JÁNOS (1953-) *A finite-source queueing model for some manufacturing processes* Budapest: Akadémiai K.; Oxford: Pergamon, 1987

[63] SZTRIK JÁNOS (1953-) *Bevezetés a sorbanállási elméletbe és alkalmazásaiba* Debrecen: Kossuth Lajos Tudományegyetem Természettudományi Kar, 1994

[64] SZTRIK JÁNOS (1953-) *A queueing model for processor-shared multiprogrammed computer systems with controlled services* [S.l.]: [s.n.], 1987

[65] SZTRIK JÁNOS (1953-) *Asymptotic analysis of some controlled finite-source queueing systems* Szeged: József Attila Tudományegyetem, 1989

[66] TAKÁCS LAJOS (1924-) (MATEMATIKUS) *Introduction to the theory of queues* New York: Oxford University Press, 1962

[67] TAKAGI, HIDEAKI *Queuing analysis: a foundation of performance evaluation* Amsterdam; New York: North-Holland, 1991-1993

[68] TILT, BORGE *Solutions manual for Robert B. Cooper's Introduction to queueing theory* New York; Amsterdam; Oxford: North-Holland, 1983

[69] WALRAND, JEAN *An introduction to queueing networks* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, c1988

[70] WALRAND, JEAN *An introduction to queueing networks* New Jersey: Prentice-Hall Internattional, Inc., 1988

[71] WHITE, JOHN A. (1939-) *Analysis of queueing systems* New York: Academic Press, 1975

3.2 Megbízhatóságelmélet

[1] [ED. BY SÁNDOR VÁRSZEGI ET AL.] Diagnosis, reliability and alarm management: An internatinal collection of research reports *Budapest: Magyar Tudományos Akadémia, 1990*

[2] [ORG., PUBL. BY SCIENTIFIC SOCIETY FOR TELECOMMUNICATIONS] Ninth Symposium on Quality and Reliability in Electronics: Relectronic '95:16th -18th October, 1995 Budapest:proceedings *[Budapest]: HTE, [1995]*

[3] EDITED BY DOUGLAS J. DEPRIEST, ROBERT L. LAUNER Reliability in the acquisitions process *New York: M. Dekker, c1983*

[4] EDITED BY G. DESMET Reliability of radioactive transfer models *London; New York: Elsevier Applied Science; New York, NY, USA: Sole distributor in the USA and Canada, Elsevier Science Pub. Co., c1988*

[5] EDITED BY M.H. WALTER AND R.F. COX Safety and reliability in the 90s: will past experience or prediction meet our needs? *London; New York: Elsevier Applied Science; New York, NY, USA: Sole distributor in the USA and Canada, Elsevier Science Pub. Co., 1990*

[6] EDITED BY P.R. KRISHNAIAH, C.R. RAO Quality control and reliability *Amsterdam; New York: North-Holland; New York, N.Y., U.S.A.: Sole distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier Science Pub. Co., c1988*

[7] EDITED BY PETER COMER. 11th Advances in Reliability Technology Symposium *London; New York: Elsevier Applied Science, 1990.*

[8] FRED ROBERTS, FRANK HWANG, CLYDE MONMA, EDITORS Reliability of computer and communication networks: proceedings of a DIMACS Workshop, December 2-4, 1989 *Providence, R.I.: American Mathematical Society: Association for Computing Machinery, 1991*

[9] GENERAL ED. C. R. RAO Handbook of statistics *Amsterdam [etc.]: Elsevier, 1988-*

[10] International Atomic Energy Agency Evaluating the reliability of predictions made using environmental transfer models *Vienna: IAEA, 1989*

[11] közread. Hiradástechnikai Tudományos Egyesület] 8th Symposium on Reliability in Electronics: August, 26-30, 1991, Budapest: Proceedings *Budapest: Hiradástechnikai Tud. Egy.,*

[12] közread.] Hiradástechnikai Tudományos Egyesület 7th Symposium on Reliability in Electronics: August, 29 - September, 2, 1988, Budapest: Proceedings *Budapest: HTE, 1988*

[13] Org. the Institute for Precision Mechanics and Optics the Institute for Communications Electronics the International Centre for Engineering Programs Proceedings of the advanced studies on reliability engineering: Summer course at the Technical University of Budapest 3-7 september 1990 *Bp.: Műszaki Egyetem, 1990*

[14] Sergio Bittanti Software reliability: Modelling and identification *Berlin: Heidelberg [etc.]; Springer, 1988*

[15] Barlow, Richard E. *Statistieska teori nadenosti i ispytani na bezotkaznost'* Moskva: Nauka, 1984

[16] Birolini, Alessandro (1940-) *On the use of stochastic processes in modeling reliability problems* Berlin; New York: Springer-Verlag, 1985

[17] Bunday, Brian Desmond *Statistical methods in reliability theory and practice* New York [etc.]: Ellis Horwood, 1991

[18] Deme, S. *Reliability of real-time computing with radiation data feedback at accidental release* Bp.: KFKI, 1989

[19] Gercbah, Il'a Boruhovic *Statistical reliability theory* New York: M. Dekker, c1989

[20] Gnedenko, Boris Vladimirovic (1912-) *Mathematical methods of reliability theory* New York: Academic Press, 1969

[21] Henley, Ernest J. *Graph theory in modern engineering: computer aided design, control, optimization, reliability analysis* New York: Academic Press, 1973

[22] Kovalenko, Igor' Nikolaevic *Mathematical theory of reliability of time dependent systems with practical applications* Chichester; New York: Wiley, 1997

[23] Kozlov, Boris Anatol'evic *Reliability handbook* New York: Holt, Rinehart and Winston, [c1970]

[24] Musa, John D. *Software reliability: measurement, prediction, application* New York [etc.]: McGraw-Hill, 1987

[25] Osaki, Shunji *Reliability evaluation of some fault-tolerant computer architectures* Berlin; New York: Springer-Verlag, 1980

[26] Ravinchandran, N. *Stochastic methods in reliability theory* New York: Wiley, 1990

[27] Szalavetz Andrea *The reliability of hard indicators for measuring restructuring performance* Budapest: Institute for World Economics Hungarian Academy of Sciences, 1997 ([Budapest]: [MTA VKI])

[28] Sztrik János (1953-) *Reliability analysis of a complex renewable system with fast repair* [S.l.]: [s.n.], 1989

[29] Sztrik János (1953-) *Asymptotic reliability analysis of some complex systems with repair operating in random environments* [S.l.]: [s.n.], 1989

[30] Sztrik János (1953-) *Reliability of heterogeneous stand, by systems in Markovian enviroment* Budapest: Akadémiai K.; Oxford: Pergamon Pr., 1987

[31] Trivedi, Kishor Shridharbhai (1946-) *Probability and statistics with reliability, queuing, and computer scence applications* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1982

[32] Xie, M. *Software reliability modelling* Singapore; River Edge [New Yersey]: World Scientific, 1991

[33] Zacks, Shelemyahu (1932-) *Introduction to reliability analysis: Probability models and statistical methods* New York [etc.]: Springer Verl., 1992

3.3 Számítógéprendszerek hatékonysági vizsgálatai

[1] ed. by Francesca Cesarini and Silvio Salza Database machine performance: Modeling methodologies and evaluation strategies *Berlin [etc.]: Springer Verl., 1987*

[2] ed. by Gianfranco Balbo, Giuseppe Serazzi Computer performance evaluation: Modelling techniques and tools: Proceedings of the fith international conference on modelling techniques and tools ... *Amsterdam; New York: Elsevier, 1992*

[3] ED. BY H. PERROS, G. PUJOLLE, T. TAKAHASHI Modelling and performance evaluation of ATM technology: Proceedings of the IFIP TC6 Task Group/WG6.4 International Workshop on Performance of Communication Systems, Martinique, French Caribbean Islands, January 25-27, 1993 *Amsterdam; London: North-Holland, 1993*

[4] EDITED BY K. MANI CHANDY AND MARTIN REISER Computer performance: proceedings of the International Symposium on Computer Performance Modeling, Measurement, and Evaluation, IBM Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights, New York, August 16-18, 1977 *Amsterdam; New York: North-Holland Pub. Co.; New York: distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier/North Holland, 1977*

[5] EDITED BY LLOYD D. FOSDICK. Performance evaluation of numerical software: proceedings of the IFIP TC 2.5 Working Conference on Performance Evaluation of Numerical Software *Amsterdam; New York: North-Holland Pub. Co.; New York: sole distributors for the U.S.A. and Canada, Elsevier North-Holland, 1979*

[6] EDS. GÜNTER HARING, GABRIELE KOTSIS Computer performance evaluation: modelling techniques and tools: 7th international conference, Vienna, Austria, May 3-6, 1994: proceedings *Berlin [etc.]: Springer, c1994.*

[7] FERRARI, DOMENICO *Ocenka proizvoditel'nosti vyislitel'nyh sistem* Moskva: Mir, 1981

[8] KANT, KRISHNA *Introduction to computer system performance evaluation* New York: McGraw-Hill, 1992

[9] KOBAYASHI, HISASHI *Modeling and analysis: an introduction to system performance evaluation methodology* Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co., c1978

[10] KUKI ATTILA *Modern információtechnológiai eszközök hatékonysági vizsgálata (performance evaluation)* 1995

[11] SVOBODOVA, LIBA *Computer performance measurement and evaluation methods: analysis and applications* New York: Elsevier, c1976

[12] TAKAGI, HIDEAKI *Queuing analysis: a foundation of performance evaluation* Amsterdam; New York: North-Holland, 1991-1993

3.4 Fontosabb folyóiratok

Sajnos Magyarországon a legjobb folyóiratok nem találhatók. A cikkek figyelését pl. az elektronikus tartalomjegyzékkel végezhetjük. Ez akkor kivitelezhető, ha tudjuk, hogy melyik kiadó jelenteti meg a cikket. Felkeressük a honlapját, kikeressük az érintett folyóiratot, majd a szerzőtől e-mail-en kérünk különlenyomatot, ha tudjuk a címet. Ha nem, akkor az internet keresőrendszerével megpróbáljuk megtalálni. Ha szerencsénk van, akkor megy az eljárás, ha nem, akkor valamelyik külföldi ismerősünket megkérjük, hogy szerezzen másolatot. Természetesen a kicsit hosszadalmasabb könyvtárközi kéréssel is beszerezhetjük az anyagot.

Az alábbi folyóiratok kimondottan a sorbanállási elmélettel és alkalmazásaival foglalkoznak. Azonban nagyon sok más periodikát találhatunk, amelyben sok ezzel kapcsolatos cikk jelenik meg, pl. operációkutatás, telekommunikáció, sztochasztikus folyamatok, számítógéprendszerek, megbízhatóságelmélet, stb. Ezekre most részletesen nem térünk ki. Megkereshetők a később közölt címeknél.

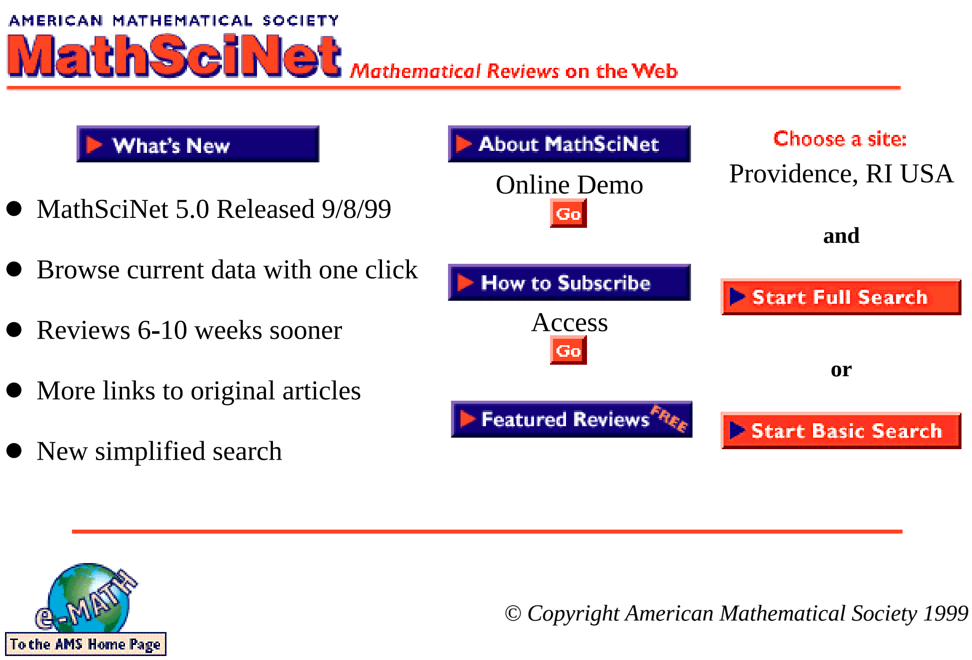
- Advances in Performance Analysis
  `http://www.curium.com/notable/`
- Stochastic Models
  `http://www.dekker.com/`
- Performance Evaluation
  `http://www.elsevier.nl:80/inca/publications/`
- Queueing Systems
  `http://www.baltzer.nl/questa/questa.html`

4. Hasznos információ források

Ebben a fejezetben a kutatással kapcsolatos legfontosabb címeket adjuk meg.

