Előszó

Bár nem akarjuk, de nagyon sokszor sorba kell állnunk. Várakozunk a buszmegállóban, a boltban, a postán, a bankban, stb. Ha ismerjük a kiszolgálási szabályokat és a kiszolgálási időket, a magunk módján csökkenteni tudjuk a várakozási időt, pl. ismerősöket keresünk a sorban, ismerős a kiszolgáló főnöke, stb. Ezt a módszert nem tudjuk alkalmazni az automatikus rendszereknél, de a prioritások megadásával egyes igényeknek kevesebbet kell várakozni, mint a többieknek. Számos eljárás létezik ilyen típusú problémák megoldására.

Jelen jegyzet célja, hogy matematikai modelleket adjunk a fenti jelenségek vizsgálatára. Több rendszernél kiszámítjuk a jellemzőket, pl. a kiszolgáló kihasználtságát, az igények átlagos várakozási idejét, a rendszerben eltöltött átlagos időt, stb.

Meg szeretnénk mutatni, hogyan építjük fel a matematikai modellt, és mily módon alkalmazzuk a valószínűségszámítás és az analízis eszközeit.

A felölelt anyag szervesen kapcsolódik az egyetemi képzéshez. Több éven át szerepelt a matematikusok tantervében, jelenleg a „Sztochasztikus modellezés” sáv szerves része. Eredményesen használhatják mindazok, akiket érdekel a valószínűségszámítás alkalmazása, és a véletlentől függő bonyolult rendszerek vizsgálata.

Köszönetemet fejezem ki Dr. Arató Mátyás egyetemi tanárnak, a jegyzet lektorának, hasznos észrevételeiért, a tanácsaiért. Hálás vagyok hallgatóimnak, akik az előadások és gyakorlatok során segítettek a matematikai precizitás és az alkalmazási szint közötti egyensúly megállapításában.

Utoljára, de nem utolsósorban szeretném megköszönni Tóth Tibor szakdolgozóm közreműködését a jegyzet számítógépes szerkesztésében.

Debrecen, 1994, 2000.

A szerző

Bevezetés

A sorbanállási elmélet a köznapi életben előforduló egyik kellemetlen jelenség, nevezetesen a várakozás vizsgálatával foglalkozik. Nemcsak mi, hanem számos területen előforduló igények is sorba állnak, pl. hívások a telefonközpontban, levelek és iratok a hivatalban, programok a központi egységnél, csak hogy néhányat említsünk. Nem véletlen, hogy szóbahoztuk a telefonforgalmi és számítógépes problémákat. Az elmélet történetében döntő helyet foglalnak el ezek az alkalmazási területek. A sorbanállási rendszerek tanulmányozását a telefonforgalmi problémák megoldására A. K. Erlang dán mérnök kezdte el a XX. század elején.

Munkája nemcsak a mérnökök, hanem a matematikusok figyelmét is felkeltette, és nagyon sok cikk és könyv foglalkozott a valószínűségszámítási háttérrel. A sorbanállási elmélet szinte önálló tudománnyá nőtte ki magát, melynek eredményeit és módszereit sikerrel alkalmazzák többek között a megbízhatóságelméletben, számítástudományban, operációkutatásban. Sok kiváló matematikus szerzett hírnevet a sorbanállási elmélet területén. Ami rendkívül fontos az az, hogy egy jelenleg is dinamikusan fejlődő területről van szó, melynek művelői ma is számos dolgozatot és könyvet írnak. A érintettek listája elég hosszú, ezért inkább az irodalomjegyzékben felsorolt műveket ajánljuk figyelmébe.

A könnyebb eligazodás miatt különválasztottuk az általános elmélettel foglalkozókat a számítástechnikai jellegűektől. Természetesen ezek csak a legfontosabbak, ezért az érdeklődő olvasóknak a teljesebb listához Prabhu (1987), Takagi–Boguslavsky (1991), és Takagi (1990) könyvét is javasoljuk.

