6. Sorbanállási elméleti képletek

6.1 Jelölések és definíciók

1. Táblázat. Alapvető sorbanállási elméleti jelölések és definíciók

a	$a = \lambda W_s$ forgalmi intenzitás vagy felajánlott terhelés. Nemzetközileg elfogadott mértékegysége az erlang, A.K. Erlang dán mérnök-matematikus tiszteletére, aki elsőként foglalkozott sorbanállási elméleti problémákkal.
$A[t]$	Az érkezési időközök eloszlásfüggvénye. $A[t] = P[r \leq t]$
b	Egy kiszolgáló egység foglaltsági periódusát leíró valószínűségi változó.
$B[c,a]$	Erlang-féle B formula. Nevezetesen annak stacionárius valószínűsége, hogy egy M/M/c/c rendszerben minden kiszolgáló foglalt. Szokás még Erlang-féle veszteség formulának is nevezni.
c	Kiszolgálók száma valamely kiszolgáló egységben.
$C[c,a]$	Erlang-féle C formula. Nevezetesen annak stacionárius valószínűsége, hogy egy M/M/c rendszerben minden kiszolgáló foglalt. Szokás még Erlang-féle késleltetési (vagy várakozási) formulának is nevezni.
C_X^2	Valamely pozitív valószínűségi változó szórási együtthatójának a négyzete, $C_X^2 = \dfrac{D^2[X]}{E[X]^2}$.
D	Konstans vagy determinisztikus érkezési illetve kiszolgálási időre vonatkozó szimbólum.
E_k	k paraméterű Erlang eloszlás jelölése.
$E[N_q \mid N_q > 0]$	Nem üres sorok várható hossza.
$E[q \mid q > 0]$	Várható várakozási idő.
FCFS	Elsőként érkező - elsőként kiszolgált, vagyis érkezési sorrendben történő kiszolgálási elv.
FIFO	Elsőként be - elsőként ki kiszolgálási elv, ugyanaz mint az FCFS.
G	Tetszőleges eloszlású kiszolgálási idő, általában a függetlenséget feltételezzük.

1. Táblázat. Alapvető sorbanállási elméleti jelölések és definíciók (folytatás)

GI	Egymástól független tetszőleges eloszlású beérkezési időközök eloszlásfüggvénye.
H_2	2 állapotú hiperexponenciális eloszlás, könnyen általánosítható k állapotúra.
K	Egy sorbanállási rendszerben tartózkodó igények maximális száma. A véges forrású rendszerek igényeinek a számát is jelölheti.
L	Stacionárius állapotban a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma, vagyis $E[N]$.
$\ln(\cdot)$	Természetes alapú logaritmus.
L_s	Stacionárius állapotban a kiszolgálás alatt levő igények átlagos száma, vagyis $E[N_s]$.
LCFS	Utolsónak érkező - elsőként kiszolgált kiszolgálási elv.
LIFO	Utolsónak be - elsőként ki kiszolgálási elv, ugyanaz mint LCFS.
λ	A rendszerbe jövő igények beérkezési intenzitása.
λ_a	Tényleges átlagos beérkezési intenzitás, pl. az M/M/c/c rendszerben néhány igény elvész.
λ_T	Egységnyi időre eső átlagos áteresztőképesség.
M	Exponenciális eloszlásra vonatkozó szimbólum. (Markov-tulajdonság)
μ	Egy kiszolgáló egységre vonatkozó átlagos kiszolgálási intenzitás, azaz a kiszolgálások befejezésének átlagos intenzitása foglalt egységek esetén.
μ_a, μ_b	Valamely M/H_2/1 rendszerben a 2 állapotú hiperexponenciális eloszlás paraméterei.
$N[t]$	t-edik időpillanatban a rendszerben tartózkodó igények számát leíró valószínűségi változó.
N	Stacionárius állapotban a rendszerben tartózkodó igények számát leíró valószínűségi változó.
$N_q[t]$	t-edik időpillanatban a sorbanálló igények számát leíró valószínűségi változó.
N_q	Stacionárius állapotban a sorbanálló igények számát leíró valószínűségi változó.

1. Táblázat. Alapvető sorbanállási elméleti jelölések és definíciók (folytatás)

N_b	A foglaltsági periódus alatt valamely egység által kiszolgált igények számát leíró valószínűségi változó.
$N_s[t]$	t-edik időpillanatban kiszolgálás alatt levő igények számát leíró valószínűségi változó.
N_s	Egyensúlyi állapotban kiszolgálás alatt levő igények számát leíró valószínűségi változó.
O	A gépkiszolgálási problémánál valamely gép működési ideje.
π_a, π_b	Valamely M/H$_2$/1 rendszerben a hiperexponenciális eloszlás paraméterei.
$\pi_X[r]$	Az X valószínűségi változó r-kvantilise.
$p_n[t]$	Annak valószínűsége, hogy a t-edik időpillanatban n igény tartózkodik a rendszerben.
p_n	Annak stacionárius valószínűsége, hogy n igény tartózkodik a rendszerben.
PRI	Prioritásos kiszolgálási elv.
PS	Processzor-osztásos kiszolgálási elv.
q	Valamely igény várakozási idejét leíró valószínűségi változó.
q_i	A hiperexponenciális eloszlás ún. súly-paraméterei.
q'	Valamely igény feltételes sorbanállási idejét leíró valószínűségi változó.
RSS	Véletlen kiválasztásos kiszolgálási elv.
ρ	Kiszolgáló egység kihasználtsága $= \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{E[N_s]}{c}$.
s	Kiszolgálási időt leíró valószínűségi változó. $E[s] = \frac{1}{\mu}$.
ρ_i	Valamely sorbanállási hálózatban az i-edik csomópont kihasználtsága.
SIRO	Véletlen sorrendben történő kiszolgálási elv, azonos az RSS-el. Vagyis a sorbanálló igények azonos valószínűséggel kerülnek kiszolgálásra.
r	A beérkezési időközöket leíró valószínűségi változó. $E[r] = \frac{1}{\lambda}$.
U	Az egyenletes eloszlás szimbóluma.

1. Táblázat. Alapvető sorbanállási elméleti jelölések és definíciók (folytatás)

w	Valamely igénynek a rendszerben való teljes tartózkodási idejét leíró valószínűségi változó, $w = q + s$.
$W[t]$	A w eloszlásfüggvénye. $W[t] = P[w < t]$.
W	Stacionárius esetben valamely igénynek a rendszerben való tartózkodási ideje, $W = E[w] = W_q + W_s$.
$W_q[t]$	A q eloszlásfüggvénye, $W_q[t] = P[q < t]$.
W_q	Egyensúlyi állapotban valamely igény átlagos várakozási ideje, $W_q = E[q] = W - W_s$.
$W_s[t]$	Az s eloszlásfüggvénye, $W_s[t] = P[s < t]$.
W_s	Az igény átlagos kiszolgálási ideje, $E[s] = \frac{1}{\mu}$.

6.2 A valószínűségi változók közötti összefüggések

2. Táblázat. A valószínűségi változók közötti összefüggések

$a = \frac{E[s]}{E[r]} = \lambda W_s$	Forgalmi intenzitás erlangokban mérve.
$\rho = \frac{a}{c} = \frac{\lambda}{c\mu}$	Kiszolgáló kihasználtsága, egyben annak valószínűsége, hogy egy adott kiszolgáló foglalt.
$w = q + s$	A rendszerben való tartózkodási idő.
$W = W_q + W_s$	Egyensúlyi állapotban a rendszerben való átlagos tartózkodási idő.
$N = N_q + N_s$	Egyensúlyi állapotban a rendszerben tartózkodó igények száma.
$L = \lambda W$	Egyensúlyi állapotban a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma. Ezt az összefüggést gyakran hívják Little-formulának is.
$L_Q = \lambda W_q$	Egyensúlyi állapotban a sorbanálló igények átlagos száma, ezt szintén hívják Little-formulának is.
$L_s = \lambda W_s$	Egyensúlyi állapotban a kiszolgálás alatt levő igények átlagos száma, ezt is szokták (de ritkábban) Little-formulának nevezni.