4.1 Referáló folyóiratok

- Zentralblatt MATH Database
  `http://www.emis.de/ZMATH/`
- MathSciNet
  `http://www.ams.org/mathscinet`



Zentralblatt MATH Database

The database is edited by **European Mathematical Society**, the **FIZ Karlsruhe**, and the **Heidelberg Academy of Sciences**. It is established in cooperation with **Math Doc Cell (France).**
Several European **Editorial Units** cooperate with the Editorial Office in Berlin.

Standard Query Form | Advanced Query Form | Free Query Form (command language)

International access is possible to following servers:

- Berlin (this is your current server)
- Strasbourg
- New York
- Lecce, Italy

Additional server sites are currently under consideration:
Berkeley (USA), IMPA (Brazil), Göttingen (Germany), Santiago de Compostela (Spain), Cornell Univ. (USA), Rehovot/Weizmann Inst. (Israel)

Further information is available for:

Software Subscription Reviewers Serials MSC 1991 MSC 2000 News and Discussion

Zentralblatt MATH is published by Springer-Verlag

4.2 Fontosabb adatbázisok

- Institute for Scientific Information, (Citation Index)
  `http://www.isinet.com`
- Internet információ források matematikusoknak (MAthNet)
  `http://www.math-net.de/`
- Dagstuhl Konferencia Központ
  `http://www.dagstuhl.de/ENG/compScience/Data`
- A Müncheni Műszaki Egyetem
  `http://hpmayr1.informatik.tu-muenchen.de/leabib/bib.html`

4.3 Szakmai társaságok

- Európai Matematikai Társaság (EMIS)
  `http://www.emis.de`
- Amerikai Számítógép Társaság (ACM)
  `http://www.acm.org`
- IEEE Számítógép Társaság (IEEE Computer Society)
  `http://www.computer.org`
- Operációkutatási és Menedzsment Tudományok Intézete (INFORMS)
  `http://www.informs.org`
- Társaságokra utaló címek
  `http://archive.comlab.ox.ac.uk/selection.html`
  `http://www.computer.org/misc/otherwww.htm`

EMIS
The European Mathematical Information Service

offered by the

European Mathematical Society (EMS)

For fastest access: Choose your nearest site.

Europe:
Amsterdam,
Barcelona,
Beograd,
Berlin (master),
Brno,
Budapest,
Dublin,
Göttingen,
Helsinki,
København,
Krakow,
Lisboa,
Madrid,
Marseille,
Moskva,
Osnabrück,
Southampton,
Strasbourg,
Torino,
Warszawa,
Wien,
Zürich

Other:
Adelaide (AU),
Ankara (TR),
Bogotá (CO),
Brasilia (BR),
Córdoba (AR),
Corrientes (AR),
Kyoto (JP),
Lawton, OK (USA),
Mexico City (MX),
Novosibirsk (RU),
Ottawa (CA),
Providence, RI (USA),
Rehovot (IL)
Rio de Janeiro (BR)
Shanghai (CN)

General
- About the EMS
- Activities
- How to join the EMS

Projects
- EULER
- Jahrbuch Project

Members & Organizations
- Member Societies
- Individual Members

Databases
- **MATH** 1931-present
- **MATHDI** 1976-present
- **MPRESS -** preprint index

News & Miscellanea
- News
- Conference Calendar
- Euro-Math-Job
- Other Activities/Links

Electronic Library
- ELibEMS
- Journals
- Proceedings/Collections
- Monographs

ECM3
3rd European Congress of Mathematics
Barcelona
July 10-14, 2000

Contact Addresses

Master server operated by FIZ Karlsruhe / Zentralblatt für Mathematik text

IEEE COMPUTER SOCIETY

The World's Computer Society

The leading provider of technical information and
services to the world's computing professionals

IT Professional
Issue Number 4 is online now!

Stay on top of your profession

Fast Track
Digital Library
Online Catalog
***Computer* Magazine**
Magazines
Transactions
Highlights
Careers

1999 Election
Vote Online (CS Members Only)
IEEE Candidates
Address Key
CS Issues
CS Board Endorses Edward Parrish for IEEE President-Elect

Home
Search
Index
E-Accounts
Copyright
Contacts

Press Room
Advertising Info
Trophy Case

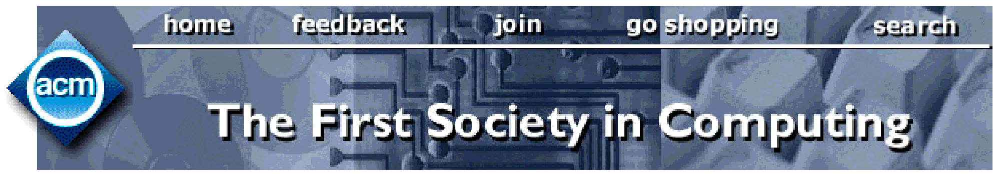
- **Conferences**
- **Education**
- **Standards**
- **Technical Activities**
- **Students**
- **Membership**
- **Subscriptions**
- **Volunteer Leaders**
- **Volunteer Directory**
- **Society Calendar**
- **Chapters**
- **Awards**
- **CEEIC**
- **Constitution/Bylaws**
- **Staff Organization**
- **Author Info.**
- **Library Info.**
- **Society History**
- **History of Computing**
- **Links**
- **FAQs**

Direct access to Computer Society periodicals:

Select:
IEEE Computer Society Magazines . . . Go

Select:
IEEE Transactions on . . .Go

Upgrade your browser for better colors and layout.



- **Membership**
  - Professionals
  - Students
- **Publications**
- **Digital Library**
- **Special Interest Groups (SIGS)**
- **Conferences**
- **Education**
- **Chapters**
- **Public Policy**
- **Press Room**
- **Awards**
- **Institutions and Libraries**
- **About ACM**

Association for Computing Machinery

Founded in 1947, ACM is the world's first educational and scientific computing society. Today, our members - over 80,000 computing professionals and students world-wide - and the public turn to ACM for authoritative publications, pioneering conferences, and visionary leadership for the new millennium.

Wednesday, September 29, 1999

What's New!

Announcing a new publication: *Intellectual Property in the Age of Universal Access*

International Collegiate Programming Contest

Call for **ACM General Election Nominations**

Announcing the new K-12 Task Force

ACM Position on Software Engineering Licensing

Conferences: [Registration in e-store] [listings in Conference Calendar]

Funding Opportunities:
[Database] [Email Notification]

Join Now
ACM
SIGs

Purchase
Books
Conference Proceedings

Subscribe to
Digital Library
Journals
Magazines

View
Conference Calendar
[**Search it!**]

Career Opportunities

Advertising rates and information

Manage your acm.org account

Contact ACM

ACM - Association for Computing Machinery || Read the ACM Privacy Policy and Code of Ethics

Questions? Comments? Contact webmaster@acm.org
Call: 1.800.342.6626 (USA and Canada) or +212.626.0500 (Global)
Write: ACM, 1515 Broadway, New York, NY, 10036, USA

4.4 Könyvtárak

Ebben a fejezetben néhány fontos könyvtár címet adunk meg. Természetesen a kiválasztás teljesen szubjektív. Munkám során sok hasznos információt találtam ezeken a helyeken.

- Digital Librarian
  `http://www.servtech.com/m̃vail`
- Berkeley Digital Library
  `http://sunsite.berkeley.edu`
- The WWW Virtual Library
  `http://www.vlib.org`
- JATE Egyetemi Könyvtár (Szeged)
  `http://www.bibl.u-szeged.hu`
- KLTE Egyetemi Könyvtár (Debrecen)
  `http://www.lib.klte.hu`
- BME ILI, Folyóiratfigyelő (Budapest)
  `http://delfin.eik.bme.hu/ili`

The WWW Virtual Library

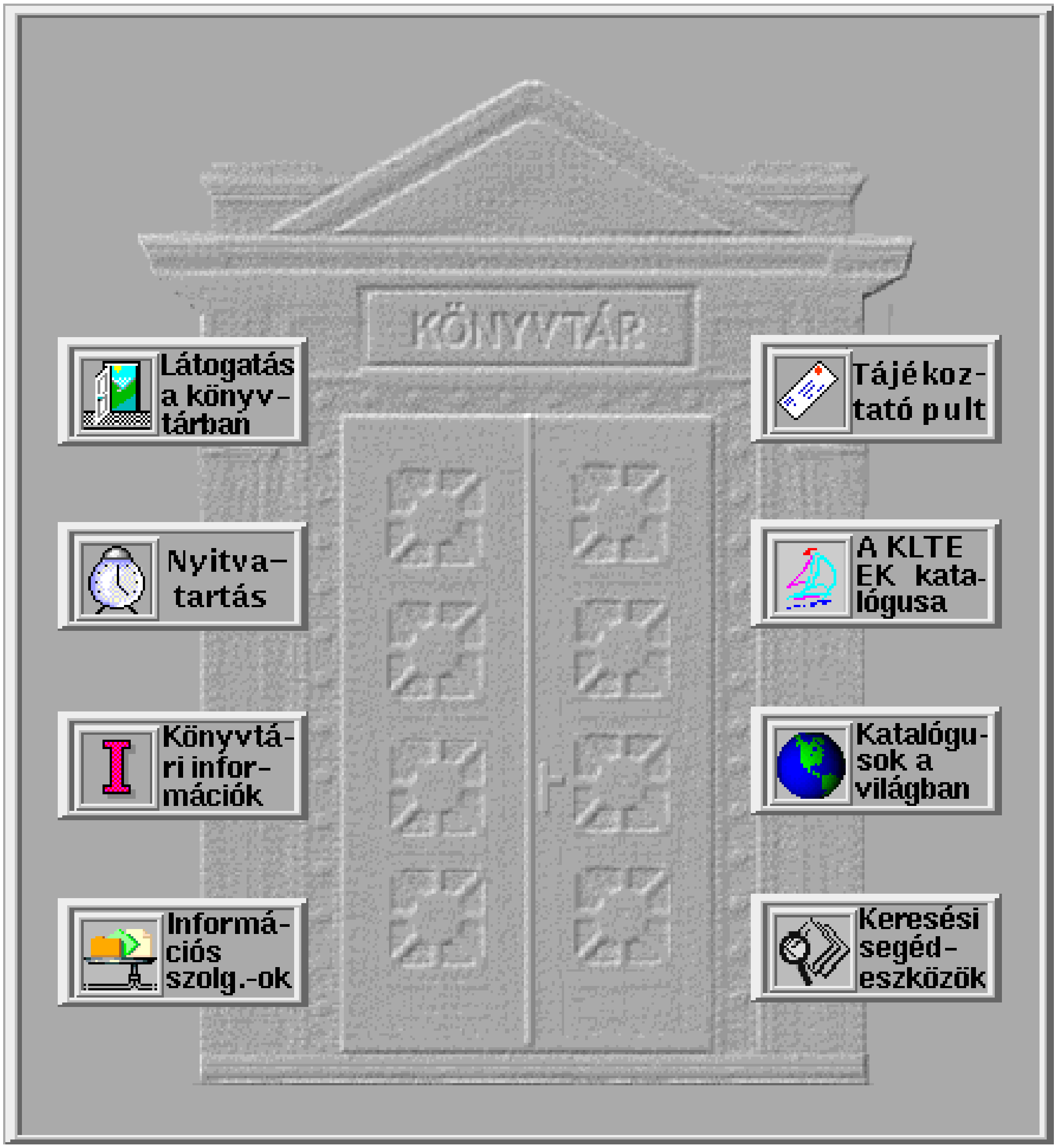
- **Agriculture**
  Agriculture, Beer and Brewing, Gardening...
- **Business and Economics**
  Economics, Finance, Transportation...
- **Computer Science**
  Computing, Languages, Web...
- **Communications and Media**
  Communications, Telecommunications, Journalism...
- **Education**
  Education, Cognitive Science, Libraries, Linguistics...
- **Engineering**
  Civil, Chemical, Electrical, Mechanical, Software...
- **Humanities**
  Anthropology, Art, Dance, History, Museums, Philosophy...
- **Information Management**
  Information Sciences, Knowledge Management...
- **International Affairs**
  International Security, Sustainable Development, UN...
- **Law**
  Law, Environmental Law...
- **Recreation**
  Recreation and Games, Gardening, Sport...
- **Regional Studies**
  Asian, Latin American, West European...
- **Science**
  Biosciences, Health, Earth Science, Physics, Chemistry...
- **Society**
  Political Science, Religion, Social Sciences...

Search the WWW Virtual Library: `sztrik` Search (help)

Match: All Format: Long Sort by: Score

Mirrors: vlib.org (USA), Penn State (USA), East Anglia (UK) Geneva (CH), Geneva-2 (CH), Argentina.