Meg kell említenünk, hogy ezek a könyvek döntő többségben megtalálhatók a Kossuth Lajos Tudományegyetem Matematikai és Informatikai Intézet könyvtárában. A sok jó mű közül véleményünk szerint a legjobbak

Boxma–Syski (1988), Cooper (1981), Gnedenko–Kovalenko (1989), Gross–Harris (1985), Kleinrock (1976, 1979), Saaty (1961), Takagi (1991, 1993), Takács (1962), White–Schmidt–Bennett (1975), Allen (1978), Gelenbe–Mitrani (1980), Lavenberg (1983), Sauer–Chandy (1981), Trivedi (1982).

Mivel eddig magyar nyelven igazából csak Kleinrock (1979) klasszikus könyve foglalkozik részletesen a sorbanállási elmélettel, ezért a jelen jegyzet véleményünk szerint hiánypótló.

Felépítésében a *következő célokat* tűztük ki:

1. Azok is használhassák, akik nem rendelkeznek fejlett matematikai háttérrel.
2. A olvasó ismerje meg az alapvető matematikai módszereket.
3. Felhívjuk a figyelmet a magyar matematikusok munkáira.
4. Az olvasót önállómunkára serkentsük.

Ezen célok elérésére a jegyzetet 3 fő részre bontottuk. Az ,,**Alapfogalmak**” fejezetben rövid összefoglalót adunk a felújításelmélet, a folytonos idejű Markov-láncok és a születési-kihalási folyamatok főbb definícióiból és tételeiből.

Az ,,**Alapfokú sorbanállási elmélet**” részben a folytonos idejű Markov-láncok szintjén tárgyaljuk a főbb modelleket. Láthatjuk, hogy a legegyszerűbb esetekben a rendszerjellemzők zárt alakban adhatók meg. Hogy nem mindig van ez így, ezért tekintettük TomkóJózsef modelljeit az inhomogén gépkiszolgálási probléma esetére.

A ,,**Középfokú sorbanállási elmélet**” fejezetben a legfontosabb gyakorlati alkalmazások miatt tárgyaljuk az $M/G/1$ rendszert, és a Takács Lajos által kidolgozott $< m/M/G/1 >$ modellt, melyben a beágyazott Markov-láncok módszerét követjük. A segédváltozók módszerének illusztrálására az $< n/M/G/1/PS >$ rendszert és a szerző által vizsgált

$< n/\vec{G}/m/r/FIFO >$ modellt mutatjuk be. Meggyőződhetünk a matematikai analízisbeli eszközök fontosságáról, hiszen sokszor alkalmazzuk a generátorfüggvényeket, a Laplace-Stieltjes ill. Laplace-transzformáltakat, differencia ill. differenciál-egyenletrendszereket, sőt az integrodifferenciálegyenletrendszereket is.

Természetesen nemcsak ezek a módszerek használatosak, de terjedelmi okokból nem ismertethetjük a numerikus, aszimptotikus és szimulációs eljárásokat. gy érezzük, hogy a megadott hivatkozásokban mindenki megtalálhatja a kívánt módszerre vonatkozó információkat.

A figyelmes olvasó hamar rájöhet, hogy elég sok esetben a formulák meghatározásakor pótolnia kell a hiányzószámításokat. Ezzel az a célunk, hogy együtt dolgozzunk a közös cél eléréséért.

Be kell vallanunk, hogy a jegyzet stílusának alakításában az említett Kleinrock könyv döntő szerepet játszott. Megpróbáltuk nem követni a szigorú definíció-tétel-bizonyítás lépéssorozatot, és így a nem matematikus olvasók részére is hasznos segédletet adni. Azonban vannak olyan fejezetek, ahol ez a szigorú felépítés a történeti hűség miatt megmaradt. Igyekeztünk feladatok segítségével is érthetőbbé tenni az adott problémakört.

Végül szeretnék köszönetet mondani Dr. Tomkó Józsefnek, Dr. Arató Mátyásnak, Dr. Takács Lajosnak, Dr. Mogyoródi Józsefnek és Dr. Benczúr Andrásnak, akik tanácsaikkal sokat segítettek eddigi munkámban.