6.3 M/M/1 Sorbanállási képletek

3. Táblázat. M/M/1 Sorbanállási rendszer

$$\rho = \lambda W_s, \quad p_n = P[N = n] = (1 - \rho)\rho^n, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

$$P[N \geq n] = \rho^n, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

$$L = E[N] = \lambda W = \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad \sigma_N^2 = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}.$$

$$L_q = \lambda W_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho}, \quad \sigma_{N_q}^2 = \frac{\rho^2(1 + \rho - \rho^2)}{(1 - \rho)^2}.$$

$$E[N_q | N_q > 0] = \frac{1}{1 - \rho}, \quad \mathrm{Var}[N_q | N_q > 0] = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}.$$

$$W[t] = P[w \leq t] = 1 - \exp\left(\frac{-t}{W}\right), \quad P[w > t] = \exp\left(\frac{-t}{W}\right).$$

$$W = E[w] = \frac{W_s}{1 - \rho}, \quad \sigma_w^2 = W^2.$$

$$\pi_w[r] = W \ln\left(\frac{100}{100 - r}\right), \quad \pi_w[90] = W \ln 10, \quad \pi_w[95] = W \ln 20$$

$$W_q[t] = P[q \leq t] = 1 - \rho \exp\left(\frac{-t}{W}\right), \quad P[q > t] = \rho \exp\left(\frac{-t}{W}\right).$$

$$W_q = \frac{\rho W_S}{1 - \rho}, \quad \sigma_q^2 = \frac{(2 - \rho)\rho W_s^2}{(1 - \rho)^2}.$$

$$\pi_q[r] = \max\left\{W \ln\left(\frac{100\rho}{100 - r}\right), 0\right\}.$$

$$\pi_q[90] = \max\{W \ln(10\rho), 0\}, \quad \pi_q[95] = \max\{W \ln(20\rho), 0\}.$$

6.4 M/M/1/K Sorbanállási képletek

4. Táblázat. M/M/1/K Sorbanállási rendszer

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(1-a)a^n}{(1-a^{K+1})} & \text{ha } \lambda \neq \mu, \\ \\ \dfrac{1}{K+1} & \text{ha } \lambda = \mu, \end{cases}$$

$n = 0, 1, \cdots, K$, ahol $a = \lambda W_s$.

$\lambda_a = (1 - p_K)\lambda$, a rendszerbe való átlagos érkezési intenzitás.

$$L = \begin{cases} \dfrac{a[1-(K+1)a^K + Ka^{K+1}]}{(1-a)(1-a^{K+1})} & \text{ha } \lambda \neq \mu, \\ \\ \dfrac{K}{2} & \text{ha } \lambda = \mu. \end{cases}$$

$$L_q = L - (1 - p_0), \quad q_n = \frac{p_n}{1 - p_K}, n = 0, 1, \cdots, K - 1.$$

$$W[t] = 1 - \sum_{n=0}^{K-1} q_n Q[n; \mu t],$$

ahol

$$q[n; \mu t] = e^{-\mu t} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu t}{k!}.$$

$$W = \frac{L}{\lambda_a}, \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda_a}.$$

$$W_q[t] = 1 - \sum_{n=0}^{K-2} q_{n+1} Q[n; \mu t].$$

$$E[q|q > 0] = \frac{W_q}{1 - p_0}, \quad \rho = (1 - p_K)a.$$

6.5 M/M/c Sorbanállási képletek

5. Táblázat. M/M/c Sorbanállási rendszer

$$a = \lambda W_s, \quad \rho = \frac{a}{c}$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^c}{c!(1-\rho)}\right]^{-1} = \frac{c!(1-\rho)P[N \geq c]}{a^c}.$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{a^n}{n!} p_0, & \text{ha } n \leq c, \\[2ex] \dfrac{a^n}{c!c^{n-c}} p_0, & \text{ha } n \geq c. \end{cases}$$

$$P[N \geq n] = \begin{cases} p_0 \left[\displaystyle\sum_{k=n}^{c-1} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^c}{c!(1-\rho)}\right] & \text{ha } n < c, \\[3ex] p_0 \left[\dfrac{a^c \rho^{n-c}}{c!(1-\rho)}\right] = P[N \geq c]\rho^{n-c} & \text{ha } n \geq c \end{cases}$$

$$L_q = \lambda W_q = \frac{aP[N \geq c]}{c(1-\rho)},$$

ahol

$$P[N \geq c] = C[c, a] = \frac{\dfrac{a^c}{c!}}{(1-\rho)\displaystyle\sum_{n=0}^{c-1} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^c}{c!}}.$$

5. Táblázat. M/M/c Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$\sigma_{N_q}^2 = \frac{\rho C[c,a][1+\rho-\rho C[c,a]]}{(1-\rho)^2}.$$

$$L = \lambda W = L_q + a.$$

$$\sigma_N^2 = \sigma_{N_q}^2 + a(1 + P[N \geq c]).$$

$$W_q[0] = 1 - P[N \geq c], \quad W_q[t] = 1 - P[N \geq c]\exp[-c\mu t(1-\rho)],$$

$$W_q = \frac{P[N \geq c]W_s}{c(1-\rho)}.$$

$$\sigma_q^2 = \frac{[2 - C[c,a]]C[c,a]W_s^2}{c^2(1-\rho)^2}.$$

$$\pi_q[r] = \max\{0, \frac{W_s}{c(1-\rho)} \ln\left(\frac{100C[c,a]}{100-r}\right)\}.$$

$$\pi_q[90] = \max\{0, \frac{W_s}{c(1-\rho)} \ln(10C[c,a])\}.$$

$$\pi_q[95] = \max\{0, \frac{W_s}{c(1-\rho)} \ln(20C[c,a])\}.$$

$$W_{q'} = P[q \leq t | q > 0] = 1 - \exp\left(\frac{-ct(1-\rho)}{W_s}\right), \quad t > 0.$$

$$E[q|q>0] = E[q'] = \frac{W_s}{c(1-\rho)}.$$

$$\mathrm{Var}[q|q>0] = \left(\frac{W_s}{c(1-\rho)}\right)^2.$$

5. Táblázat. M/M/c Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$W[t] = \begin{cases} 1 + C_1 e^{-\mu t} + C_2 e^{-c\mu t(1-\rho)} & \text{ha } a \neq c-1 \\ \\ 1 - \{1 + C[c,a]\mu t\} e^{-\mu t} & \text{ha } a = c-1 \end{cases}$$

ahol

$$C_1 = \frac{P[N \geq c]}{1 - c(1-\rho)} - 1,$$

és

$$C_2 = \frac{P[N \geq c]}{c(1-\rho) - 1}.$$

$W = W_q + W_s.$

$$E[w^2] = \begin{cases} \dfrac{2P[N \geq c][1 - c^2(1-\rho)^2]W_s^2}{(a+1-c)c^2(1-\rho)^2} + 2W_s^2 & \text{ha } a \neq c-1 \\ \\ 2\{2P[N \geq c] + 1\}W_s^2 & \text{ha } a = c-1 \end{cases}$$

$\sigma_w^2 = E[w^2] - W^2.$

$\pi_w[90] \approx W + 1.3\sigma_w, \quad \pi_w[95] \approx W + 2\sigma_w$ (James Martin eredménye).