About | Alphabetical Listing | Keyword Search | News


KÖNYVTÁR
Látogatás a könyv-tárban
Tájékoz-tató pult
Nyitva-tartás
A KLTE EK kata-lógusa
Könyvtá-ri infor-mációk
Katalógu-sok a világban
Informá-ciós szolg.-ok
Keresési segéd-eszközök

Online folyóiratok

*****

A több, mint egymillió kötetes Egyetemi Könyvtár már a Szegedi Universitas tényleges megalakulása elõtt évtizedekkel univerzitás-könyvtárként mûködött, hisz "anyaintézményén" túl könyvekkel látta el az összes szegedi felsõoktatási intézmény szinte valamennyi hallgatóját. A mai, mintegy 15.000 beiratkozott olvasó nagyrésze így egyetemi-fõiskolai polgár, illetve szegedi vagy környékbeli lakos, nemritkán egykori szegedi diák. A mintegy 50 fõs szakembergárda és a csaknem 20 fõs kisegítõ személyzet tehát nagyon kiterjedt tudományos és oktatói kör ellátásáról, kiszolgálásáról gondoskodik, s azon igyekszik, hogy az elektronikus hálózatok révén mind tágabb környezetének is hasznos információkat nyújtson.

Általános tudnivalók * Szolgáltatások * Címlisták * Katalógusok * Különgyûjtemények * Nyitólapok
Virtuális kiállítások * Elektronikus könyvtár * Virtuális könyvtár * HTML-segédletek
Amerikai Felsõoktatási Információs Központ
JATE * Universitas * Szeged * Magyarország
Vendéglapok

Integrated Library Information Services

Main screen

- **Reference database (NPA)**
- **Library information (NPA)**
- **Table of contents services (Swetscan)**
- **Full-Text services**
- **Publications**

- **Administration, accounts**
- **Project information,** ***NEWS!!!***
- **System information**

Host: info04.uni-trier.de (D) **User:** Anonymous (guest) **Level:**Guest

Reference Libraries TOC Full-Text Publications Info Help

4.5 Kiadók, terjesztők

- Kiadók
  http://www.comlab.ox.ac.uk/archive/publishers.html
- Terjesztők
  http://www.lights.com/publisher
- A valószínűségszámítással kapcsolatos kiadók
  http://www.maths.uq.oz.au/ pkp/probweb/publishers.html

4.6 Publikációk, folyóiratok

Ebben a fejezetben több címet is megadunk, mert különböző adatbázisok nem ugyanazokat a tételeket tárolják. Remélhetően az alább felsorolt helyeken megtalálja a keresett anyagot.

http://publist.com
http://www.isinet.com
http://www.math.psu.edu/MathLists
http://www.csc.fi/math_topics/Books.html
http://almira.ceremab.u-bordeaux.fr/cgi-bin/periodiques
http://www.informatik.uni-trier.de
http://www.dagstuhl.de/ENG/Bibliothek/Journals
http://elib.cs-sfu.ca/Collections/CMPT/cs-journals

Home
About

Probability links
People
Abstracts
Journals
Search

Jobs
Conferences
Publishers
Books
Booksellers
Software

Listservers
Newsgroups
Miscellaneous

The Probability Web

Publishers

- Academic Press
- Addison Wesley Longman
- Baltzer Science Publishers
- Blackwell Publishers
- Birkhauser Verlag: Boston or Basel
- Cambridge International Science Publishing
- Cambridge University Press
- Chapman & Hall
- CRC Press (Lewis Publishers)
- Duxbury Press
- Elsevier Science (see their Table of Contents Service)
- Institute for Scientific Information (Current Contents and Science Citation Index)
- International Thompson Publishing (Brooks/Cole,Chapman & Hall, Duxbury, Nelson, PWS and Wadsworth)
- John Hopkins University Press
- John Wiley & Sons, Inc.
- Kluwer Academic Publishers
- Macmillian Publishing
- Marcel Dekker
- McGraw-Hill International
- Oxford University Press
- Prentice Hall
- Sage Publications
- Springer-Verlag: Berlin/Heidelberg, New York.
- Wadsworth
- World Scientific Publishing

If you have any information or suggestions for improvement,
please e-mail Phil Pollett at (pkp@maths.uq.edu.au),
or fill in the form provided.

This page last modified: 17th July 1999

Kluwer academic publishers *Online*

- About Kluwer Academic Publishers
- Complete Catalogue
- Journal Homepages
- Author Services
- Electronic Products / Appendices
- Customer Service
- Contact Information
- Online Services
- Kluwer Online
- Kluwer Alert
- What's New
- Job Announcements

Welcome to the Kluwer Academic Publishers Home page. This is your electronic gateway to Kluwer, and we hope you find it useful. It?s free, it?s current, and it?s all available on your computer. Just point and click on the area you wish to review.

Our Web site is regularly updated and new features will be added on an ongoing basis. We hope you?ll bookmark this site to make future visits even easier. Let us know what you think, and thanks for considering Kluwer Academic Publishers for your scientific reference needs.

Kluwer Academic Publishers
P.O. Box 17, 3300 AA Dordrecht, the Netherlands
Phone: (+31) 78 639 23 92 **Fax:** (+31) 78 639 22 54 **E-mail:** Services@wkap.nl

101 Philip Drive, Norwell, MA 02061, U.S.A.
Phone: +1 781 871 6600 **Fax:** +1 781 871 6528 **E-mail:** kluwer@wkap.com

Kluwer Academic Publishers is a member of the Wolters Kluwer company.

PUB LIST

Home | Search | About Us | Help

Welcome to PubList.com, The Internet Directory of PublicationsSM
Search our database of over 150,000 magazines, journals, newsletters, and more...

Publishers

Feature your publications on PubList.com!

Partners

Make your services available on PubList.com!

Browse	**Quick Search** *(enter text from title)*	**Advanced Search**
By publisher, title, or category		Use our powerful search tools to find publications by title, keyword, ISSN, and publisher.
Search tips	Search	

Journal of Combinatorial Chemistry
New ACS journal, covers advances in all aspects of combinatorial chemical research.

Check out PubList.com Profiles for a dynamic interactive experience.

Order subscriptions, articles, back issues, and more!

Email us or join our mailing list by completing our customer feedback form.

Home | Help | About Us | Search | Browse
For Partners | For Publishers | Privacy Policy

5. Összefoglaló táblázatok

5.1 Diszkrét valószínűségi változók

1. Táblázat. Nevezetes diszkrét valószínűségi változók[1]

valószínűségi változó	paraméterek	$p(\cdot)$
Bernoulli	$0 < p < 1$	$p(k) = p^k q^{1-k}$, $k = 0, 1$
binomiális	n, $0 < p < 1$	$p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$
polinomiális	n, r, p_i, k_i, $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$, $\sum_{i=1}^{r} k_i = n$	$p(\overline{k}) = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$, ahol $\overline{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_r)$

[1] $q = 1 - p$.

1. Táblázat. (folytatás)

valószínűségi változó	paraméterek	$p(\cdot)$
hipergeometriai	$N > 0$	$p(k) = \dfrac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$,
	$n, k \geq 0$	$k = 0, 1, \ldots, n$, ahol $k \leq r$ és $n - k \leq N - r$.
polihiper-geometriai	$\sum_{i=1}^{l} r_i = N$	$p(k_1, k_2, \ldots, k_l) = \dfrac{\binom{r_1}{k_1}\binom{r_2}{k_2}\cdots\binom{r_l}{k_l}}{\binom{N}{n}}$, $k_i \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad k_i \leq r_i \quad \forall i$ és $\sum_{i=1}^{l} k_i = n$.
geometriai	$0 < p < 1$	$p(k) = q^k p, \quad k = 0, 1, \ldots.$
Pascal (negatív binomiális)	$0 < p < 1$, r természetes szám	$p(k) = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k$, $k = 0, 1, \cdots$
Poisson	$\alpha > 0$	$p(k) = e^{-\alpha}\dfrac{\alpha^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \cdots$

2. Táblázat. Nevezetes diszkrét valószínűségi változók jellemzői[2]

valószínűségi változó	z-transzformált $g[z]$	$E[X]$	$D^2[X]$
Bernoulli	$q + pz$	p	pq
binomiális	$(q + pz)^n$	np	npq
polinomiális	$(p_1 z_1 + p_2 z_2 + \cdots + p_r z_r)^n$	$E[X_i] = np_i$	$\mathrm{Var}[X_i] = np_i q_i$
hipergeometriai	—	$\frac{nr}{N}$	$\frac{nr(N-r)(N-n)}{N^2(N-1)}$
polihiper-geometriai	—	—	—
geometriai	$\frac{p}{1-qz}$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Pascal (negatív binomiális)	$p^r(1-qz)^{-r}$	$\frac{rq}{p}$	$\frac{rq}{p^2}$
Poisson	$e^{\alpha(z-1)}$	α	α

[2] $q_i = 1 - p_i$.

5.2 Folytonos valószínűségi változók

3. Táblázat. Nevezetes folytonos valószínűségi változók jellemzői

valószínűségi változó	paraméterek	sűrűségfüggvény
egyenletes	$a < b$	$\frac{1}{b-a},\ a \le x \le b, \quad 0$ különben
exponenciális	$\alpha > 0$	$f(x) = \alpha e^{-\alpha x},\ x > 0, \quad 0$ ha $x \le 0$
Gamma	$\beta, \alpha > 0$	$f(x) = \frac{\alpha(\alpha x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x},\ x > 0$ $0,\ x \le 0$
Erlang-k	$k > 0$ $\mu > 0$	$f(x) = \frac{\mu k(\mu k x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu k x},\ x > 0$ $0, \quad x \le 0$
H_k[3]	$q_i, \mu_i > 0$ $\sum_{i=1}^{k} \frac{q_i}{\mu_i} = \frac{1}{\mu}$	$f(x) = \sum_{i=1}^{k} q_i \mu_i e^{-\mu_i x},\ x > 0$ $0, \quad x \le 0$
χ^2	$n > 0$	$f(x) = \frac{x^{((n/2)-1)} e^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)},\ x > 0,$ 0 ha $x \le 0$
normális	$\sigma > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$
Student	n	$f(x) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}$
F	n, m	$f(x) = \frac{(n/m)^{n/2}\Gamma[(n+m)/2]x^{((n/2)-1)}}{\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)(1+(n/m)x)^{(n+m)/2}},$ $x > 0$

[3] k fázisú hiper-exponenciális

4. Táblázat. Nevezetes folytonos valószínűségi változók jellemzői

valószínűségi változó	$E[X]$	$D^2[X]$	Laplace–Stieltjes transzformált $X^*[\Theta]$
egyenletes	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{-b\Theta}-e^{-a\Theta}}{\Theta(a-b)}$
exponenciális	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	$\frac{\alpha}{\alpha+\Theta}$
Gamma	$\frac{\beta}{\alpha}$	$\frac{\beta}{\alpha^2}$	$\left(\frac{\alpha}{\alpha+\Theta}\right)^{\beta}$
Erlang-k	$\frac{1}{\mu}$	$\frac{1}{k\mu^2}$	$\left(\frac{k\mu}{k\mu+\Theta}\right)^{k}$
H_k[4]	$\frac{1}{\mu}$	$\left(2\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i}{\mu_i^2}\right)-\frac{1}{\mu^2}$	$\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i\mu_i}{\mu_i+\Theta}$
χ^2	n	$2n$	$\left(\frac{1}{1+2\Theta}\right)^{n/2}$

[4] k fázisú hiper-exponenciális

5.3 A Laplace-transzformált

1. Táblázat. A Laplace-transzformált jellemzői [5]

	függvény	transzformált
1.	$f(t)$	$f^*[\Theta] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\Theta t} f(t) dt$
2.	$af(t) + bg(t)$	$af^*[\Theta] + bg^*[\Theta]$
3.	$f\left(\frac{t}{a}\right), \quad a > 0$	$af^*[a\Theta]$
4.	$f(t-a), \quad t \geq a$	$e^{-a\Theta} f^*[\Theta]$
5.	$e^{-at} f(t)$	$f^*[\Theta + a]$
6.	$tf(t)$	$-\frac{df^*[\Theta]}{d\Theta}$
7.	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n f^*[\Theta]}{d\Theta^n}$
8.	$\int_0^t f(u) g(t-u) du$	$f^*[\Theta] g^*[\Theta]$
9.	$\frac{df(t)}{dt}$	$\Theta f^*[\Theta] - f(0)$
10.	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$\Theta^n f^*[\Theta] - \sum_{i=1}^{n} \Theta^{n-i} f^{(i-1)}(0)$
11.	$\int_0^t f(x) dx$	$\frac{f^*[\Theta]}{\Theta}$
12.	$\frac{\partial f(t)}{\partial a} \quad a$ paraméter	$\frac{\partial f^*[\Theta]}{\partial a}$

[5] Az f szakaszosan folytonos és exponenciális nagyságrendű. Azaz, léteznek M és a pozitív számok, melyre $|f(t)| \leq Me^{at}$, $t \geq 0$.