Az előforduló hibákra vonatkozó észrevételeket és mindenfajta javító szándékú megjegyzést örömmel veszünk az alábbi címen:

`jsztrik@math.klte.hu`

`http://it.math.klte.hu/user/jsztrik/index.html`

I. Alapismeretek

Jelen fejezetben röviden ismertetjük azokat a fogalmakat, amelyek segítségével a későbbiekben megkonstruálhatjuk a különböző rendszerek működését leíró sztochasztikus modellt. Terjedelmi okok miatt nem törekedhettünk szigorúbb matematikai tárgyalásmódra, csak a legfontosabb tételeket gyűjtöttük össze, melyek ismerete nélkülözhetetlen az előforduló rendszerek vizsgálatánál. Bebizonyítunk néhány egyszerűbb állítást, de legtöbbször bizonyítás nélkül mondjuk ki a tételeket.

Az érdeklődő olvasóknak az alábbi klasszikus könyveket ajánljuk: Feller (1978), Gihman – Szkorohod (1975), Karlin – Taylor (1985), Ross (1970), Takács (1960), Tomkó (1968).

I.1. Felújításelmélet

Legyenek $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ nemnegatív, azonos eloszlású, egymástól független valószínűségi változók. Az

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad n \geq 1, \quad S_0 = 0$$

valószínűségi változók segítségével definiáljuk a következő folyamatot

$$N(t) = \max_n \{S_n \leq t\}.$$

1. Definíció.

Az $\{N(t), t \geq 0\}$ sztochasztikus folyamatot *felújítási folyamat*nak nevezzük.

A következő interpretációt adhatjuk. Bizonyos események bekövetkezését figyeljük. Jelölje X_i az i-edik és az $(i-1)$-edik esemény közötti időtartamot.

Ekkor $N(t)$ a t időtartam alatt bekövetkezett események számát adja. Az S_n valószínűségi változót az n-edik esemény bekövetkezéséhez szükséges *várakozási idő*nek nevezzük.

Könnyű belátni, hogy $N(t)$ realizációi jobbról folytonos lépcsős függvények, ahol egységnyi ugrások történnek az S_n időpillanatokban.

Az $N(t)$ definíciójából egyből következik, hogy

$$\{N(t) \geq n\} \Longleftrightarrow \{S_n \leq t\}.$$

($\Longleftrightarrow$ az ekvivalenciát jelöli) Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen

$$F(x) = P(X_k \leq x), \quad F_n(x) = P(S_n \leq x),$$

ahol

$$F_n(x) = \int_0^x F_{n-1}(x-y)dF(y), \quad n \geq 2,$$

vagyis $F_n(x)$ az $F(x)$ eloszlásfüggvény önmagával vett n-szeres konvolúciója. (Jelölése $F * \cdots * F$.) Feltehetjük, hogy $F(0) = 0$.

2. Definíció.

Az $M(t) = E(N(t))$ függvényt *felújítási függvény*nek nevezzük.

Az alábbiakban $N(t)$-re és $M(t)$-re mondunk ki néhány fontos tételt.

1. Tétel.

$$P(N(t) = k) = F_k(t) - F_{k+1}(t), \quad t \geq 0,$$

$$M(t) = E(N(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t).$$

Bizonyítás. Látható, hogy

$$\{N(t) = k\} \Longleftrightarrow \{S_k \leq t < S_{k+1}\},$$

$$\{S_{k+1} \leq t\} \subset \{S_k \leq t\},$$

vagyis

$$\{N(t) = k\} = \{S_k \leq t\} \setminus \{S_{k+1} \leq t\}.$$

Azonban így

$$P(N(t) = k) = F_k(t) - F_{k+1}(t).$$

Továbbá

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k(F_k(t) - F_{k+1}(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t).$$

Meg lehet mutatni, hogy

$$M(t) < \infty, \quad t \geq 0.$$

Meg kell jegyeznünk, hogy ha $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, akkor $N(t)$ λ paraméterű Poisson-folyamatot alkot.

2. Tétel.

Az $N(t)$ folyamatra teljesül a nagy számok erős törvénye, azaz 1 valószínűséggel

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu},$$

ahol $\mu = E(X_n) \leq \infty$.