6.6 M/M/2 Sorbanállási képletek

6. Táblázat. M/M/2 Sorbanállási rendszer

$$a = \lambda W_s, \quad \rho = \frac{a}{2}$$

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho}.$$

$$p_n = 2p_0\rho^n, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$P[N \geq n] = \frac{2\rho^n}{1+\rho}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$L_q = \lambda Wq = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2},$$

$P[N \geq 2] = C[2, a]$ annak stacionárius valószínűsége, hogy egy érkező igénynek sorba kell állni. $P[N \geq 2]$ a következő alakban adható meg

$$P[N \geq 2] = C[2, a] = \frac{2\rho^2}{1+\rho}.$$

$$\sigma^2_{N_q} = \frac{2\rho^3[(1+\rho)^2 - 2\rho^3]}{(1-\rho^2)^2}.$$

$$L = \lambda W = L_q + a = \frac{2\rho}{1-\rho^2}.$$

$$\sigma^2_N = \sigma^2_{N_q} + \frac{2\rho(1+\rho+2\rho^2)}{1+\rho}.$$

$$W_q[0] = \frac{1+\rho-2\rho^2}{1+\rho}.$$

6. Táblázat. M/M/2 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$W_q[t] = 1 - \frac{2\rho^2}{1+\rho}\exp[-2\mu t(1-\rho)]$$

$$W_q = \frac{\rho^2 W_s}{1-\rho^2}.$$

$$\sigma_q^2 = \frac{\rho^2(1+\rho-\rho^2)W_s^2}{(1-\rho^2)^2}.$$

$$\pi_q[r] = \max\{0, \frac{W_s}{2(1-\rho)}\ln\left(\frac{200\rho^2}{(100-r)(1+\rho)}\right)\}.$$

$$\pi_q[90] = \max\{0, \frac{W_s}{2(1-\rho)}\ln\left(\frac{20\rho^2}{1+\rho}\right)\}.$$

$$\pi_q[95] = \max\{0, \frac{W_s}{2(1-\rho)}\ln\left(\frac{40\rho^2}{1+\rho}\right)\}.$$

$$W_{q'} = P[q \le t | q > 0] = 1 - \exp\left(\frac{-2t(1-\rho)}{W_s}\right), \quad t > 0.$$

$$E[q|q>0] = E[q'] = \frac{W_s}{2(1-\rho)}.$$

$$\mathrm{Var}[q|q>0] = \left(\frac{W_s}{2(1-\rho)}\right)^2.$$

$$W[t] = \begin{cases} 1 + \dfrac{1-\rho}{1-\rho^2-2\rho^2}e^{-\mu t} + \dfrac{2\rho^2}{1-\rho-2\rho^2}e^{-2\mu t(1-\rho)} & \text{ahol } a \neq 1 \\ 1 - \{1 + \dfrac{\mu t}{3}\}e^{-\mu t} & \text{ahol } a = 1 \end{cases}$$

6. Táblázat. M/M/2 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$W = W_q + W_s = \frac{W_s}{1-\rho^2}.$$

$$E[w^2] = \begin{cases} \dfrac{\rho^2[1-4(1-\rho)^2]W_s^2}{(2\rho-1)(1-\rho)(1-\rho^2)} + 2W_s^2 & \text{ha } a \neq 1 \\ \\ \dfrac{10}{3}W_s^2 & \text{ha } a = 1 \end{cases}$$

$$\sigma_w^2 = E[w^2] - W^2.$$

$$\pi_w[90] \approx W + 1.3\sigma_w, \quad \pi_w[95] \approx W + 2\sigma_w$$

6.7 M/M/c/c Sorbanállási képletek

7. Táblázat. M/M/c/c Sorbanállási rendszer (M/M/c veszteséges rendszer)

$a = \lambda W_s$

$$p_n = \frac{\dfrac{a^n}{n!}}{1 + a + \dfrac{a^2}{2!} + \cdots + \dfrac{a^c}{c!}} \qquad n = 0, 1, \ldots, c.$$

p_c annak stacionárius valószínűsége, hogy minden kiszolgáló egység foglalt. Ezt Erlang-féle B-formulának is nevezik, így $B[c, a]$-ra

$$B[c, a] = \frac{\dfrac{a^c}{c!}}{1 + a + \dfrac{a^2}{2!} + \cdots + \dfrac{a^c}{c!}}.$$

$\lambda_a = \lambda(1 - B[c, a])$ a rendszerbe ténylegesen beérkező igények átlagos intenzitása. Így a kiszolgáló tényleges kihaszáltsága, ρ, a következő alakban adható meg

$$\rho = \frac{\lambda_a W_s}{c}.$$

$$L = \lambda_a W_s.$$

$$W = \frac{L}{\lambda_a} = W_s.$$

$$W[t] = 1 - \exp\left(\frac{-t}{W_s}\right).$$

7. Táblázat. M/M/c/c Sorbanállási rendszer (M/M/c veszteséges rendszer) (folytatás)

Az utolsó képletet kivéve az összes formula igaz az M/G/c/c rendszerre is. Ilyenkor

$W[t] = W_s[t].$

ahol $W_s[\cdot]$ a kiszolgálási idő eloszlásfüggvénye.

6.8 M/M/c/K Sorbanállási képletek

8. Táblázat. M/M/c/K Sorbanállási rendszer

$a = \lambda W_s.$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{c} \frac{a^n}{n!} + \frac{a^c}{c!} \sum_{n=1}^{K-c} \left(\frac{a}{c} \right)^n \right]^{-1}.$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{a^n}{n!} p_0 & \text{ha } n = 1, 2, \ldots, c, \\ \dfrac{a^n}{c!} \left(\dfrac{a}{c} \right)^{n-c} p_0 & \text{ha } n = c+1, \ldots, K. \end{cases}$$

A rendszerbe ténylegesen beérkező igények átlagos intenzitása $\lambda_a = \lambda(1 - p_K)$.

A kiszolgáló egység tényleges kihasználtsága, ρ, a következő alakot ölti

$$\rho = \frac{\lambda_a W_s}{c}.$$

8. Táblázat. M/M/c/K Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$L_q = \frac{a^c r p_0}{c!(1-r)^2}\left[1 + (K-c)r^{K-c+1} - (K-c+1)r^{K-c}\right],$$

ahol

$$r = \frac{a}{c}.$$

$$L = L_q + E[N_s] = L_q + \sum_{n=0}^{c-1} np_n + c\left(1 - \sum_{n=0}^{c-1} p_n\right).$$

A Little-formula alapján

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda_a},$$

és

$$W = \frac{L}{\lambda_a}.$$

$$q_n = \frac{p_n}{1-p_K}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, K-1,$$

ahol q_n annak stacionárius valószínűsége, hogy egy a rendszerbe érkező igény már n másik igényt talál itt.

$$E[q|q>0] = \frac{W_q}{1 - \sum_{n=0}^{c-1} q_n}.$$

6.9 M/M/∞ Sorbanállási képletek

9. Táblázat. M/M/∞ Sorbanállási rendszer

$a = \lambda W_s.$

$$p_n = \frac{a^n}{n!}e^{-a}, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

Mivel N Poisson-eloszlást követ, ezért

$L = a$ és $\sigma_N^2 = a.$

A Little-formula szerint

$$W = \frac{L}{\lambda} = W_s.$$

Mivel nincs várakozás, ezért
$W_q = L_q = 0,$
és
$W[t] = P[w \leq t] = W_s[t];$
azaz w-nek ugyanaz az eloszlása, mint s-nek.
A fenti képletek változatlanok maradnak az M/G/∞ rendszerre is.

6.10 M/M/1/K/K Sorbanállási képletek

10. Táblázat. M/M/1/K/K Sorbanállási rendszer

A gépek átlagos működési ideje (néha a *meghibásodásig elteltt átlagos idő*nek is szokás nevezni), a rövidítés is ebből adódik

$$E[O] = \frac{1}{\alpha}.$$

A gépek átlagos javítási ideje

$$W_s = \frac{1}{\mu}.$$

p_0 annak stacionárius valószínűsége, hogy minden gép működik, melyre

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{K} \frac{K!}{(K-k)!} \left(\frac{W_s}{E[O]}\right)^k\right]^{-1} = B[K, z],$$

ahol $B[\cdot,\cdot]$ az Erlang-féle B formula és

$$z = \frac{E[O]}{W_s}.$$

p_n annak stacionárius valószínűsége, hogy n gép meghibásodott, az alábbi alakban adható meg

$$p_n = \frac{K!}{(K-n)!} z^{-n} p_0, \quad n = 0, 1, \ldots, K,$$

melyet a következőképpen is felírhatunk

$$p_n = \frac{\dfrac{z^{K-n}}{(K-n)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{K} \frac{z^k}{k!}}, \quad n = 0, 1, \ldots, K.$$

$$\rho = 1 - p_0.$$

$$\lambda = \frac{\rho}{W_s}.$$

$$W = \frac{K}{\lambda} - E[O].$$

10. Táblázat. M/M/1/K/K Sorbanállási rendszer (folytatás)

$L = \lambda W.$

$W_q = W - W_s.$

$$q_n = \frac{(K-n)p_n}{K-L} = \frac{\dfrac{z^{K-n-1}}{(K-n-1)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{K-1} \frac{z^k}{k!}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, K-1,$$

ahol q_n annak stacionárius valószínűsége, hogy egy meghibásodott gép n további gépet talál a javító egységnél.