2. Táblázat. Laplace-transzformáltak

	függvény	transzformált
1.	$f(t)$	$f^*[\Theta] = \int_{0^-}^{\infty} e^{-\Theta t} f(t) dt$
2.	$f(t) = c$	$\frac{c}{\Theta}$
3.	$t^n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$	$\frac{n!}{\Theta^{n+1}}$
4.	$t^a, \quad a > 0$	$\frac{\Gamma(a+1)}{\Theta^{a+1}}$
5.	e^{at}	$\frac{1}{\Theta - a}, \quad \Theta > a$
6.	te^{at}	$\frac{1}{(\Theta - a)^2}, \quad \Theta > a$
7.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(\Theta - a)^{n+1}}, \quad \Theta > a$
8.[6]	$\delta(t)$	1
9.	$\delta(t-a)$	$e^{-a\Theta}$
10.[7]	$U(t-a)$	$\frac{e^{-a\Theta}}{\Theta}$
11.	$f(t-a)U(t-a)$	$e^{-a\Theta} f^*[\Theta]$

[6] A Dirac delta függvény $\delta(\cdot)$ definíció szerint $\delta(t) = 0$ $t \neq 0$, de $\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} \delta(t-a) f(t) dt = f(a)$ minden f és minden $\epsilon > 0$.

[7] Az egység lépcsős függvény $U(\cdot)$ definíció szerint

$$U(t-a) = \begin{cases} 0 & , t < a \\ 1 & , t \geq a. \end{cases}$$

6. Sorbanállási elméleti képletek

6.1 Jelölések és definíciók

1. Táblázat. Alapvető sorbanállási elméleti jelölések és definíciók

a	$a = \lambda W_s$ forgalmi intenzitás vagy felajánlott terhelés. Nemzetközileg elfogadott mértékegysége az erlang, A.K. Erlang dán mérnök-matematikus tiszteletére, aki elsőként foglalkozott sorbanállási elméleti problémákkal.
$A[t]$	Az érkezési időközök eloszlásfüggvénye. $A[t] = P[r \leq t]$
b	Egy kiszolgáló egység foglaltsági periódusát leíró valószínűségi változó.
$B[c,a]$	Erlang-féle B formula. Nevezetesen annak stacionárius valószínűsége, hogy egy M/M/c/c rendszerben minden kiszolgáló foglalt. Szokás még Erlang-féle veszteség formulának is nevezni.
c	Kiszolgálók száma valamely kiszolgáló egységben.
$C[c,a]$	Erlang-féle C formula. Nevezetesen annak stacionárius valószínűsége, hogy egy M/M/c rendszerben minden kiszolgáló foglalt. Szokás még Erlang-féle késleltetési (vagy várakozási) formulának is nevezni.
C_X^2	Valamely pozitív valószínűségi változó szórási együtthatójának a négyzete, $C_X^2 = \dfrac{D^2[X]}{E[X]^2}$.
D	Konstans vagy determinisztikus érkezési illetve kiszolgálási időre vonatkozó szimbólum.
E_k	k paraméterű Erlang eloszlás jelölése.
$E[N_q \mid N_q > 0]$	Nem üres sorok várható hossza.
$E[q \mid q > 0]$	Várható várakozási idő.
FCFS	Elsőként érkező - elsőként kiszolgált, vagyis érkezési sorrendben történő kiszolgálási elv.
FIFO	Elsőként be - elsőként ki kiszolgálási elv, ugyanaz mint az FCFS.
G	Tetszőleges eloszlású kiszolgálási idő, általában a függetlenséget feltételezzük.

1. Táblázat. Alapvető sorbanállási elméleti jelölések és definíciók (folytatás)

GI	Egymástól független tetszőleges eloszlású beérkezési időközök eloszlásfüggvénye.
H_2	2 állapotú hiperexponenciális eloszlás, könnyen általánosítható k állapotúra.
K	Egy sorbanállási rendszerben tartózkodó igények maximális száma. A véges forrású rendszerek igényeinek a számát is jelölheti.
L	Stacionárius állapotban a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma, vagyis $E[N]$.
$\ln(\cdot)$	Természetes alapú logaritmus.
L_s	Stacionárius állapotban a kiszolgálás alatt levő igények átlagos száma, vagyis $E[N_s]$.
LCFS	Utolsónak érkező - elsőként kiszolgált kiszolgálási elv.
LIFO	Utolsónak be - elsőként ki kiszolgálási elv, ugyanaz mint LCFS.
λ	A rendszerbe jövő igények beérkezési intenzitása.
λ_a	Tényleges átlagos beérkezési intenzitás, pl. az M/M/c/c rendszerben néhány igény elvész.
λ_T	Egységnyi időre eső átlagos áteresztőképesség.
M	Exponenciális eloszlásra vonatkozó szimbólum. (Markov-tulajdonság)
μ	Egy kiszolgáló egységre vonatkozó átlagos kiszolgálási intenzitás, azaz a kiszolgálások befejezésének átlagos intenzitása foglalt egységek esetén.
μ_a, μ_b	Valamely $M/H_2/1$ rendszerben a 2 állapotú hiperexponenciális eloszlás paraméterei.
$N[t]$	t-edik időpillanatban a rendszerben tartózkodó igények számát leíró valószínűségi változó.
N	Stacionárius állapotban a rendszerben tartózkodó igények számát leíró valószínűségi változó.
$N_q[t]$	t-edik időpillanatban a sorbanálló igények számát leíró valószínűségi változó.
N_q	Stacionárius állapotban a sorbanálló igények számát leíró valószínűségi változó.

1. Táblázat. Alapvető sorbanállási elméleti jelölések és definíciók (folytatás)

N_b	A foglaltsági periódus alatt valamely egység által kiszolgált igények számát leíró valószínűségi változó.
$N_s[t]$	t-edik időpillanatban kiszolgálás alatt levő igények számát leíró valószínűségi változó.
N_s	Egyensúlyi állapotban kiszolgálás alatt levő igények számát leíró valószínűségi változó.
O	A gépkiszolgálási problémánál valamely gép működési ideje.
π_a, π_b	Valamely $\mathrm{M/H_2/1}$ rendszerben a hiperexponenciális eloszlás paraméterei.
$\pi_X[r]$	Az X valószínűségi változó r-kvantilise.
$p_n[t]$	Annak valószínűsége, hogy a t-edik időpillanatban n igény tartózkodik a rendszerben.
p_n	Annak stacionárius valószínűsége, hogy n igény tartózkodik a rendszerben.
PRI	Prioritásos kiszolgálási elv.
PS	Processzor-osztásos kiszolgálási elv.
q	Valamely igény várakozási idejét leíró valószínűségi változó.
q_i	A hiperexponenciális eloszlás ún. súly-paraméterei.
q'	Valamely igény feltételes sorbanállási idejét leíró valószínűségi változó.
RSS	Véletlen kiválasztásos kiszolgálási elv.
ρ	Kiszolgáló egység kihasználtsága $= \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{E[N_s]}{c}$.
s	Kiszolgálási időt leíró valószínűségi változó. $E[s] = \frac{1}{\mu}$.
ρ_i	Valamely sorbanállási hálózatban az i-edik csomópont kihasználtsága.
SIRO	Véletlen sorrendben történő kiszolgálási elv, azonos az RSS-el. Vagyis a sorbanálló igények azonos valószínűséggel kerülnek kiszolgálásra.
r	A beérkezési időközöket leíró valószínűségi változó. $E[r] = \frac{1}{\lambda}$.
U	Az egyenletes eloszlás szimbóluma.

1. Táblázat. Alapvető sorbanállási elméleti jelölések és definíciók (folytatás)

w	Valamely igénynek a rendszerben való teljes tartózkodási idejét leíró valószínűségi változó, $w = q + s$.
$W[t]$	A w eloszlásfüggvénye. $W[t] = P[w < t]$.
W	Stacionárius esetben valamely igénynek a rendszerben való tartózkodási ideje, $W = E[w] = W_q + W_s$.
$W_q[t]$	A q eloszlásfüggvénye, $W_q[t] = P[q < t]$.
W_q	Egyensúlyi állapotban valamely igény átlagos várakozási ideje, $W_q = E[q] = W - W_s$.
$W_s[t]$	Az s eloszlásfüggvénye, $W_s[t] = P[s < t]$.
W_s	Az igény átlagos kiszolgálási ideje, $E[s] = \frac{1}{\mu}$.

6.2 A valószínűségi változók közötti összefüggések

2. Táblázat. A valószínűségi változók közötti összefüggések

$a = \frac{E[s]}{E[r]} = \lambda W_s$	Forgalmi intenzitás erlangokban mérve.
$\rho = \frac{a}{c} = \frac{\lambda}{c\mu}$	Kiszolgáló kihasználtsága, egyben annak valószínűsége, hogy egy adott kiszolgáló foglalt.
$w = q + s$	A rendszerben való tartózkodási idő.
$W = W_q + W_s$	Egyensúlyi állapotban a rendszerben való átlagos tartózkodási idő.
$N = N_q + N_s$	Egyensúlyi állapotban a rendszerben tartózkodó igények száma.
$L = \lambda W$	Egyensúlyi állapotban a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma. Ezt az összefüggést gyakran hívják Little-formulának is.
$L_Q = \lambda W_q$	Egyensúlyi állapotban a sorbanálló igények átlagos száma, ezt szintén hívják Little-formulának is.
$L_s = \lambda W_s$	Egyensúlyi állapotban a kiszolgálás alatt levő igények átlagos száma, ezt is szokták (de ritkábban) Little-formulának nevezni.

6.3 M/M/1 Sorbanállási képletek

3. Táblázat. M/M/1 Sorbanállási rendszer

$$\rho = \lambda W_s, \quad p_n = P[N = n] = (1-\rho)\rho^n, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

$$P[N \geq n] = \rho^n, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

$$L = E[N] = \lambda W = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad \sigma_N^2 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

$$L_q = \lambda W_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}, \quad \sigma_{N_q}^2 = \frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)}{(1-\rho)^2}.$$

$$E[N_q | N_q > 0] = \frac{1}{1-\rho}, \quad \mathrm{Var}[N_q | N_q > 0] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

$$W[t] = P[w \leq t] = 1 - \exp\left(\frac{-t}{W}\right), \quad P[w > t] = \exp\left(\frac{-t}{W}\right).$$

$$W = E[w] = \frac{W_s}{1-\rho}, \quad \sigma_w^2 = W^2.$$

$$\pi_w[r] = W \ln\left(\frac{100}{100-r}\right), \quad \pi_w[90] = W \ln 10, \quad \pi_w[95] = W \ln 20$$

$$W_q[t] = P[q \leq t] = 1 - \rho \exp\left(\frac{-t}{W}\right), \quad P[q > t] = \rho \exp\left(\frac{-t}{W}\right).$$

$$W_q = \frac{\rho W_S}{1-\rho}, \quad \sigma_q^2 = \frac{(2-\rho)\rho W_s^2}{(1-\rho)^2}.$$

$$\pi_q[r] = \max\left\{W \ln\left(\frac{100\rho}{100-r}\right), 0\right\}.$$

$$\pi_q[90] = \max\{W \ln(10\rho), 0\}, \quad \pi_q[95] = \max\{W \ln(20\rho), 0\}.$$

6.4 M/M/1/K Sorbanállási képletek

4. Táblázat. M/M/1/K Sorbanállási rendszer

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(1-a)a^n}{(1-a^{K+1})} & \text{ha } \lambda \neq \mu, \\[2ex] \dfrac{1}{K+1} & \text{ha } \lambda = \mu, \end{cases}$$

$n = 0, 1, \cdots, K$, ahol $a = \lambda W_s$.