Bizonyítás. Tekintsük a $(0, t]$ intervallumot, ekkor

$$S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}.$$

Azonban az S_n sorozatra igaz a nagy számok erős törvénye, azaz $n \to \infty$ esetén

$$\frac{S_n}{n} \to \mu$$

1 valószínűséggel. Továbbá 1 valószínűséggel

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu.$$

Hasonlóan, 1 valószínűséggel

$$\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)} = \frac{S\ddot{e}_{N(t)+1}}{N(t)+1} \cdot \frac{N(t)+1}{N(t)} \to \mu.$$

Így az

$$\frac{N(t)}{S_{N(t)+1}} < \frac{N(t)}{t} \leq \frac{N(t)}{S_{N(t)}}$$

relációból az

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$$

összefüggést kapjuk.

Az alábbiakban bizonyítás nélkül közlünk néhány fontos tételt, amelyek az alkalmazásban nagy szerepet játszanak.

3. Tétel. (Elemi felújítási tétel)

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}.$$

4. Tétel.

$$\frac{D^2(N(t))}{t} \to \frac{\sigma^2}{3},$$

ahol $\sigma^2 = D^2(X_1)$.

5. Tétel.

Legyen $\mu < \infty$, és $\sigma^2 < \infty$. Ekkor

$$P\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{\sigma^2 t}{\mu^3}}} \leq y\right) \to \Phi(y).$$

3. Definíció.

Az X nemnegatív valószínűségi változót (vagy az $F(x)$ eloszlásfüggvényt) *rácsos*nak nevezzük, ha létezik olyan $\delta > 0$, melyre $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n\delta) = 1$, azaz X értékei $n\delta$ alakú számok. Ekkor δ-t X *periódus*ának nevezzük.

6. Tétel. (Blackwell-tétel)

(i) Ha X nem rácsos eloszlású, akkor $\forall\ \tau \geq 0$ esetén

$$\lim_{t\to\infty} [M(t+\tau) - M(t)] = \frac{\tau}{\mu},$$

(ii) Ha X periódusa δ, akkor

$$\lim_{n\to\infty} [M(n\delta) - M((n-1)\delta)] = \frac{\delta}{\mu},$$

Legyen $h(t)$ korlátos függvény a $[0, \infty)$-en. Továbbá tegyük fel, hogy az alábbi feltételek is teljesülnek még

(i) $h(t) \geq 0, \quad t \geq 0,$

(ii) $h(t)$ nemnövekvő,

(iii) $\int_0^{\infty} h(t)dt < \infty.$

Ekkor kimondhatjuk az ún. alaptételt, amely nagyon nagy jelentőségű az alkalmazott valószínűségszámítási modelleknél.

7. Tétel. (Smith-tétel, vagy a felújításelmélet alaptétele)

Ha $F(t)$ nem rácsos, akkor

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t h(t-x)dM(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} h(t)dt.$$

Meg kell jegyeznünk, hogy a Blackwell-tétel és Smith-tétel ekvivalensek.

Térjünk vissza az

$$M(t) = E(N(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

összefüggésre. Látható, hogy

$$M(t) = F(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F * F_n(t) = F(t) + F * \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) =$$

$$= F(t) + F * M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x) dF(x).$$

Az

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x) dF(x)$$

összefüggést *felújítási egyenlet*nek nevezzük.

Az

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t), \qquad M^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dM(t)$$

Laplace-Stieltjes transzformáltakra igaz

$$M^*(s) = F^*(s) + M^*(s) \cdot F^*(s).$$

Ebből

$$M^*(s) = \frac{F^*(s)}{1 - F^*(s)},$$

illetve

$$F^*(s) = \frac{M^*(s)}{1 + M^*(s)},$$

azaz $F(t)$ és $M(t)$ kölcsönösen meghatározzák egymást.

Először *általánosítjuk* a felújítási egyenletet a következőképpen:

$$g(t) = h(t) + \int_0^t g(t-x)dF(x),$$

ahol $h(t)$ és $F(t)$ ismert függvények $g(t)$ pedig az ismeretlen a fenti integrálegyenletben. Megmutatjuk, hogy

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x)dM(x),$$

ahol $M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$ a felújítási függvény.
Vegyük a Laplace-Stieltjes transzformáltakat mindkét oldalon. Ekkor

$$g^*(s) = h^*(s) + g^*(s) \cdot F^*(s).$$

Ebből az előzőek szerint

$$g^*(s) = \frac{h^*(s)}{1-F^*(s)} = h^*(s) + h^*(s)\frac{F^*(s)}{1-F^*(s)} = h^*(s) + h^*(s) \cdot M^*(s).$$