$$W[t] = P[w \le t] = 1 - \frac{Q(K-1; z+t\mu)}{Q(K-1; \mu)}, \quad t \ge 0,$$

ahol

$$Q(n; x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

$$W_q[t] = P[q \le t] = 1 - \frac{Q(K-2; z+t\mu)}{Q(K-1; z)}, \quad t \ge 0,$$

$$E[q|q>0] = \frac{W_q}{1-q_0}.$$

6.11 M/G/1/K/K Sorbanállási képletek

11. Táblázat. M/G/1/K/K Sorbanállási rendszer

A gépek átlagos működési ideje (néha a *meghibásodásig eltelt átlagos idő*nek is szokás nevezni), a rövidítés is ebből adódik

$$E[O] = \frac{1}{\alpha}.$$

A gépek átlagos javítási ideje

$$W_s = \frac{1}{\mu}.$$

p_0 annak stacionárius valószínűsége, hogy minden gép működik, melyre

$$p_0 = \left[1 + \frac{KW_s}{E[O]} \sum_{n=0}^{K-1} \binom{K-1}{n} B_n \right]^{-1},$$

ahol

$$B_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1 - W_s^*[i\alpha]}{W_s^*[i\alpha]} \right) & n = 1, 2, \ldots, K-1, \end{cases}$$

és $W_s^*[\theta]$ az s Laplace-Stieltjes transzformáltja.

$$\rho = 1 - p_0.$$

$$\lambda = \frac{\rho}{W_s}.$$

$$W = \frac{K}{\lambda} - E[O].$$

$$L = \lambda W.$$

$$W_q = W - W_s.$$

$$L_q = \lambda W_q.$$

6.12 M/M/c/K/K Sorbanállási képletek

12. Táblázat. M/M/c/K/K Sorbanállási rendszer

A gépek átlagos működési ideje (néha a *meghibásodásig eltelt átlagos idő*nek is szokás nevezni), a rövidítés is ebből adódik

$$E[O] = \frac{1}{\alpha}.$$

A gépek átlagos javítási ideje

$$W_s = \frac{1}{\mu}.$$

p_0 annak stacionárius valószínűsége, hogy minden gép működik, melyre

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{c} \binom{K}{k} z^{-k} + \sum_{k=c+1}^{K} \frac{k!}{c!c^{k-c}} \binom{K}{k} z^{-k} \right]^{-1},$$

ahol

$$z = \frac{E[O]}{W_s}.$$

p_n annak stacionárius valószínűsége, hogy n gép meghibásodott, az alábbi alakban adható meg

$$p_n = \begin{cases} \binom{K}{n} z^{-n} p_0 & n = 0, 1, \ldots, c \\ \frac{n!}{c!c^{n-c}} \binom{K}{n} z^{-n} p_0 & n = c+1, \ldots, K. \end{cases}$$

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{K} (n-c) p_n.$$

$$W_q = \frac{L_q(E[O] + W_s)}{K - L_q}.$$

$$\lambda = \frac{K}{E[O] + W_q + W_s}.$$

$$W = \frac{K}{\lambda} - E[O].$$

$$L = \lambda W.$$

12. Táblázat. M/M/c/K/K Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$q_n = \frac{(K-n)p_n}{K-L},$$

ahol q_n annak stacionárius valószínűsége, hogy egy meghibásodott gép n további gépet talál a javító egységnél. A q_n-t jelöljük $q_n[K]$-val, hogy hangsúlyozzuk a K darab gépre vonatkozó képletet. Meg lehet mutatni, hogy

$$q_n[K] = p_n[K-1], \quad n = 0, 1, \ldots, K-1.$$

$$p_n[K-1] = \frac{c^c}{c!} \frac{p(K-n-1; cz)}{p(K-1; cz)} p_0[K-1],$$

ahol, természetesen,

$$p(k; \alpha) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}.$$

$$W_q[t] = P[q \leq t] = 1 - \frac{c^c Q(K-c-1; cz) p_0[K-1]}{c! p(K-1; cz)}, t \geq 0,$$

ahol

$$Q(k; \alpha) = e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{k} \frac{\alpha^n}{n!}.$$

$$W[t] = P[w \leq t] = 1 - C_1 \exp(-t/W_s) + C_2 \frac{Q(K-c-1; c(z+t\mu))}{Q(K-c-1; cz)},$$

$t \geq 0$,

ahol $C_1 = 1 + C_2$ és

$$C_2 = \frac{c^c Q(K-c-1; cz)}{c!(c-1)(K-c-1)! p(K-1; cz)} p_0[K-1].$$

Így annak stacionárius valószínűsége, hogy egy meghibásodott gépnek várakozni kell

$$D = \sum_{n=c}^{K-1} q_n = 1 - \sum_{n=0}^{c-1} q_n.$$

$$E[q|q > 0] = \frac{W_q}{D}.$$

6.13 D/D/c/K/K Sorbanállási képletek

13. Táblázat. D/D/c/K/K Sorbanállási rendszer

A gépek átlagos működési ideje (néha a *meghibásodásig eltelt átlagos idő*nek is szokás nevezni), a rövidítés is ebből adódik

$$E[O] = \frac{1}{\alpha}.$$

A gépek átlagos javítási ideje

$$W_s = \frac{1}{\mu}.$$

$$\rho = \min\{1, \frac{K}{c(1+z)}\},$$

ahol

$$z = \frac{E[O]}{W_s}.$$

$$\lambda = c\rho\mu = \frac{c\rho}{W_s}.$$

$$W = \frac{K}{\lambda} - E[O].$$

$$L = \lambda W.$$

$$W_q = W - W_s.$$

$$L_q = \lambda W_q.$$

A képletek levezetése az alábbi cikkben található: "A straightforward model of computer performance prediction" by John W. Boyse és David R. Warn in *ACM Comput. Surveys*, **7(2)**, (June 1972).

6.14 M/G/1 Sorbanállási képletek

14. Táblázat. M/G/1 Sorbanállási rendszer

Jelölje N stacionáris esetben a rendszerben tartózkodó igények számát. Ekkor N generátorfüggvényére igaz az alábbi összefüggés

$$g_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = \frac{(1-\rho)(1-z)W_s^*[\lambda(1-z)]}{W_s^*[\lambda(1-z)]-z},$$

ahol W_s^* az s kiszolgálási idő Laplace-Stieltjes transzformáltja. w és q-ra vonatkozó Laplace-Stieltjes transzformáltak az alábbiak

$$W^*[\theta] = \frac{(1-\rho)\theta W_s^*[\theta]}{\theta-\lambda+\lambda W_s^*[\theta]},$$

és

$$W_q^*[\theta] = \frac{(1-\rho)\theta}{\theta-\lambda+\lambda W_s^*[\theta]}.$$

Különböző szerzők a fenti egyenleteket *Hincsin transzformált egyenlet*nek hívják. Annak stacionáris valószínűsége, hogy a rendszer üres, $p_0 = 1-\rho$, ahol a kiszolgáló kihasználtsága $\rho = \lambda W_s$. A kiszolgáló foglaltságára adódó valószínűség $P[N \geq 1] = \rho$.

$$W_q = \frac{\lambda E[s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho W_s}{1-\rho}\left(\frac{1+C_s^2}{2}\right) \text{ (Pollaczek formula).}$$

$$L_q = \lambda W_q.$$

$$\sigma_{N_q}^2 = \frac{\lambda^3 E[s^3]}{3(1-\rho)} + \left(\frac{\lambda^2 E[s^2]}{2(1-\rho)}\right)^2 + \frac{\lambda^2 E[s^2]}{2(1-\rho)}.$$