$\lambda_a = (1 - p_K)\lambda$, a rendszerbe való átlagos érkezési intenzitás.

$$L = \begin{cases} \dfrac{a[1-(K+1)a^K + Ka^{K+1}]}{(1-a)(1-a^{K+1})} & \text{ha } \lambda \neq \mu, \\[2ex] \dfrac{K}{2} & \text{ha } \lambda = \mu. \end{cases}$$

$$L_q = L - (1 - p_0), \quad q_n = \frac{p_n}{1 - p_K}, n = 0, 1, \cdots, K-1.$$

$$W[t] = 1 - \sum_{n=0}^{K-1} q_n Q[n; \mu t],$$

ahol

$$q[n; \mu t] = e^{-\mu t} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu t}{k!}.$$

$$W = \frac{L}{\lambda_a}, \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda_a}.$$

$$W_q[t] = 1 - \sum_{n=0}^{K-2} q_{n+1} Q[n; \mu t].$$

$$E[q|q > 0] = \frac{W_q}{1 - p_0}, \quad \rho = (1 - p_K)a.$$

6.5 M/M/c Sorbanállási képletek

5. Táblázat. M/M/c Sorbanállási rendszer

$$a = \lambda W_s, \quad \rho = \frac{a}{c}$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^c}{c!(1-\rho)}\right]^{-1} = \frac{c!(1-\rho)P[N \geq c]}{a^c}.$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{a^n}{n!} p_0, & \text{ha } n \leq c, \\[2ex] \dfrac{a^n}{c! c^{n-c}} p_0, & \text{ha } n \geq c. \end{cases}$$

$$P[N \geq n] = \begin{cases} p_0 \left[\displaystyle\sum_{k=n}^{c-1} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^c}{c!(1-\rho)}\right] & \text{ha } n < c, \\[2ex] p_0 \left[\dfrac{a^c \rho^{n-c}}{c!(1-\rho)}\right] = P[N \geq c]\rho^{n-c} & \text{ha } n \geq c \end{cases}$$

$$L_q = \lambda W_q = \frac{aP[N \geq c]}{c(1-\rho)},$$

ahol

$$P[N \geq c] = C[c, a] = \frac{\dfrac{a^c}{c!}}{(1-\rho)\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^c}{c!}}.$$

5. Táblázat. M/M/c Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$\sigma^2_{N_q} = \frac{\rho C[c,a][1+\rho-\rho C[c,a]]}{(1-\rho)^2}.$$

$$L = \lambda W = L_q + a.$$

$$\sigma^2_N = \sigma^2_{N_q} + a(1+P[N \geq c]).$$

$$W_q[0] = 1 - P[N \geq c], \quad W_q[t] = 1 - P[N \geq c]\exp[-c\mu t(1-\rho)],$$

$$W_q = \frac{P[N \geq c]W_s}{c(1-\rho)}.$$

$$\sigma^2_q = \frac{[2 - C[c,a]]C[c,a]W_s^2}{c^2(1-\rho)^2}.$$

$$\pi_q[r] = \max\{0, \frac{W_s}{c(1-\rho)}\ln\left(\frac{100C[c,a]}{100-r}\right)\}.$$

$$\pi_q[90] = \max\{0, \frac{W_s}{c(1-\rho)}\ln(10C[c,a])\}.$$

$$\pi_q[95] = \max\{0, \frac{W_s}{c(1-\rho)}\ln(20C[c,a])\}.$$

$$W_{q'} = P[q \leq t | q > 0] = 1 - \exp\left(\frac{-ct(1-\rho)}{W_s}\right), \quad t > 0.$$

$$E[q|q>0] = E[q'] = \frac{W_s}{c(1-\rho)}.$$

$$\mathrm{Var}[q|q>0] = \left(\frac{W_s}{c(1-\rho)}\right)^2.$$

5. Táblázat. M/M/c Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$W[t] = \begin{cases} 1 + C_1 e^{-\mu t} + C_2 e^{-c\mu t(1-\rho)} & \text{ha } a \neq c-1 \\ \\ 1 - \{1 + C[c,a]\mu t\} e^{-\mu t} & \text{ha } a = c-1 \end{cases}$$

ahol

$$C_1 = \frac{P[N \geq c]}{1 - c(1-\rho)} - 1,$$

és

$$C_2 = \frac{P[N \geq c]}{c(1-\rho) - 1}.$$

$$W = W_q + W_s.$$

$$E[w^2] = \begin{cases} \dfrac{2P[N \geq c][1 - c^2(1-\rho)^2]W_s^2}{(a+1-c)c^2(1-\rho)^2} + 2W_s^2 & \text{ha } a \neq c-1 \\ \\ 2\{2P[N \geq c] + 1\}W_s^2 & \text{ha } a = c-1 \end{cases}$$

$$\sigma_w^2 = E[w^2] - W^2.$$

$\pi_w[90] \approx W + 1.3\sigma_w, \quad \pi_w[95] \approx W + 2\sigma_w$ (James Martin eredménye).

6.6 M/M/2 Sorbanállási képletek

6. Táblázat. M/M/2 Sorbanállási rendszer

$$a = \lambda W_s, \quad \rho = \frac{a}{2}$$

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho}.$$

$$p_n = 2p_0\rho^n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$P[N \geq n] = \frac{2\rho^n}{1+\rho}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$L_q = \lambda Wq = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2},$$

$P[N \geq 2] = C[2, a]$ annak stacionárius valószínűsége, hogy egy érkező igénynek sorba kell állni. $P[N \geq 2]$ a következő alakban adható meg

$$P[N \geq 2] = C[2, a] = \frac{2\rho^2}{1+\rho}.$$

$$\sigma^2_{N_q} = \frac{2\rho^3[(1+\rho)^2 - 2\rho^3]}{(1-\rho^2)^2}.$$

$$L = \lambda W = L_q + a = \frac{2\rho}{1-\rho^2}.$$

$$\sigma^2_N = \sigma^2_{N_q} + \frac{2\rho(1+\rho+2\rho^2)}{1+\rho}.$$

$$W_q[0] = \frac{1+\rho-2\rho^2}{1+\rho}.$$

6. Táblázat. M/M/2 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$W_q[t] = 1 - \frac{2\rho^2}{1+\rho}\exp[-2\mu t(1-\rho)]$$

$$W_q = \frac{\rho^2 W_s}{1-\rho^2}.$$

$$\sigma_q^2 = \frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)W_s^2}{(1-\rho^2)^2}.$$

$$\pi_q[r] = \max\{0, \frac{W_s}{2(1-\rho)}\ln\left(\frac{200\rho^2}{(100-r)(1+\rho)}\right)\}.$$

$$\pi_q[90] = \max\{0, \frac{W_s}{2(1-\rho)}\ln\left(\frac{20\rho^2}{1+\rho}\right)\}.$$

$$\pi_q[95] = \max\{0, \frac{W_s}{2(1-\rho)}\ln\left(\frac{40\rho^2}{1+\rho}\right)\}.$$

$$W_{q'} = P[q \le t | q > 0] = 1 - \exp\left(\frac{-2t(1-\rho)}{W_s}\right), \quad t > 0.$$

$$E[q|q>0] = E[q'] = \frac{W_s}{2(1-\rho)}.$$

$$\mathrm{Var}[q|q>0] = \left(\frac{W_s}{2(1-\rho)}\right)^2.$$

$$W[t] = \begin{cases} 1 + \dfrac{1-\rho}{1-\rho^2-2\rho^2}e^{-\mu t} + \dfrac{2\rho^2}{1-\rho-2\rho^2}e^{-2\mu t(1-\rho)} & \text{ahol } a \neq 1 \\ \\ 1 - \{1 + \dfrac{\mu t}{3}\}e^{-\mu t} & \text{ahol } a = 1 \end{cases}$$

6. Táblázat. M/M/2 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$W = W_q + W_s = \frac{W_s}{1-\rho^2}.$$

$$E[w^2] = \begin{cases} \dfrac{\rho^2[1-4(1-\rho)^2]W_s^2}{(2\rho-1)(1-\rho)(1-\rho^2)} + 2W_s^2 & \text{ha } a \neq 1 \\[2ex] \dfrac{10}{3}W_s^2 & \text{ha } a = 1 \end{cases}$$

$$\sigma_w^2 = E[w^2] - W^2.$$

$$\pi_w[90] \approx W + 1.3\sigma_w, \quad \pi_w[95] \approx W + 2\sigma_w$$

6.7 M/M/c/c Sorbanállási képletek

7. Táblázat. M/M/c/c Sorbanállási rendszer (M/M/c veszteséges rendszer)

$a = \lambda W_s$

$$p_n = \frac{\dfrac{a^n}{n!}}{1 + a + \dfrac{a^2}{2!} + \cdots + \dfrac{a^c}{c!}} \quad n = 0, 1, \ldots, c.$$

p_c annak stacionárius valószínűsége, hogy minden kiszolgáló egység foglalt. Ezt Erlang-féle B-formulának is nevezik, így $B[c, a]$-ra

$$B[c, a] = \frac{\dfrac{a^c}{c!}}{1 + a + \dfrac{a^2}{2!} + \cdots + \dfrac{a^c}{c!}}.$$

$\lambda_a = \lambda(1 - B[c, a])$ a rendszerbe ténylegesen beérkező igények átlagos intenzitása. Így a kiszolgáló tényleges kihasználtsága, ρ, a következő alakban adható meg

$$\rho = \frac{\lambda_a W_s}{c}.$$

$$L = \lambda_a W_s.$$

$$W = \frac{L}{\lambda_a} = W_s.$$

$$W[t] = 1 - \exp\left(\frac{-t}{W_s}\right).$$

7. Táblázat. M/M/c/c Sorbanállási rendszer (M/M/c veszteséges rendszer) (folytatás)

Az utolsó képletet kivéve az összes formula igaz az M/G/c/c rendszerre is. Ilyenkor $W[t] = W_s[t].$ ahol $W_s[\cdot]$ a kiszolgálási idő eloszlásfüggvénye.

6.8 M/M/c/K Sorbanállási képletek

8. Táblázat. M/M/c/K Sorbanállási rendszer

$a = \lambda W_s.$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^c}{c!} \sum_{n=1}^{K-c} \left(\frac{a}{c} \right)^n \right]^{-1}.$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{a^n}{n!} p_0 & \text{ha } n = 1, 2, \ldots, c, \\[2em] \dfrac{a^n}{c!} \left(\dfrac{a}{c} \right)^{n-c} p_0 & \text{ha } n = c+1, \ldots, K. \end{cases}$$

A rendszerbe ténylegesen beérkező igények átlagos intenzitása $\lambda_a = \lambda(1 - p_K)$.

A kiszolgáló egység tényleges kihasználtsága, ρ, a következő alakot ölti

$$\rho = \frac{\lambda_a W_s}{c}.$$

8. Táblázat. M/M/c/K Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$L_q = \frac{a^c r p_0}{c!(1-r)^2}\left[1 + (K-c)r^{K-c+1} - (K-c+1)r^{K-c}\right],$$

ahol

$$r = \frac{a}{c}.$$

$$L = L_q + E[N_s] = L_q + \sum_{n=0}^{c-1} n p_n + c\left(1 - \sum_{n=0}^{c-1} p_n\right).$$

A Little-formula alapján

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_a},$$

és

$$W = \frac{L}{\lambda_a}.$$

$$q_n = \frac{p_n}{1-p_K}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, K-1,$$

ahol q_n annak stacionárius valószínűsége, hogy egy a rendszerbe érkező igény már n másik igényt talál itt.

$$E[q|q>0] = \frac{W_q}{1 - \sum_{n=0}^{c-1} q_n}.$$

6.9 M/M/∞ Sorbanállási képletek

9. Táblázat. M/M/∞ Sorbanállási rendszer

$$a = \lambda W_s.$$

$$p_n = \frac{a^n}{n!}e^{-a}, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

Mivel N Poisson-eloszlást követ, ezért

$$L = a \quad \text{és} \quad \sigma_N^2 = a.$$

A Little-formula szerint

$$W = \frac{L}{\lambda} = W_s.$$

Mivel nincs várakozás, ezért
$W_q = L_q = 0$,
és
$W[t] = P[w \leq t] = W_s[t]$;
azaz w-nek ugyanaz az eloszlása, mint s-nek.
A fenti képletek változatlanok maradnak az M/G/∞ rendszerre is.

6.10 M/M/1/K/K Sorbanállási képletek

10. Táblázat. M/M/1/K/K Sorbanállási rendszer

A gépek átlagos működési ideje (néha a *meghibásodásig eltelt átlagos idő*nek is szokás nevezni), a rövidítés is ebből adódik

$$E[O] = \frac{1}{\alpha}.$$

A gépek átlagos javítási ideje

$$W_s = \frac{1}{\mu}.$$

p_0 annak stacionárius valószínűsége, hogy minden gép működik, melyre

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{K} \frac{K!}{(K-k)!}\left(\frac{W_s}{E[O]}\right)^k\right]^{-1} = B[K, z],$$

ahol $B[\cdot,\cdot]$ az Erlang-féle B formula és

$$z = \frac{E[O]}{W_s}.$$

p_n annak stacionárius valószínűsége, hogy n gép meghibásodott, az alábbi alakban adható meg

$$p_n = \frac{K!}{(K-n)!} z^{-n} p_0, \quad n = 0, 1, \ldots, K,$$

melyet a következőképpen is felírhatunk

$$p_n = \frac{\dfrac{z^{K-n}}{(K-n)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{K} \frac{z^k}{k!}}, \quad n = 0, 1, \ldots, K.$$

$$\rho = 1 - p_0.$$

$$\lambda = \frac{\rho}{W_s}.$$

$$W = \frac{K}{\lambda} - E[O].$$

10. Táblázat. M/M/1/K/K Sorbanállási rendszer (folytatás)

$L = \lambda W.$

$W_q = W - W_s.$

$$q_n = \frac{(K-n)p_n}{K-L} = \frac{\dfrac{z^{K-n-1}}{(K-n-1)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{K-1} \frac{z^k}{k!}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, K-1,$$

ahol q_n annak stacionárius valószínűsége, hogy egy meghibásodott gép n további gépet talál a javító egységnél.