Invertálva

$$g(t) = h(t) + \int_0^t h(t-x)dM(x).$$

Vezessük be a következő valószínűségi változókat:

$\gamma_t = S_{N(t)+1} - t$: *hátralévő élettartam*,

$\delta_t = t - S_{N(t)}$: *eltelt időtartam, vagy életkor*,

$\beta_t = \delta_t + \gamma_t$: *teljes élettartam.*

Vizsgáljuk mo¡st meg a γ_t hátralévő élettartam és a δ_t eltelt időtartam asszimptotikus eloszlását!

A definíciókból látható, hogy

$$P(\gamma_t > x \mid X_1 = y) = \begin{cases} P(\gamma_{t-y} > x) & \text{, ha } y \le t, \\ 0 & \text{, ha } t < y \le t + x, \\ 1 & \text{, ha } y > t = x. \end{cases}$$

Így

$$P(\gamma_t > x) = \int_0^\infty P(\gamma_t > x \mid X_1 = y) dF(y) =$$

$$= \int_0^t P(\gamma_t > x) dF(y) + \int_t^{t+x} 0 dF(y) + \int_{t+x}^\infty 1 dF(y) =$$

$$= \int_0^t P(\gamma_t > x) dF(y) + 1 - F(t + x),$$

amely az általánosított felújítási egyenlet.

Legyen $h(t) = 1 - F(t + x)$. Mint láttuk

$$P(\gamma_t > x) = h(t) + \int_0^t h(t - y) dM(y).$$

Tekintsük a $t \to \infty$ határátmenetet. Vegyük észre, hogy $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$, és alkalmazva a Smith-féle alaptételt

$$\lim_{t\to\infty} P(\gamma_t > x) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty (1 - F(t + x)) dt = \frac{1}{\mu} \int_x^\infty (1 - F(y)) dy.$$

A $P(\gamma_t \le x) = 1 - P(\gamma_t > x)$ alapján

$$P(\gamma_t < x) = F(t + x) - \int_0^t (1 - F(t + x - y)) dM(y),$$

illetve

$$\lim_{t\to\infty} P(\gamma_t < x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x (1 - F(y))dy,$$

ha $F(x)$ nem rácsos.

Tekintsük a δ_t, γ_t valószínűségi változókat. Vegyük észre, hogy

$$\delta_t > x \Longleftrightarrow \text{ nincs felújítás a } [t-x,t]-\text{n},$$

és

$$\gamma_{t-x} > x \Longleftrightarrow \text{ nincs felújítás a } [t-x,t]-\text{n}.$$

Ebből

$$P(\delta_t > x) = P(\gamma_{t-x} > x).$$

Az előzőek alapján

$$P(\delta_t \le x) = \begin{cases} F(t) - \int\limits_0^{t-x} (1 - F(t-y))dM(y) & \text{, ha } x \le t, \\ 1 & \text{, ha } x > t. \end{cases}$$

Bebizonyítható, hogy

$$\lim_{t\to\infty} P(\gamma_t > x,\ \delta_t > y) = \frac{1}{\mu}\int_{x+y}^{\infty} (1 - F(u))du.$$

Az is belátható, hogy

$$\gamma_t \text{ és } \delta_t \text{ független } \Longleftrightarrow \text{ ha } F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

I.2. Markov-folyamatok

I.2.1. Markov-láncok

I.2.1.1. A Markov-lánc definíciója

A Markov-lánc fogalmához legegyszerűbben a független kísérletek fogalmának általánosításával jutunk el. Tekintsük egymás után végrehajtott kísérletek sorozatát. Legyen $E_1, E_2 \dots, E_i, \dots$ egy teljes eseményrendszer. Vizsgáljuk az egyes kísérletek eredményét az E_i események bekövetkezése szempontjából. Definiáljuk a ξ_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ valószínűségi változókat úgy, hogy $\xi_n = i$, ha az n-edik kísérletnél az E_i esemény fordul elő. Független kísérletek esetén érvényes, hogy

$$P(\xi_n = j \mid \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}) = P(\xi_n = j)$$

minden n-re, és a szóban forgó valószínűségi változók valamennyi lehetséges értékére. A Markov-lánc fogalmához akkor jutunk, ha a fenti valószínűségnél feltesszük, hogy a ξ_n változó valószínűségeloszlása függ az előző $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ változóktól is.