14. Táblázat. M/G/1 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$E[q|q>0] = \frac{W_s}{1-\rho}\left(\frac{1+C_s^2}{2}\right).$$

$$E[q^2] = 2W_q^2 + \frac{\lambda E[s^3]}{3(1-\rho)}.$$

$$\sigma_q^2 = E[q^2] - W_q^2.$$

$$W = W_q + W_s.$$

$$L = \lambda W = L_q + \rho.$$

$$\sigma_N^2 = \frac{\lambda^3 E[s^3]}{3(1-\rho)} + \left(\frac{\lambda^2 E[s^2]}{2(1-\rho)}\right)^2 + \frac{\lambda^2(3-2\rho)E[s^2]}{2(1-\rho)} + \rho(1-\rho).$$

$$E[w^2] = E[q^2] + \frac{E[s^2]}{1-\rho}.$$

$$\sigma_w^2 = E[w^2] - W^2.$$

$$\pi_w[90] \approx W + 1.3\sigma_w, \quad \pi_w[95] \approx W + 2\sigma_w.$$

15. Táblázat. M/H_2/1 Sorbanállási rendszer

Ekkor

$$g_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n = C_1\frac{z_1}{z_1-z} + C_2\frac{z_2}{z_2-z},$$

ahol z_1 és z_2 az alábbi egyenlet gyökei

$$\rho_1\rho_2 z^2 - (\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)z + 1 + \rho_1 + \rho_2 - \rho = 0,$$

ahol

$$\rho = \lambda W_s,$$

15. Táblázat. M/H_2/1 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$\rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i}, \quad i = 1, 2,$$

$$C_1 = \frac{(z_1 - 1)(1 - \rho z_2)}{z_1 - z_2},$$

és

$$C_2 = \frac{(z_2 - 1)(1 - \rho z_1)}{z_2 - z_1}.$$

A $g_N(z)$ adódóan kapjuk, hogy

$$p_n = C_1 z_1^{-n} + C_2 z_2^{-n}, \quad n = 0, 1, \cdots.$$

Speciálisan, $p_0 = 1 - \rho$.

$$P[N \geq n] = C_1 \frac{z_1^{-n+1}}{z_1 - 1} - C_2 \frac{z_2^{-n+1}}{z_2 - 1}.$$

Továbbá,

$$P[N \geq 1] = \rho.$$

$$W_q[t] = P[q \leq t] = 1 - C_5 e^{-at} - C_6 e^{-bt}, \; t \geq 0,$$

ahol $a = -\zeta_1, \; b = -\zeta_2$, ζ_1, ζ_2 gyökei a

$$\theta^2 + (\mu_1 + \mu_2 - \lambda)\theta + \mu_1 \mu_2 (1 - \rho) = 0,$$

egyenletnek,

15. Táblázat. M/H_2/1 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$C_5 = \frac{\lambda(1-\rho)\zeta_1 + \rho(1-\rho)\mu_1\mu_2}{a(\zeta_1-\zeta_2)}$$

és

$$C_6 = \frac{\lambda(1-\rho)\zeta_2 + \rho(1-\rho)\mu_1\mu_2}{a(\zeta_2-\zeta_1)}.$$

$$W_q = \frac{\lambda E[s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho W_s}{1-\rho}\left(\frac{1+C_s^2}{2}\right). \text{ (Pollaczek formula)}$$

$$E[q|q>0] = \frac{W_s}{1-\rho}\left(\frac{1+C_s^2}{2}\right).$$

$$E[q^2] = 2W_q^2 + \frac{\lambda E[s^3]}{3(1-\rho)}.$$

Ha ebbe a képletbe behelyettesítjük a

$$E[s^3] = \frac{6q_1}{\mu_1^3} + \frac{6q_2}{\mu_2^3},$$

akkor

$$\sigma_q^2 = E[q^2] - W_q^2.$$

$$W[t] = P[w \le t] = 1 - \pi_a e^{-\mu_a t} - \pi_b e^{-\mu_b t}, \quad t \ge 0,$$

ahol

$$\pi_a = C_1\frac{z_1}{z_1-1},$$

$$\pi_b = C_2\frac{z_2}{z_2-1},$$

15. Táblázat. M/H_2/1 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$\mu_a = \lambda(z_1 - 1),$$

és

$$\mu_b = \lambda(z_2 - 1).$$

$$W = W_q + W_s.$$

$$E[w^2] = E[q^2] + \frac{E[s^2]}{1-\rho},$$

ahol természetesen

$$E[s^2] = \frac{2q_1}{\mu_1^2} + \frac{2q_2}{\mu_2^2}.$$

$$\sigma_w^2 = E[w^2] - W^2.$$

$$C_w^2 = \frac{E[w^2]}{W^2} - 1.$$

$$L_q = \lambda W = \frac{\rho^2}{1-\rho}\left(\frac{1+C_s^2}{2}\right).$$

$$\sigma_{N_q}^2 = \frac{\lambda^3 E[s^3]}{3(1-\rho)} + \left(\frac{\lambda^2 E[s^2]}{2(1-\rho)}\right)^2 + \frac{\lambda^2 E[s^2]}{2(1-\rho)}.$$

$$L = \lambda W = L_q + \rho.$$

$$\sigma_N^2 = \frac{\lambda^3 E[s^3]}{3(1-\rho)} + \left(\frac{\lambda^2 E[s^2]}{2(1-\rho)}\right)^2 + \frac{\lambda^2(3-2\rho)E[s^2]}{2(1-\rho)} + \rho(1-\rho).$$

16. Táblázat. M/Gamma/1 Sorbanállási rendszer

Mivel s gamma eloszlású, ezért

$$E[s^n] = \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{\alpha^n}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Továbbá

$$C_s^2 = \frac{1}{\beta},$$

így

$$E[s^2] = W_s^2(1 + C_s^2),$$

$$E[s^3] = W_s^3(1 + C_s^2)(1 + 2C_s^2),$$

és

$$E[s^n] = W_s^n \prod_{k=1}^{n-1}(1 + kC_s^2), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Ekkor

$$W_q = \frac{\lambda E[s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho W_s}{1-\rho}\left(\frac{1+C_s^2}{2}\right),$$

$$L_q = \lambda W_q,$$

$$\sigma_{N_q}^2 = \frac{\rho^2(1+C_s^2)}{2(1-\rho)}\left[1 + \frac{\rho^2(1+C_s^2)}{2(1-\rho)} + \frac{2\rho(1+2C_s^2)}{3}\right],$$

$$E[q|q>0] = \frac{W_s}{1-\rho}\left(\frac{1+C_s^2}{2}\right),$$

$$E[q^2] = 2W_q^2 + \frac{\rho W_s^2(1+C_s^2)(1+2C_s^2)}{3(1-\rho)},$$

$$\sigma_q^2 = E[q^2] - W_q^2,$$

$$W = W_q + W_s,$$

16. Táblázat. M/Gamma/1 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$L = \lambda W = L_q + \rho.$

$$\sigma_N^2 = \frac{\rho^3(1+C_s^2)(1+2C_s^2)}{3(1-\rho)} + \left(\frac{\rho^2(1+C_s^2)}{2(1-\rho)}\right)^2 + \frac{\rho^2(3-2\rho)(1+C_s^2)}{2(1-\rho)} + \rho(1-\rho).$$

$$E[w^2] = E[q^2] + \frac{W_s^2(1+C_s^2)}{1-\rho}.$$

$\sigma_w^2 = E[w^2] - W^2.$

$\pi_w[90] \approx W + 1.3\sigma_w, \quad \pi_w[95] \approx W + 2\sigma_w.$

17. Táblázat. M/E_k/1 Sorbanállási rendszer

Mivel s Erlang-k eloszlású, ezért

$$E[s^n] = \left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1+\frac{n-1}{k}\right)W_s^n, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

így

$$E[s^2] = W_s^2\left(1+\frac{1}{k}\right),$$

és

$$E[s^3] = W_s^3\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right).$$

Ekkor

$$W_q = \frac{\lambda E[s^2]}{2(1-\rho)} = \frac{\rho W_s}{1-\rho}\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{2}\right). \text{ (Pollaczek's formula)}$$

$L_q = \lambda W_q.$

$$\sigma_{N_q}^2 = \frac{\rho^2(1+k)}{2k(1-\rho)}\left[1 + \frac{\rho^2(1+k)}{2k(1-\rho)} + \frac{2\rho(k+2)}{3k}\right].$$