$$W[t] = P[w \leq t] = 1 - \frac{Q(K-1; z+t\mu)}{Q(K-1; \mu)}, \quad t \geq 0,$$

ahol

$$Q(n; x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

$$W_q[t] = P[q \leq t] = 1 - \frac{Q(K-2; z+t\mu)}{Q(K-1; z)}, \quad t \geq 0,$$

$$E[q|q > 0] = \frac{W_q}{1 - q_0}.$$

6.11 M/G/1/K/K Sorbanállási képletek

11. Táblázat. M/G/1/K/K Sorbanállási rendszer

A gépek átlagos működési ideje (néha a *meghibásodásig eltelt átlagos idő*nek is szokás nevezni), a rövidítés is ebből adódik

$$E[O] = \frac{1}{\alpha}.$$

A gépek átlagos javítási ideje

$$W_s = \frac{1}{\mu}.$$

p_0 annak stacionárius valószínűsége, hogy minden gép működik, melyre

$$p_0 = \left[1 + \frac{KW_s}{E[O]} \sum_{n=0}^{K-1} \binom{K-1}{n} B_n \right]^{-1},$$

ahol

$$B_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1 - W_s^*[i\alpha]}{W_s^*[i\alpha]} \right) & n = 1, 2, \ldots, K-1, \end{cases}$$

és $W_s^*[\theta]$ az s Laplace-Stieltjes transzformáltja.

$$\rho = 1 - p_0.$$

$$\lambda = \frac{\rho}{W_s}.$$

$$W = \frac{K}{\lambda} - E[O].$$

$$L = \lambda W.$$

$$W_q = W - W_s.$$

$$L_q = \lambda W_q.$$

6.12 M/M/c/K/K Sorbanállási képletek

12. Táblázat. M/M/c/K/K Sorbanállási rendszer

A gépek átlagos működési ideje (néha a *meghibásodásig eltelt átlagos idő*nek is szokás nevezni), a rövidítés is ebből adódik

$$E[O] = \frac{1}{\alpha}.$$

A gépek átlagos javítási ideje

$$W_s = \frac{1}{\mu}.$$

p_0 annak stacionárius valószínűsége, hogy minden gép működik, melyre

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{c} \binom{K}{k} z^{-k} + \sum_{k=c+1}^{K} \frac{k!}{c! c^{k-c}} \binom{K}{k} z^{-k} \right]^{-1},$$

ahol

$$z = \frac{E[O]}{W_s}.$$

p_n annak stacionárius valószínűsége, hogy n gép meghibásodott, az alábbi alakban adható meg

$$p_n = \begin{cases} \binom{K}{n} z^{-n} p_0 & n = 0, 1, \ldots, c \\ \frac{n!}{c! c^{n-c}} \binom{K}{n} z^{-n} p_0 & n = c+1, \ldots, K. \end{cases}$$

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{K} (n-c) p_n.$$

$$W_q = \frac{L_q (E[O] + W_s)}{K - L_q}.$$

$$\lambda = \frac{K}{E[O] + W_q + W_s}.$$

$$W = \frac{K}{\lambda} - E[O].$$

$$L = \lambda W.$$

12. Táblázat. M/M/c/K/K Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$q_n = \frac{(K-n)p_n}{K-L},$$

ahol q_n annak stacionárius valószínűsége, hogy egy meghibásodott gép n további gépet talál a javító egységnél. A q_n-t jelöljük $q_n[K]$-val, hogy hangsúlyozzuk a K darab gépre vonatkozó képletet. Meg lehet mutatni, hogy

$$q_n[K] = p_n[K-1], \quad n = 0, 1, \ldots, K-1.$$

$$p_n[K-1] = \frac{c^c}{c!} \frac{p(K-n-1; cz)}{p(K-1; cz)} p_0[K-1],$$

ahol, természetesen,

$$p(k; \alpha) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}.$$

$$W_q[t] = P[q \leq t] = 1 - \frac{c^c Q(K-c-1; cz) p_0[K-1]}{c! p(K-1; cz)}, t \geq 0,$$

ahol

$$Q(k; \alpha) = e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{k} \frac{\alpha^n}{n!}.$$

$$W[t] = P[w \leq t] = 1 - C_1 \exp(-t/W_s) + C_2 \frac{Q(K-c-1; c(z+t\mu))}{Q(K-c-1; cz)},$$

$t \geq 0$,

ahol $C_1 = 1 + C_2$ és

$$C_2 = \frac{c^c Q(K-c-1; cz)}{c!(c-1)(K-c-1)! p(K-1; cz)} p_0[K-1].$$

Így annak stacionárius valószínűsége, hogy egy meghibásodott gépnek várakozni kell

$$D = \sum_{n=c}^{K-1} q_n = 1 - \sum_{n=0}^{c-1} q_n.$$

$$E[q|q > 0] = \frac{W_q}{D}.$$

6.13 D/D/c/K/K Sorbanállási képletek

13. Táblázat. D/D/c/K/K Sorbanállási rendszer

A gépek átlagos működési ideje (néha a *meghibásodásig eltelt átlagos idő*nek is szokás nevezni), a rövidítés is ebből adódik

$$E[O] = \frac{1}{\alpha}.$$

A gépek átlagos javítási ideje

$$W_s = \frac{1}{\mu}.$$

$$\rho = \min\{1, \frac{K}{c(1+z)}\},$$

ahol

$$z = \frac{E[O]}{W_s}.$$

$$\lambda = c\rho\mu = \frac{c\rho}{W_s}.$$

$$W = \frac{K}{\lambda} - E[O].$$

$$L = \lambda W.$$

$$W_q = W - W_s.$$

$$L_q = \lambda W_q.$$

A képletek levezetése az alábbi cikkben található: "A straightforward model of computer performance prediction" by John W. Boyse és David R. Warn in *ACM Comput. Surveys*, **7(2)**, (June 1972).

6.14 M/G/1 Sorbanállási képletek

14. Táblázat. M/G/1 Sorbanállási rendszer

Jelölje N stacionáris esetben a rendszerben tartózkodó igények számát. Ekkor N generátorfüggvényére igaz az alábbi összefüggés

$$g_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{(1-\rho)(1-z)W_s^*[\lambda(1-z)]}{W_s^*[\lambda(1-z)] - z},$$

ahol W_s^* az s kiszolgálási idő Laplace-Stieltjes transzformáltja. w és q-ra vonatkozó Laplace-Stieltjes transzformáltak az alábbiak

$$W^*[\theta] = \frac{(1-\rho)\theta W_s^*[\theta]}{\theta - \lambda + \lambda W_s^*[\theta]},$$

és

$$W_q^*[\theta] = \frac{(1-\rho)\theta}{\theta - \lambda + \lambda W_s^*[\theta]}.$$

Különböző szerzők a fenti egyenleteket *Hincsin transzformált egyenlet*nek hívják. Annak stacionáris valószínűsége, hogy a rendszer üres, $p_0 = 1-\rho$, ahol a kiszolgáló kihasználtsága $\rho = \lambda W_s$. A kiszolgáló foglaltságára adódó valószínűség $P[N \geq 1] = \rho$.

$$W_q = \frac{\lambda E[s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho W_s}{1-\rho}\left(\frac{1+C_s^2}{2}\right) \text{ (Pollaczek formula).}$$

$$L_q = \lambda W_q.$$

$$\sigma_{N_q}^2 = \frac{\lambda^3 E[s^3]}{3(1-\rho)} + \left(\frac{\lambda^2 E[s^2]}{2(1-\rho)}\right)^2 + \frac{\lambda^2 E[s^2]}{2(1-\rho)}.$$

14. Táblázat. M/G/1 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$E[q|q>0] = \frac{W_s}{1-\rho}\left(\frac{1+C_s^2}{2}\right).$$

$$E[q^2] = 2W_q^2 + \frac{\lambda E[s^3]}{3(1-\rho)}.$$

$$\sigma_q^2 = E[q^2] - W_q^2.$$

$$W = W_q + W_s.$$

$$L = \lambda W = L_q + \rho.$$

$$\sigma_N^2 = \frac{\lambda^3 E[s^3]}{3(1-\rho)} + \left(\frac{\lambda^2 E[s^2]}{2(1-\rho)}\right)^2 + \frac{\lambda^2(3-2\rho)E[s^2]}{2(1-\rho)} + \rho(1-\rho).$$

$$E[w^2] = E[q^2] + \frac{E[s^2]}{1-\rho}.$$

$$\sigma_w^2 = E[w^2] - W^2.$$

$$\pi_w[90] \approx W + 1.3\sigma_w, \quad \pi_w[95] \approx W + 2\sigma_w.$$

15. Táblázat. M/H_2/1 Sorbanállási rendszer

Ekkor

$$g_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = C_1\frac{z_1}{z_1-z} + C_2\frac{z_2}{z_2-z},$$

ahol z_1 és z_2 az alábbi egyenlet gyökei

$$\rho_1\rho_2 z^2 - (\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)z + 1 + \rho_1 + \rho_2 - \rho = 0,$$

ahol

$$\rho = \lambda W_s,$$

15. Táblázat. M/H_2/1 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$\rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$C_1 = \frac{(z_1 - 1)(1 - \rho z_2)}{z_1 - z_2},$$

és

$$C_2 = \frac{(z_2 - 1)(1 - \rho z_1)}{z_2 - z_1}.$$

A $g_N(z)$ adódóan kapjuk, hogy

$$p_n = C_1 z_1^{-n} + C_2 z_2^{-n}, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

Speciálisan, $p_0 = 1 - \rho$.

$$P[N \geq n] = C_1 \frac{z_1^{-n+1}}{z_1 - 1} - C_2 \frac{z_2^{-n+1}}{z_2 - 1}.$$

Továbbá,

$$P[N \geq 1] = \rho.$$

$$W_q[t] = P[q \leq t] = 1 - C_5 e^{-at} - C_6 e^{-bt}, \ t \geq 0,$$

ahol $a = -\zeta_1, \ b = -\zeta_2$, ζ_1, ζ_2 gyökei a

$$\theta^2 + (\mu_1 + \mu_2 - \lambda)\theta + \mu_1 \mu_2 (1 - \rho) = 0,$$

egyenletnek,

15. Táblázat. M/H_2/1 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$C_5 = \frac{\lambda(1-\rho)\zeta_1 + \rho(1-\rho)\mu_1\mu_2}{a(\zeta_1 - \zeta_2)}$$

és

$$C_6 = \frac{\lambda(1-\rho)\zeta_2 + \rho(1-\rho)\mu_1\mu_2}{a(\zeta_2 - \zeta_1)}.$$

$$W_q = \frac{\lambda E[s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho W_s}{1-\rho}\left(\frac{1+C_s^2}{2}\right). \text{ (Pollaczek formula)}$$

$$E[q|q>0] = \frac{W_s}{1-\rho}\left(\frac{1+C_s^2}{2}\right).$$

$$E[q^2] = 2W_q^2 + \frac{\lambda E[s^3]}{3(1-\rho)}.$$

Ha ebbe a képletbe behelyettesítjük a

$$E[s^3] = \frac{6q_1}{\mu_1^3} + \frac{6q_2}{\mu_2^3},$$

akkor

$$\sigma_q^2 = E[q^2] - W_q^2.$$

$$W[t] = P[w \le t] = 1 - \pi_a e^{-\mu_a t} - \pi_b e^{-\mu_b t}, \quad t \ge 0,$$

ahol

$$\pi_a = C_1 \frac{z_1}{z_1 - 1},$$

$$\pi_b = C_2 \frac{z_2}{z_2 - 1},$$

15. Táblázat. M/H_2/1 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$\mu_a = \lambda(z_1 - 1)$,

és

$\mu_b = \lambda(z_2 - 1)$.