17. Táblázat. M/E_k/1 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$E[q|q>0] = \frac{W_s}{1-\rho}\left(\frac{1+\frac{1}{k}}{2}\right).$$

$$E[q^2] = 2W_q^2 + \frac{\rho W_s^2(k+1)(k+2)}{3k^2(1-\rho)}.$$

$$\sigma_q^2 = E[q^2] - W_q^2.$$

$$W = W_q + W_s.$$

$$L = \lambda W = L_q + \rho.$$

$$\sigma_N^2 = \frac{\rho^3(k+1)(k+2)}{3k^2(1-\rho)} + \left(\frac{\rho^2(1+\frac{1}{k})}{2(1-\rho)}\right)^2 + \frac{\rho^2(3-2\rho)(1+\frac{1}{k})}{2(1-\rho)} + \rho(1-\rho).$$

$$E[w^2] = E[q^2] + \frac{W_s^2(1+\frac{1}{k})}{1-\rho}.$$

$$\sigma_w^2 = E[w^2] - W^2.$$

$$\pi_w[90] \approx W + 1.3\sigma_w, \quad \pi_w[95] \approx W + 2\sigma_w.$$

18. Táblázat. M/D/1 Sorbanállási rendszer

Mivel s konstans, ezért

$$E[s^n] = W_s^n, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

így

$$g_N(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)}{1 - ze^{\rho(1-z)}}.$$

Ha feltesszük, hogy

$$|ze^{\rho(1-z)}| < 1,$$

$g_N(z)$ hatványsorba fejthető

$$g_N(z) = (1-\rho)(1-z)\sum_{j=0}^{\infty}\left[ze^{\rho(1-z)}\right]^j.$$

Ekkor megmutatható, hogy

$$p_1 = (1-\rho)(e^{\rho} - 1),$$

és

$$p_n = (1-\rho)\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{n-j}(j\rho)^{n-j-1}(j\rho + n - j)e^{j\rho}}{(n-j)!} \quad n = 2, 3, \cdots.$$

Továbbá

$$W_q[t] = \sum_{n=0}^{k-1} p_n + p_k\left(\frac{t-(k-1)W_s}{W_s}\right),$$

ahol $(k-1)W_s \leq t \leq kW_s, \quad k = 1, 2, \cdots.$

18. Táblázat. M/D/1 Sorbanállási rendszer (folytatás)

Így,

$W_q[0] = p_0.$

$W_q = \dfrac{\rho W_s}{2(1-\rho)}.$

$W[q|q>0] = \dfrac{W_s}{2(1-\rho)}.$

$E[q^2] = 2W_q^2 + \dfrac{\rho W_s^2}{3(1-\rho)}.$

$\sigma_q^2 = E[q^2] - W_q^2.$

$L_q = \lambda W_q = \dfrac{\rho^2}{2(1-\rho)}.$

$\sigma_{N_q}^2 = \dfrac{\rho^3}{3(1-\rho)} + \left[\dfrac{\rho^2}{2(1-\rho)}\right]^2 + \dfrac{\rho^2}{2(1-\rho)}.$

$$W[t] = \begin{cases} 0 & \text{ha } t < W_s \\ \sum\limits_{n=0}^{k-1} p_n + p_k\left(\frac{t-kW_s}{W_s}\right) & \text{ha } t \geq W_s \end{cases},$$

ahol

$kW_s \leq t < (k+1)W_s, \quad k = 1, 2, \cdots.$

$W = W_q + W_s.$

$E[w^2] = E[q^2] + \dfrac{W_s^2}{1-\rho}.$

$\sigma_w^2 = E[w^2] - W^2.$

$L = \lambda W = Ł_q + \rho.$

$\sigma_N^2 = \dfrac{\rho^3}{3(1-\rho)} + \left(\dfrac{\rho^2}{2(1-\rho)}\right)^2 + \dfrac{\rho^2(3-2\rho)}{2(1-\rho)} + \rho(1-\rho).$

6.15 GI/M/1 Sorbanállási képletek

19. Táblázat. GI/M/1 Sorbanállási rendszer

Annak stacionárius valószínűsége, hogy valamely beérkező igény a rendszert üresen találja, egyértelmű megoldása az $1 - \pi_0 = A^*[\mu\pi_0]$ egyenletnek, melyre $0 < \pi_0 < 1$, ahol $A^*[\Theta]$ a τ beérkezési időköz Laplace-Stieltjes transzformáltja. A rendszerben tartózkodó igények eloszlása $\{p_n\}$, ahol $p_0 = P[N = 0] = 1 - \rho,\ p_n = \rho\pi_0(1 - \pi_0)^{n-1},\ n = 1, 2, \cdots$, továbbá

$L = \frac{\rho}{\pi_0}$, és $\sigma_N^2 = \frac{\rho(2-\pi_0-\rho)}{\pi_0^2}$.

$$L_q = \frac{(1 - \pi_0)\rho}{\pi_0}.$$

$$\sigma_{N_q}^2 = \frac{\rho(1 - \pi_0)(2 - \pi_0 - \rho(1 - \pi_0))}{\pi_0^2}.$$

$$E[N_q|N_q > 0] = \frac{1}{\pi_0}.$$

$$W = \frac{W_s}{\pi_0}.$$

$$W[t] = P[w \leq t] = 1 - \exp(-t/W).$$

$$\pi_w[r] = W \ln \left[\frac{100}{100 - r}\right].$$

$$\pi_w[90] = W \ln 10, \quad \pi_w[95] = W \ln 20.$$

$$W_q = (1 - \pi_0)\frac{W_s}{\pi_0}.$$

19. Táblázat. GI/M/1 Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$\sigma_q^2 = (1-\pi_0^2)\left(\frac{W_s}{\pi_0}\right)^2.$$

$$W_q[t] = P[q \le t] = 1 - (1-\pi_0)\exp(-t/W).$$

$$\pi_q[r] = \max\left\{0, W\ln\left(\frac{100(1-\pi_0)}{100-r}\right)\right\}.$$

q', a feltételes várakozási idő eloszlása megegyezik a w eloszlásával.

20. Táblázat. π_0 ρ függvényében GI/M/1 rendszernél 1

ρ	E_2	E_3	U	D	H_2	H_2
0.100	0.970820	0.987344	0.947214	0.999955	0.815535	0.810575
0.200	0.906226	0.940970	0.887316	0.993023	0.662348	0.624404
0.300	0.821954	0.868115	0.817247	0.959118	0.536805	0.444949
0.400	0.724695	0.776051	0.734687	0.892645	0.432456	0.281265
0.500	0.618034	0.669467	0.639232	0.796812	0.343070	0.154303
0.600	0.504159	0.551451	0.531597	0.675757	0.263941	0.081265
0.700	0.384523	0.626137	0.412839	0.533004	0.191856	0.044949
0.800	0.260147	0.289066	0.284028	0.371370	0.124695	0.024404
0.900	0.131782	0.147390	0.146133	0.193100	0.061057	0.010495
0.950	0.066288	0.074362	0.074048	0.098305	0.030252	0.004999
0.980	0.026607	0.029899	0.029849	0.039732	0.012039	0.001941
0.999	0.001333	0.001500	0.001500	0.001999	0.000600	0.000095

1 az első H_2 eloszlásnál $q_1 = 0.4$, $\mu_1 = 0.5\lambda$, $\mu_2 = 3\lambda$. A második H_2 eloszlásnál $q_1 = 0.024405$, $\mu_1 = 2q_1\lambda$, és $\mu_2 = 2q_2\lambda$.

6.16 GI/M/c Sorbanállási képletek

21. Táblázat. GI/M/c Sorbanállási rendszer

Legyen $\pi_n, n = 0, 1, 2, \cdots$ az érkezési pillanatokban a rendszerben tartózkodó igények stacionáris eloszlása. Ekkor

$$\pi_n = \begin{cases} \sum\limits_{i=n}^{c-1} (-1)^{i-n} \binom{i}{n} U_i, & n = 0, 1, \ldots, c-2 \\ D\omega^{n-c}, & n = c-1, c, \ldots, \end{cases}$$

ahol ω a $\omega = A^*[c\mu(1-\omega)]$ egyenlet egyértelmű megoldása, $0 < \omega < 1$,

$$g_j = A^*[j\mu], \quad j = 1, 2, \ldots, c,$$

$$C_j = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ \prod\limits_{i=1}^{j} \left(\frac{g_i}{1-g_i}\right), & j = 1, 2, \ldots, c, \end{cases}$$

$$D = \left[\frac{1}{1-\omega} + \sum_{j=1}^{c} \frac{\binom{c}{j}}{C_j(1-g_j)} \left(\frac{c(1-g_j)-j}{c(1-\omega)-j} \right) \right]^{-1}$$

és

$$U_n = DC_n \sum_{j=n+1}^{c} \frac{\binom{c}{j}}{C_j(1-g_j)} \left(\frac{c(1-g_j)-j}{c(1-\omega)-j} \right), \quad n = 0, 1, \ldots, c-1.$$

21. Táblázat. GI/M/c Sorbanállási rendszer (folytatás)

$$W_q[t] = P[q \le t] = 1 - P[q > 0]e^{-c\mu(1-\omega)t}, \; t \ge 0,$$

ahol

$$P[q > 0] = \frac{D}{1-\omega}. \quad W_q = \frac{DW_s}{c(1-\omega)^2}. \quad E[q|q > 0] = \frac{W_s}{c(1-\omega)}.$$

Ha $c(1-\omega) \ne 1$, akkor

$$W[t] = P[\omega \le t] = 1 + (G-1)e^{-\mu t} - Ge^{-c\mu(1-\omega)t}, \quad t \ge 0,$$

ahol

$$G = \frac{D}{(1-\omega)[1-c(1-\omega)]}.$$

Amikor $c(1-\omega) = 1$, akkor

$$W[t] = P[\omega \le t] = 1 - \left[1 + \frac{D\mu t}{1-\omega}\right] e^{-\mu t}, \quad t \ge 0.$$

Továbbá

$$W = W_q + W_s.$$

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda W_s}{c} - \lambda W_s \sum_{j=1}^{c-1} \pi_{j-1} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{c}\right).$$

$$p_n = \begin{cases} \frac{\lambda W_s \pi_{n-1}}{n}, & n = 1, 2, \ldots, c-1 \\ \frac{\lambda W_s \pi_{n-1}}{c}, & n = c, c+1, \cdots. \end{cases}$$

6.17 M/G/1 Prioritásos sorbanállási rendszer

22. Táblázat. M/G/1 Sorbanállási rendszer (osztályok, prioritás nélkül)

n osztály szerint csoportosítjuk az igényeket, ahol az i-edikbe tartozók $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, n$ paraméterű Poisson-eloszlás szerint érkeznek, és a kiszolgálási időkre $E[s_i] = 1/\mu_i$, $E[s_i^2]$, $E[s_i^3]$. Minden igényt FCFS alapján szolgálunk ki. Nyilvánvalóan az összesített beérkezési folyamat Poisson-eloszlású lesz, melynek paramétere

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

A kiszolgálási időkre

$$W_s = \frac{\lambda_1}{\lambda}E[s_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda}E[s_2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}E[s_n],$$

$$E[s^2] = \frac{\lambda_1}{\lambda}E[s_1^2] + \frac{\lambda_2}{\lambda}E[s_2^2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}E[s_n^2],$$

és

$$E[s^3] = \frac{\lambda_1}{\lambda}E[s_1^3] + \frac{\lambda_2}{\lambda}E[s_2^3] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}E[s_n^3],$$

A Pollaczek formula alapján

$$W_q = \frac{\lambda E[s^2]}{2(1-\rho)}.$$

Osztályonként a rendszerben eltöltött átlagos idő

$$W_i = W_q + E[s_i], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

22. Táblázat. M/G/1 Sorbanállási rendszer (osztályok, prioritás nélkül)

(folytatás)

Az összesített átlagos tartózkodási időre

$$W = \frac{\lambda_1}{\lambda} W_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} W_2 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} W_n.$$

A sorbanállási idő szórásnégyzete

$$\sigma_q^2 = \frac{\lambda E[s^3]}{3(1-\rho)} + \frac{\lambda^2 (E[s^2])^2}{4(1-\rho)^2}.$$

Osztályonként a rendszerben eltöltött idő szórásnégyzete

$$\sigma_{w_i}^2 = \sigma_q^2 + \sigma_{s_i}^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

w második momentuma osztályonként

$$E[w_i^2] = \sigma_{w_i}^2 + W_i^2, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Így az összesített második momentum

$$E[w^2] = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[w_1^2] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[w_2^2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[w_n^2],$$

és

$$\sigma_w^2 = E[w^2] - W^2.$$

23. Táblázat. M/G/1 Relatív prioritásos rendszer

(ezt az elvet head-of-the-line-ként is ismerik (HOL))

Az n igény-osztály közül az 1 csoportba tartozók a legfontosabbak, és az n-edikbe tartozók a legkevésbé. Az i-edik osztályba tartozó igények λ_i paraméterű Poisson folyamatként érkeznek. Minden osztálynak saját kiszolgálási ideje van véges momentumokkal. Az igényeket relatív prioritásos elv szerint szolgálják ki. Az összesített beérkezési folyamat Poisson-eloszlású lesz az alábbi paraméterrel

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

A kiszolgálási idő első három momentuma az alábbi képlet szerint határozható meg

$$W_s = \frac{\lambda_1}{\lambda}E[s_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda}E[s_2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}E[s_n],$$

$$E[s^2] = \frac{\lambda_1}{\lambda}E[s_1^2] + \frac{\lambda_2}{\lambda}E[s_2^2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}E[s_n^2],$$

és

$$E[s^3] = \frac{\lambda_1}{\lambda}E[s_1^3] + \frac{\lambda_2}{\lambda}E[s_2^3] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}E[s_n^3],$$

Legyen

$$a_j = \lambda_1 E[s_1] + \lambda_2 E[s_2] + \cdots + \lambda_j E[s_j], \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

és vegyük észre, hogy

$$a_n = a = \lambda W_s.$$

Az átlagos sorbanállási idők

$$W_{q_j} = E[q_j] = \frac{\lambda E[s^2]}{2(1 - a_{j-1})(1 - a_j)},$$

$$j = 1, 2, \ldots, n, \quad a_0 = 0.$$

23. Táblázat. M/G/1 Relatív prioritásos rendszer (folytatás)

Az átlagos sorhosszak

$L_{q_j} = \lambda_j W_{q_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Az egyesített átlagos sorbanállási idő

$$W_q = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[q_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[q_2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[q_n].$$

A rendszerben eltöltött átlagos idők

$W_j = E[w_j] = E[q_j] + E[s_j], \quad j = 1, 2, \ldots, n,$

és a rendszerben tartózkodó igények átlaga

$L_j = \lambda_j W_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Az összesített átlagos tartózkodási idő

$W = W_q + W_s.$

Az összesített átlagos sorhossz

$L_q = \lambda W_q,$

és a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma

$L = \lambda W.$

Osztályonként a rendszerben eltöltött idő szórásnégyzete

$$\sigma^2_{w_j} = \sigma^2_{s_j} + \frac{\lambda E[s^3]}{3(1-a_{j-1})^2(1-a_j)}$$

$$+ \frac{\lambda E[s^2] \left(2 \sum_{i=1}^{j} \lambda_i E[s_i^2] - \lambda E[s^2] \right)}{4(1-a_{j-1})^2(1-a_j)^2}$$

$$+ \frac{\lambda E[s^2] \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i E[s_i^2]}{2(1-a_{j-1})^3(1-a_j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

23. Táblázat. M/G/1 Relatív prioritásos rendszer

(folytatás)

A rendszerben eltöltött idő szórásnégyzete

$$\sigma_w^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda}[\sigma_{w_1}^2 + W_1^2] + \frac{\lambda_2}{\lambda}[\sigma_{w_2}^2 + W_2^2]$$

$$+ \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}[\sigma_{w_n}^2 + W_n^2] - W^2.$$

Osztályonként a sorbanállási idő szórásnégyzete

$$\sigma_{q_j}^2 = \sigma_{w_j}^2 - \sigma_{s_j}^2, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ismert, hogy $E[q_j^2] = \sigma_{q_j}^2 + W_{q_j}^2, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$

ezért

$$E[q^2] = \frac{\lambda_1}{\lambda}E[q_1^2] + \frac{\lambda_2}{\lambda}E[q_2^2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}E[q_n^2].$$

Végül

$$\sigma_q^2 = E[q^q] - W_q^2.$$

24. Táblázat. M/G/1 Abszolút prioritásos sorbanállási rendszer

Az n igény-osztály közül az 1 csoportba tartozók a legfontosabbak, és az n-edikbe tartozók a legkevésbé. Az i-edik osztályba tartozó igények λ_i paraméterű Poisson folyamatként érkeznek. Minden osztálynak saját kiszolgálási ideje van véges momentumokkal, $E[s_i] = 1/\mu_i$, $E[s_i^2]$, $E[s_i^3]$. Az igényeket megszakításos prioritási elv szerint szolgálják ki, azaz ha j -dik osztályba tartozó igény kiszolgálása folyik, miközben $i < j$, -dik osztályba tartozó igény beérkezik, akkor a kiszolgálás megszakad és az i igény kiszolgálása kezdődik el. A megszakított igény a saját osztálybeli igények sorának az elejére áll, és ha legközelebb rákerül a sor, akkor a megszakítás helyétől folytatódik a kiszolgálás.