$W = W_q + W_s$.

$$E[w^2] = E[q^2] + \frac{E[s^2]}{1-\rho},$$

ahol természetesen

$$E[s^2] = \frac{2q_1}{\mu_1^2} + \frac{2q_2}{\mu_2^2}.$$

$\sigma_w^2 = E[w^2] - W^2$.

$$C_w^2 = \frac{E[w^2]}{W^2} - 1.$$

$$L_q = \lambda W = \frac{\rho^2}{1-\rho}\left(\frac{1+C_s^2}{2}\right).$$

$$\sigma_{N_q}^2 = \frac{\lambda^3 E[s^3]}{3(1-\rho)} + \left(\frac{\lambda^2 E[s^2]}{2(1-\rho)}\right)^2 + \frac{\lambda^2 E[s^2]}{2(1-\rho)}.$$

$L = \lambda W = L_q + \rho$.

$$\sigma_N^2 = \frac{\lambda^3 E[s^3]}{3(1-\rho)} + \left(\frac{\lambda^2 E[s^2]}{2(1-\rho)}\right)^2 + \frac{\lambda^2(3-2\rho)E[s^2]}{2(1-\rho)} + \rho(1-\rho).$$

16. Táblázat. M/Gamma/1 Sorbanállási rendszer

Mivel s gamma eloszlású, ezért

$$E[s^n] = \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\alpha^n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Továbbá

$$C_s^2 = \frac{1}{\beta},$$

így

$$E[s^2] = W_s^2(1 + C_s^2),$$

$$E[s^3] = W_s^3(1 + C_s^2)(1 + 2C_s^2),$$

és

$$E[s^n] = W_s^n \prod_{k=1}^{n-1}(1 + kC_s^2), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Ekkor

$$W_q = \frac{\lambda E[s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho W_s}{1-\rho}\left(\frac{1+C_s^2}{2}\right),$$

$$L_q = \lambda W_q,$$

$$\sigma_{N_q}^2 = \frac{\rho^2(1+C_s^2)}{2(1-\rho)}\left[1 + \frac{\rho^2(1+C_s^2)}{2(1-\rho)} + \frac{2\rho(1+2C_s^2)}{3}\right],$$

$$E[q|q>0] = \frac{W_s}{1-\rho}\left(\frac{1+C_s^2}{2}\right),$$

$$E[q^2] = 2W_q^2 + \frac{\rho W_s^2(1+C_s^2)(1+2C_s^2)}{3(1-\rho)},$$

$$\sigma_q^2 = E[q^2] - W_q^2,$$

$$W = W_q + W_s,$$

16. Táblázat. M/Gamma/1 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$L = \lambda W = L_q + \rho.$

$\sigma_N^2 = \dfrac{\rho^3(1+C_s^2)(1+2C_s^2)}{3(1-\rho)} + \left(\dfrac{\rho^2(1+C_s^2)}{2(1-\rho)}\right)^2 + \dfrac{\rho^2(3-2\rho)(1+C_s^2)}{2(1-\rho)} +$
$\rho(1-\rho).$

$E[w^2] = E[q^2] + \dfrac{W_s^2(1+C_s^2)}{1-\rho}.$

$\sigma_w^2 = E[w^2] - W^2.$

$\pi_w[90] \approx W + 1.3\sigma_w, \quad \pi_w[95] \approx W + 2\sigma_w.$

17. Táblázat. M/E_k/1 Sorbanállási rendszer

Mivel s Erlang-k eloszlású, ezért

$E[s^n] = \left(1+\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{2}{k}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n-1}{k}\right)W_s^n, \quad n = 1, 2, \cdots.$

így

$E[s^2] = W_s^2\left(1+\dfrac{1}{k}\right),$

és

$E[s^3] = W_s^3\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\left(1+\dfrac{2}{k}\right).$

Ekkor

$W_q = \dfrac{\lambda E[s^2]}{2(1-\rho)} = \dfrac{\rho W_s}{1-\rho}\left(\dfrac{1+\frac{1}{k}}{2}\right).$ (Pollaczek's formula)

$L_q = \lambda W_q.$

$\sigma_{N_q}^2 = \dfrac{\rho^2(1+k)}{2k(1-\rho)}\left[1 + \dfrac{\rho^2(1+k)}{2k(1-\rho)} + \dfrac{2\rho(k+2)}{3k}\right].$

17. Táblázat. M/E_k/1 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$E[q|q>0] = \frac{W_s}{1-\rho}\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{2}\right).$$

$$E[q^2] = 2W_q^2 + \frac{\rho W_s^2(k+1)(k+2)}{3k^2(1-\rho)}.$$

$$\sigma_q^2 = E[q^2] - W_q^2.$$

$$W = W_q + W_s.$$

$$L = \lambda W = L_q + \rho.$$

$$\sigma_N^2 = \frac{\rho^3(k+1)(k+2)}{3k^2(1-\rho)} + \left(\frac{\rho^2(1+\frac{1}{k})}{2(1-\rho)}\right)^2 + \frac{\rho^2(3-2\rho)(1+\frac{1}{k})}{2(1-\rho)} + \rho(1-\rho).$$

$$E[w^2] = E[q^2] + \frac{W_s^2(1+\frac{1}{k})}{1-\rho}.$$

$$\sigma_w^2 = E[w^2] - W^2.$$

$$\pi_w[90] \approx W + 1.3\sigma_w, \quad \pi_w[95] \approx W + 2\sigma_w.$$

18. Táblázat. M/D/1 Sorbanállási rendszer

Mivel s konstans, ezért

$$E[s^n] = W_s^n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

így

$$g_N(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)}{1 - ze^{\rho(1-z)}}.$$

Ha feltesszük, hogy

$$|ze^{\rho(1-z)}| < 1,$$

$g_N(z)$ hatványsorba fejthető

$$g_N(z) = (1-\rho)(1-z)\sum_{j=0}^{\infty}\left[ze^{\rho(1-z)}\right]^j.$$

Ekkor megmutatható, hogy

$$p_1 = (1-\rho)(e^\rho - 1),$$

és

$$p_n = (1-\rho)\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{n-j}(j\rho)^{n-j-1}(j\rho + n - j)e^{j\rho}}{(n-j)!} \quad n = 2, 3, \cdots.$$

Továbbá

$$W_q[t] = \sum_{n=0}^{k-1} p_n + p_k\left(\frac{t-(k-1)W_s}{W_s}\right),$$

ahol $(k-1)W_s \leq t \leq kW_s, \quad k = 1, 2, \cdots.$

18. Táblázat. M/D/1 Sorbanállási rendszer (folytatás)

Így,

$W_q[0] = p_0.$

$$W_q = \frac{\rho W_s}{2(1-\rho)}.$$

$$W[q|q>0] = \frac{W_s}{2(1-\rho)}.$$

$$E[q^2] = 2W_q^2 + \frac{\rho W_s^2}{3(1-\rho)}.$$

$\sigma_q^2 = E[q^2] - W_q^2.$

$$L_q = \lambda W_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}.$$

$$\sigma_{N_q}^2 = \frac{\rho^3}{3(1-\rho)} + \left[\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}\right]^2 + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}.$$

$$W[t] = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < W_s \\ \sum\limits_{n=0}^{k-1} p_n + p_k \left(\frac{t-kW_s}{W_s}\right) & \text{ha } t \geq W_s \end{cases},$$

ahol

$kW_s \leq t < (k+1)W_s, \quad k = 1, 2, \cdots.$

$W = W_q + W_s.$

$$E[w^2] = E[q^2] + \frac{W_s^2}{1-\rho}.$$

$\sigma_w^2 = E[w^2] - W^2.$

$L = \lambda W = \text{Ł}_q + \rho.$

$$\sigma_N^2 = \frac{\rho^3}{3(1-\rho)} + \left(\frac{\rho^2}{2(1-\rho)}\right)^2 + \frac{\rho^2(3-2\rho)}{2(1-\rho)} + \rho(1-\rho).$$

6.15 GI/M/1 Sorbanállási képletek

19. Táblázat. GI/M/1 Sorbanállási rendszer

Annak stacionárius valószínűsége, hogy valamely beérkező igény a rendszert üresen találja, egyértelmű megoldása az $1 - \pi_0 = A^*[\mu\pi_0]$ egyenletnek, melyre $0 < \pi_0 < 1$, ahol $A^*[\Theta]$ a τ beérkezési időköz Laplace-Stieltjes transzformáltja. A rendszerben tartózkodó igények eloszlása $\{p_n\}$, ahol $p_0 = P[N = 0] = 1 - \rho,\ p_n = \rho\pi_0(1 - \pi_0)^{n-1},\ n = 1, 2, \cdots,$ továbbá

$L = \dfrac{\rho}{\pi_0}$, és $\sigma_N^2 = \frac{\rho(2-\pi_0-\rho)}{\pi_0^2}$.

$$L_q = \frac{(1 - \pi_0)\rho}{\pi_0}.$$

$$\sigma_{N_q}^2 = \frac{\rho(1 - \pi_0)(2 - \pi_0 - \rho(1 - \pi_0))}{\pi_0^2}.$$

$$E[N_q|N_q > 0] = \frac{1}{\pi_0}.$$

$$W = \frac{W_s}{\pi_0}.$$

$$W[t] = P[w \leq t] = 1 - \exp(-t/W).$$

$$\pi_w[r] = W \ln\left[\frac{100}{100 - r}\right].$$

$$\pi_w[90] = W \ln 10, \quad \pi_w[95] = W \ln 20.$$

$$W_q = (1 - \pi_0)\frac{W_s}{\pi_0}.$$

19. Táblázat. GI/M/1 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$\sigma_q^2 = (1 - \pi_0^2)\left(\frac{W_s}{\pi_0}\right)^2.$$

$$W_q[t] = P[q \leq t] = 1 - (1 - \pi_0)\exp(-t/W).$$

$$\pi_q[r] = \max\left\{0, W \ln\left(\frac{100(1-\pi_0)}{100-r}\right)\right\}.$$

q', a feltételes várakozási idő eloszlása megegyezik a w eloszlásával.

20. Táblázat. π_0 ρ függvényében GI/M/1 rendszernél [1]

ρ	E_2	E_3	U	D	H_2	H_2
0.100	0.970820	0.987344	0.947214	0.999955	0.815535	0.810575
0.200	0.906226	0.940970	0.887316	0.993023	0.662348	0.624404
0.300	0.821954	0.868115	0.817247	0.959118	0.536805	0.444949
0.400	0.724695	0.776051	0.734687	0.892645	0.432456	0.281265
0.500	0.618034	0.669467	0.639232	0.796812	0.343070	0.154303
0.600	0.504159	0.551451	0.531597	0.675757	0.263941	0.081265
0.700	0.384523	0.626137	0.412839	0.533004	0.191856	0.044949
0.800	0.260147	0.289066	0.284028	0.371370	0.124695	0.024404
0.900	0.131782	0.147390	0.146133	0.193100	0.061057	0.010495
0.950	0.066288	0.074362	0.074048	0.098305	0.030252	0.004999
0.980	0.026607	0.029899	0.029849	0.039732	0.012039	0.001941
0.999	0.001333	0.001500	0.001500	0.001999	0.000600	0.000095

1 az első H_2 eloszlásnál $q_1 = 0.4$, $\mu_1 = 0.5\lambda$, $\mu_2 = 3\lambda$. A második H_2 eloszlásnál $q_1 = 0.024405$, $\mu_1 = 2q_1\lambda$, és $\mu_2 = 2q_2\lambda$.

6.16 GI/M/c Sorbanállási képletek

21. Táblázat. GI/M/c Sorbanállási rendszer

Legyen $\pi_n, n = 0, 1, 2, \cdots$ az érkezési pillanatokban a rendszerben tartózkodó igények stacionáris eloszlása. Ekkor

$$\pi_n = \begin{cases} \sum\limits_{i=n}^{c-1} (-1)^{i-n} \binom{i}{n} U_i, & n = 0, 1, \ldots, c-2 \\ D\omega^{n-c}, & n = c-1, c, \ldots, \end{cases}$$

ahol ω a $\omega = A^*[c\mu(1-\omega)]$ egyenlet egyértelmű megoldása, $0 < \omega < 1$,

$$g_j = A^*[j\mu], \quad j = 1, 2, \ldots, c,$$

$$C_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ \prod\limits_{i=1}^{j} \left(\frac{g_i}{1-g_i} \right), & j = 1, 2, \ldots, c, \end{cases}$$

$$D = \left[\frac{1}{1-\omega} + \sum_{j=1}^{c} \frac{\binom{c}{j}}{C_j(1-g_j)} \left(\frac{c(1-g_j)-j}{c(1-\omega)-j} \right) \right]^{-1}$$

és

$$U_n = DC_n \sum_{j=n+1}^{c} \frac{\binom{c}{j}}{C_j(1-g_j)} \left(\frac{c(1-g_j)-j}{c(1-\omega)-j} \right), \quad n = 0, 1, \ldots, c-1.$$

21. Táblázat. GI/M/c Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$W_q[t] = P[q \le t] = 1 - P[q > 0]e^{-c\mu(1-\omega)t},\ t \ge 0,$$

ahol

$$P[q > 0] = \frac{D}{1-\omega}. \quad W_q = \frac{DW_s}{c(1-\omega)^2}. \quad E[q|q > 0] = \frac{W_s}{c(1-\omega)}.$$

Ha $c(1-\omega) \ne 1$, akkor

$$W[t] = P[\omega \le t] = 1 + (G-1)e^{-\mu t} - Ge^{-c\mu(1-\omega)t}, \quad t \ge 0,$$

ahol

$$G = \frac{D}{(1-\omega)[1-c(1-\omega)]}.$$

Amikor $c(1-\omega) = 1$, akkor

$$W[t] = P[\omega \le t] = 1 - \left[1 + \frac{D\mu t}{1-\omega}\right] e^{-\mu t}, \quad t \ge 0.$$

Továbbá

$$W = W_q + W_s.$$

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda W_s}{c} - \lambda W_s \sum_{j=1}^{c-1} \pi_{j-1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{c}\right).$$

$$p_n = \begin{cases} \frac{\lambda W_s \pi_{n-1}}{n}, & n = 1, 2, \ldots, c-1 \\ \frac{\lambda W_s \pi_{n-1}}{c}, & n = c, c+1, \cdots. \end{cases}$$

6.17 M/G/1 Prioritásos sorbanállási rendszer

22. Táblázat. M/G/1 Sorbanállási rendszer (osztályok, prioritás nélkül)

---

n osztály szerint csoportosítjuk az igényeket, ahol az i-edikbe tartozók $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n$ paraméterű Poisson-eloszlás szerint érkeznek, és a kiszolgálási időkre $E[s_i] = 1/\mu_i, \quad E[s_i^2], \quad E[s_i^3]$. Minden igényt FCFS alapján szolgálunk ki. Nyilvánvalóan az összesített beérkezési folyamat Poisson-eloszlású lesz, melynek paramétere

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

A kiszolgálási időkre

$$W_s = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[s_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[s_2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[s_n],$$

$$E[s^2] = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[s_1^2] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[s_2^2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[s_n^2],$$

és

$$E[s^3] = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[s_1^3] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[s_2^3] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[s_n^3],$$

A Pollaczek formula alapján

$$W_q = \frac{\lambda E[s^2]}{2(1-\rho)}.$$

Osztályonként a rendszerben eltöltött átlagos idő

$$W_i = W_q + E[s_i], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

22. Táblázat. M/G/1 Sorbanállási rendszer (osztályok, prioritás nélkül)

(folytatás)

Az összesített átlagos tartózkodási időre

$$W = \frac{\lambda_1}{\lambda} W_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} W_2 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} W_n.$$

A sorbanállási idő szórásnégyzete

$$\sigma_q^2 = \frac{\lambda E[s^3]}{3(1-\rho)} + \frac{\lambda^2 (E[s^2])^2}{4(1-\rho)^2}.$$

Osztályonként a rendszerben eltöltött idő szórásnégyzete

$$\sigma_{w_i}^2 = \sigma_q^2 + \sigma_{s_i}^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

w második momentuma osztályonként

$$E[w_i^2] = \sigma_{w_i}^2 + W_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Így az összesített második momentum

$$E[w^2] = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[w_1^2] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[w_2^2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[w_n^2],$$

és

$$\sigma_w^2 = E[w^2] - W^2.$$

23. Táblázat. M/G/1 Relatív prioritásos rendszer

(ezt az elvet head-of-the-line-ként is ismerik (HOL))

Az n igény-osztály közül az 1 csoportba tartozók a legfontosabbak, és az n-edikbe tartozók a legkevésbé. Az i-edik osztályba tartozó igények λ_i paraméterű Poisson folyamatként érkeznek. Minden osztálynak saját kiszolgálási ideje van véges momentumokkal. Az igényeket relatív prioritásos elv szerint szolgálják ki. Az összesített beérkezési folyamat Poisson-eloszlású lesz az alábbi paraméterrel

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

A kiszolgálási idő első három momentuma az alábbi képlet szerint határozható meg

$$W_s = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[s_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[s_2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[s_n],$$

$$E[s^2] = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[s_1^2] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[s_2^2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[s_n^2],$$

és

$$E[s^3] = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[s_1^3] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[s_2^3] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[s_n^3],$$

Legyen

$$a_j = \lambda_1 E[s_1] + \lambda_2 E[s_2] + \cdots + \lambda_j E[s_j], \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

és vegyük észre, hogy

$$a_n = a = \lambda W_s.$$

Az átlagos sorbanállási idők

$$W_{q_j} = E[q_j] = \frac{\lambda E[s^2]}{2(1 - a_{j-1})(1 - a_j)},$$

$$j = 1, 2, \ldots, n, \quad a_0 = 0.$$

23. Táblázat. M/G/1 Relatív prioritásos rendszer

(folytatás)

Az átlagos sorhosszak

$L_{q_j} = \lambda_j W_{q_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Az egyesített átlagos sorbanállási idő

$$W_q = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[q_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[q_2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[q_n].$$

A rendszerben eltöltött átlagos idők

$W_j = E[w_j] = E[q_j] + E[s_j], \quad j = 1, 2, \ldots, n,$

és a rendszerben tartózkodó igények átlaga

$L_j = \lambda_j W_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Az összesített átlagos tartózkodási idő

$W = W_q + W_s.$

Az összesített átlagos sorhossz

$L_q = \lambda W_q,$

és a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma

$L = \lambda W.$

Osztályonként a rendszerben eltöltött idő szórásnégyzete

$$\sigma_{w_j}^2 = \sigma_{s_j}^2 + \frac{\lambda E[s^3]}{3(1-a_{j-1})^2(1-a_j)}$$

$$+\frac{\lambda E[s^2]\left(2\sum\limits_{i=1}^{j} \lambda_i E[s_i^2] - \lambda E[s^2]\right)}{4(1-a_{j-1})^2(1-a_j)^2}$$

$$+\frac{\lambda E[s^2]\sum\limits_{i=1}^{j-1} \lambda_i E[s_i^2]}{2(1-a_{j-1})^3(1-a_j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

23. Táblázat. M/G/1 Relatív prioritásos rendszer

(folytatás)

A rendszerben eltöltött idő szórásnégyzete

$$\sigma_w^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda}[\sigma_{w_1}^2 + W_1^2] + \frac{\lambda_2}{\lambda}[\sigma_{w_2}^2 + W_2^2]$$

$$+ \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}[\sigma_{w_n}^2 + W_n^2] - W^2.$$

Osztályonként a sorbanállási idő szórásnégyzete

$$\sigma_{q_j}^2 = \sigma_{w_j}^2 - \sigma_{s_j}^2, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ismert, hogy $E[q_j^2] = \sigma_{q_j}^2 + W_{q_j}^2, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$

ezért

$$E[q^2] = \frac{\lambda_1}{\lambda}E[q_1^2] + \frac{\lambda_2}{\lambda}E[q_2^2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}E[q_n^2].$$

Végül

$$\sigma_q^2 = E[q^q] - W_q^2.$$

24. Táblázat. M/G/1 Abszolút prioritásos sorbanállási rendszer

Az n igény-osztály közül az 1 csoportba tartozók a legfontosabbak, és az n-edikbe tartozók a legkevésbé. Az i-edik osztályba tartozó igények λ_i paraméterű Poisson folyamatként érkeznek. Minden osztálynak saját kiszolgálási ideje van véges momentumokkal, $E[s_i] = 1/\mu_i$, $E[s_i^2]$, $E[s_i^3]$. Az igényeket megszakításos prioritási elv szerint szolgálják ki, azaz ha j -dik osztályba tartozó igény kiszolgálása folyik, miközben $i < j$, -dik osztályba tartozó igény beérkezik, akkor a kiszolgálás megszakad és az i igény kiszolgálása kezdődik el. A megszakított igény a saját osztálybeli igények sorának az elejére áll, és ha legközelebb rákerül a sor, akkor a megszakítás helyétől folytatódik a kiszolgálás.

24. Táblázat. M/G/1 Abszolút prioritásos sorbanállási rendszer

(folytatás)

Az összesített beérkezési folyamat Poisson-eloszlású lesz az alábbi paraméterrel

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

A kiszolgálási idő első három momentuma az alábbi képlet szerint határozható meg

$$W_s = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[s_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[s_2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[s_n],$$

$$E[s^2] = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[s_1^2] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[s_2^2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[s_n^2],$$

$$E[s^3] = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[s_1^3] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[s_2^3] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[s_n^3].$$

Legyen

$$a_j = \lambda_1 E[s_1] + \lambda_2 E[s_2] + \cdots + \lambda_j E[s_j], \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

és vegyük észre, hogy

$$a_n = a = \lambda W_s.$$

Osztályonként a rendszerben eltöltött átlagos idők

$$W_j = E[w_j] = \frac{1}{1 - a_{j-1}} \left[E[s_j] + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i E[s_i^2]}{2(1 - a_j)} \right],$$

$$a_0 = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

24. Táblázat. M/G/1 Abszoluút prioritásos sorbanállási rendszer

(folytatás)

A megfelelő sorbanállási idők

$$W_{q_j} = E[w_j] - E[s_j], \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

A j -dik sor átlagos hossza

$$L_{q_j} = \lambda_j W_{q_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Az összesített átlagos sorbanállási idő, W_q, az alábbi formában adható meg

$$W_q = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[q_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[q_2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[q_n].$$

Osztályonként a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma

$$L_j = \lambda_j W_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

A rendszerben való átlagos tartózkodási idő

$$W = \frac{\lambda_1}{\lambda} W_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} W_2 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} W_n = W_q + W_s.$$

A sorban tartózkodó igények átlagos száma

$$L_q = \lambda W_q,$$

és a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma

$$L = \lambda W.$$

24. Táblázat. M/G/1 Abszolút prioritásos sorbanállási rendszer (folytatás)

Osztályonként a rendszerben eltöltött idő szórásnégyzete

$$\sigma_{w_j}^2 = \frac{\sigma_{s_j}^2}{(1-a_{j-1})^2} + \frac{E[s_j]\sum\limits_{i=1}^{j-1}\lambda_i E[s_i^2]}{(1-a_{j-1})^3}$$

$$+\frac{\sum\limits_{i=1}^{j}\lambda_i E[s_i^3]}{3(1-a_{j-1})^2(1-a_j)} + \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{j}\lambda_i E[s_i^2]\right)^2}{4(1-a_{j-1})^2(1-a_j)^2}$$

$$+\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{j}\lambda_i E[s_i^2]\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{j-1}\lambda_i E[s_i^2]\right)}{2(1-a_{j-1})^3(1-a_j)}, \quad a_0 = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Az összesített szórásnégyzet

$$\sigma_w^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda}[\sigma_{w_1}^2 + W_1^2] + \frac{\lambda_2}{\lambda}[\sigma_{w_2}^2 + W_2^2]$$

$$+\cdots+\frac{\lambda_n}{\lambda}[\sigma_{w_n}^2 + W_n^2] - W^2.$$

Osztályonként a sorbanállási idő szórásnégyzete

$$\sigma_{q_j}^2 = \sigma_{w_j}^2 - \sigma_{s_j}^2, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Mivel,

$$E[q_j^2] = \sigma_{q_j}^2 + W_{q_j}^2, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

így

$$E[q^2] = \frac{\lambda_1}{\lambda}E[q_1^2] + \frac{\lambda_2}{\lambda}E[q_2^2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}E[q_n^2].$$

Végül

$$\sigma_q^2 = E[q^q] - W_q^2.$$

25. Táblázat. M/G/1 Processzor-osztásos sorbanállási rendszer

Az igények λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek. A kiszolgálási idő eloszlásáról feltesszük, hogy Cox-típusú, azaz sűrűségfüggvényének Laplace-transzformáltja racionális törtfüggvény. Az átlagos kiszolgálási időt jelöljük $1/\mu$- vel. A kiszolgálási elv legyen Processzor Sharing (Processzor-osztásos) amely azt jelenti, hogyha már $n-1$ igény van a rendszerben, akkor az újonnan érkező (és az összes többi) csak μ/n intenitású kiszolgálást kap. Ekkor $p_n = \rho^n(1-\rho)$, $n = 0, 1, \ldots$, ahol $\rho = \lambda/\mu$. Továbbá

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad E[w|s=t] = \frac{t}{1-\rho}, \text{ és } W = \frac{W_s}{1-\rho}.$$

Végül

$$E[q|s=t] = \frac{\rho t}{1-\rho}, \text{ és } W_q = \frac{\rho W_s}{1-\rho}.$$

26. Táblázat. M/G/c Processzor-osztásos sorbanállási rendszer

Az igények λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek. A kiszolgálási idő eloszlásáról feltesszük, hogy Cox-típusú, azaz sűrűségfüggvényének Laplace-transzformáltja racionális törtfüggvény. Az átlagos kiszolgálási időt jelöljük $1/\mu$- vel. Amikor a rendszerben tartózkodó igények száma N kisebb, mint c, akkor minden igényre jut egy saját kiszolgáló, vagyis a kiszolgálási intenzitás minden esetben μ. Amikor azonban $N > c$, akkor minden igény $c\mu/N$ kiszolgálási intenzitást kap. Meg lehet mutatni, hogy ebben az esetben az átlagokra vonatkozó szokásos stacionárius rendszerjellemzők megegyeznek az M/M/c rendszer jellemzőivel. Azonban a tartózkodási idő és várakozási idő eloszlásfüggvényét zárt alakban általában nem tudjuk megadni.

6.18 M/M/c Prioritásos rendszer

27. Táblázat. M/M/c relatív prioritásos (HOL) sorbanállási rendszer

Az n osztályba tartozó igények közül az i-dik osztálybeliek λ_i paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek azzal a megszorítással, hogy mindegyik kiszolgálási ideje ugyanolyan paraméterű exponencionális eloszlású. Nyilvánvalóan az összesített beérkezési folyamat Poisson lesz, melynek paramétere $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$. A kiszolgáló kihasználtsága

$$\rho = \frac{\lambda W_s}{c} = \frac{\lambda}{c\mu},$$

$$W_{q_1} = \frac{C[c,a]W_s}{c(1 - \lambda_1 W_s/c)},$$

és igazak az alábbi összefüggések:

$$W_{q_j} = \frac{C[c,a]W_s}{c\left[1 - \left(W_s \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i\right)/c\right]\left[1 - \left(W_s \sum_{i=1}^{j} \lambda_i\right)/c\right]}, \quad j = 2, \ldots, n.$$

$$W_j = W_{q_j} + W_s, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$L_{q_j} = \lambda_j W_{q_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$L_j = \lambda_j W_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$W_q = \frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{\lambda_2}{\lambda} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}.$$

$$L_q = \lambda W_q.$$

$$W = W_q + W_s.$$

$$L = \lambda W.$$