24. Táblázat. M/G/1 Abszolút prioritásos sorbanállási rendszer

(folytatás)

Az összesített beérkezési folyamat Poisson-eloszlású lesz az alábbi paraméterrel

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

A kiszolgálási idő első három momentuma az alábbi képlet szerint határozható meg

$$W_s = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[s_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[s_2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[s_n],$$

$$E[s^2] = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[s_1^2] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[s_2^2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[s_n^2],$$

$$E[s^3] = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[s_1^3] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[s_2^3] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[s_n^3].$$

Legyen

$$a_j = \lambda_1 E[s_1] + \lambda_2 E[s_2] + \cdots + \lambda_j E[s_j], \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

és vegyük észre, hogy

$$a_n = a = \lambda W_s.$$

Osztályonként a rendszerben eltöltött átlagos idők

$$W_j = E[w_j] = \frac{1}{1 - a_{j-1}} \left[E[s_j] + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i E[s_i^2]}{2(1 - a_j)} \right],$$

$$a_0 = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

24. Táblázat. M/G/1 Abszoluút prioritásos sorbanállási rendszer

(folytatás)

A megfelelő sorbanállási idők

$$W_{q_j} = E[w_j] - E[s_j], \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

A j -dik sor átlagos hossza

$$L_{q_j} = \lambda_j W_{q_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Az összesített átlagos sorbanállási idő, W_q, az alábbi formában adható meg

$$W_q = \frac{\lambda_1}{\lambda} E[q_1] + \frac{\lambda_2}{\lambda} E[q_2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} E[q_n].$$

Osztályonként a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma

$$L_j = \lambda_j W_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

A rendszerben való átlagos tartózkodási idő

$$W = \frac{\lambda_1}{\lambda} W_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda} W_2 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda} W_n = W_q + W_s.$$

A sorban tartózkodó igények átlagos száma

$$L_q = \lambda W_q,$$

és a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma

$$L = \lambda W.$$

24. Táblázat. M/G/1 Abszolút prioritásos sorbanállási rendszer (folytatás)

Osztályonként a rendszerben eltöltött idő szórásnégyzete

$$\sigma_{w_j}^2 = \frac{\sigma_{s_j}^2}{(1-a_{j-1})^2} + \frac{E[s_j]\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i E[s_i^2]}{(1-a_{j-1})^3}$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{j}\lambda_i E[s_i^3]}{3(1-a_{j-1})^2(1-a_j)} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i E[s_i^2]\right)^2}{4(1-a_{j-1})^2(1-a_j)^2}$$

$$+\frac{\left(\sum_{i=1}^{j}\lambda_i E[s_i^2]\right)\left(\sum_{i=1}^{j-1}\lambda_i E[s_i^2]\right)}{2(1-a_{j-1})^3(1-a_j)}, \quad a_0 = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Az összesített szórásnégyzet

$$\sigma_w^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda}[\sigma_{w_1}^2 + W_1^2] + \frac{\lambda_2}{\lambda}[\sigma_{w_2}^2 + W_2^2]$$

$$+\cdots+\frac{\lambda_n}{\lambda}[\sigma_{w_n}^2 + W_n^2] - W^2.$$

Osztályonként a sorbanállási idő szórásnégyzete

$$\sigma_{q_j}^2 = \sigma_{w_j}^2 - \sigma_{s_j}^2, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Mivel,

$$E[q_j^2] = \sigma_{q_j}^2 + W_{q_j}^2, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

így

$$E[q^2] = \frac{\lambda_1}{\lambda}E[q_1^2] + \frac{\lambda_2}{\lambda}E[q_2^2] + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}E[q_n^2].$$

Végül

$$\sigma_q^2 = E[q^q] - W_q^2.$$

25. Táblázat. M/G/1 Processzor-osztásos sorbanállási rendszer

Az igények λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek. A kiszolgálási idő eloszlásáról feltesszük, hogy Cox-típusú, azaz sűrűségfüggvényének Laplace-transzformáltja racionális törtfüggvény. Az átlagos kiszolgálási időt jelöljük $1/\mu$- vel. A kiszolgálási elv legyen Processzor Sharing (Processzor-osztásos) amely azt jelenti, hogyha már $n-1$ igény van a rendszerben, akkor az újonnan érkező (és az összes többi) csak μ/n intenitású kiszolgálást kap. Ekkor $p_n = \rho^n(1-\rho)$, $n = 0, 1, \ldots$, ahol $\rho = \lambda/\mu$. Továbbá

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad E[w|s=t] = \frac{t}{1-\rho}, \text{ és } W = \frac{W_s}{1-\rho}.$$

Végül

$$E[q|s=t] = \frac{\rho t}{1-\rho}, \text{ és } W_q = \frac{\rho W_s}{1-\rho}.$$

26. Táblázat. M/G/c Processzor-osztásos sorbanállási rendszer

Az igények λ paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek. A kiszolgálási idő eloszlásáról feltesszük, hogy Cox-típusú, azaz sűrűségfüggvényének Laplace-transzformáltja racionális törtfüggvény. Az átlagos kiszolgálási időt jelöljük $1/\mu$- vel. Amikor a rendszerben tartózkodó igények száma N kisebb, mint c, akkor minden igényre jut egy saját kiszolgáló, vagyis a kiszolgálási intenzitás minden esetben μ. Amikor azonban $N > c$, akkor minden igény $c\mu/N$ kiszolgálási intenzitást kap. Meg lehet mutatni, hogy ebben az esetben az átlagokra vonatkozó szokásos stacionárius rendszerjellemzők megegyeznek az M/M/c rendszer jellemzőivel. Azonban a tartózkodási idő és várakozási idő eloszlásfüggvényét zárt alakban általában nem tudjuk megadni.

6.18 M/M/c Prioritásos rendszer

27. Táblázat. M/M/c relatív prioritásos (HOL) sorbanállási rendszer

Az n osztályba tartozó igények közül az i-dik osztálybeliek λ_i paraméterű Poisson folyamat szerint érkeznek azzal a megszorítással, hogy mindegyik kiszolgálási ideje ugyanolyan paraméterű exponencionális eloszlású. Nyilvánvalóan az összesített beérkezési folyamat Poisson lesz, melynek paramétere $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$. A kiszolgáló kihasználtsága

$$\rho = \frac{\lambda W_s}{c} = \frac{\lambda}{c\mu},$$

$$W_{q_1} = \frac{C[c,a]W_s}{c(1 - \lambda_1 W_s/c)},$$

és igazak az alábbi összefüggések:

$$W_{q_j} = \frac{C[c,a]W_s}{c\left[1 - \left(W_s \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i\right)/c\right]\left[1 - \left(W_s \sum_{i=1}^{j} \lambda_i\right)/c\right]}, \quad j = 2, \ldots, n.$$

$$W_j = W_{q_j} + W_s, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$L_{q_j} = \lambda_j W_{q_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$L_j = \lambda_j W_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$W_q = \frac{\lambda_1}{\lambda} + \frac{\lambda_2}{\lambda} + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}.$$

$$L_q = \lambda W_q.$$

$$W = W_q + W_s.$$

$$L = \lambda W.$$