Ha fennáll minden n-re és a változók összes lehetséges értékeire, hogy

(1)
$$P(\xi_n = j \mid \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}) = P(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i_{n-1})$$

úgy azt mondjuk, hogy az egymást követő kísérletek, illetve a (ξ_n) valószínűségi változók *egyszerű Markov-lánc*ot alkotnak.

Megjegyezzük, hogy *r-edrendű* Markov-láncról beszélünk akkor, ha rögzített r-nél minden n-re és a változók összes lehetséges értékeire fennáll

$$P(\xi_n = j \mid \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}) =$$
$$P(\xi_n = j \mid \xi_{n-r} = i_{n-r}, \ldots, \xi_{n-1} = i_{n-1}).$$

Így az előbbi definíciót, az elsőrendű (vagy egyszerű) Markov-lánc definíciójának tekinthetjük. A következőkben csupán elsőrendű Markov-láncokkal foglalkozunk, anélkül, hogy ezt külön mondanánk.

A Markov-láncok fontos speciális esetét képezik a *homogén Markov-láncok*. Ezeknél a $P(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i)$ átmenetvalószínűségek függetlenek az n-től, azaz

$$P(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i) = p_{ij}$$

írható. Ha az átmenetvalószínűségek n-től is függnek, úgy *inhomogén Markov-láncról* beszélünk. A továbbiakban csak homogén Markov-láncokkal foglalkozunk.

Fizikai alkalmazásokat szem előtt tartva a Markov-láncokkal kapcsolatban rendszerint a következő terminológia szokásos: az E_i eseményeket a rendszer *állapotainak* nevezzük. A ξ_0 változó $P(\xi_0 = i) = P_i(0)$ eloszlását *kezdeti eloszlásnak* és a $P(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i)$ feltételes valószínűséget *átmenetvalószínűségnek* nevezzük. Ha pedig $\xi_{n-1} = i$ és $\xi_n = j$, akkor azt mondjuk, hogy a rendszer az *n-edik lépésben átmenetet* tett.

Ha egy Markov-láncnál ismerjük a kezdeti eloszlást és az átmenetvalószínűségeket, úgy ezek segítségével az összes ξ_n változó eloszlása egyértelműen meghatározható. Fontos feladat annak megvizsgálása, hogy a ξ_n változóknak $n \to \infty$-re létezik-e határeloszlása, és ha létezik, hogyan határozható meg.

I.2.1.2. Az átmenet- és abszolút valószínűségek

Tekintsünk egy homogén Markov-láncot

$$p_{ij} = P(\xi_n = j \mid \xi_{n-1} = i) \tag{2}$$

átmenetvalószínűségekkel. Legyen továbbá $P(\xi_n = j) = P_j(n)$.

Nyilvánvalóan fennáll, hogy $\sum\limits_k p_{ik} = 1$ és $p_{ij} \geq 0$.

A p_{ij} átmenetvalószínűségek elrendezhetők a következő mátrix alakban:

$$\pi = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots \\ < p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{3}$$

π az ún. *átmenetvalószínűségek mátrixa.* A π mátrix négyzetes, elemei nem negatívak, és a sorok összege 1. Egy ilyen mátrixot *sztochasztikus mátrixnak* nevezünk.

Egy Markov-lánc egyértelműen meg van határozva a π mátrix és a $(P_j(0))$ kezdeti eloszlás megadásával. A $(P_j(n))$ eloszlás meghatározására vezessük be az *n lépéses átmenetvalószínűségek* fogalmát. Ezeket a következőképpen értelmezzük:

$$p_{ij}^{(n)} = P(\xi_{m+n} = j \mid \xi_m = \tilde{A}i). \tag{4}$$

Könnyen belátható, hogy homogén Markov-lánc esetén ez a feltételes valószínűség nem függ m-től. A teljes valószínűség tétele alapján a $P_j(n)$ *abszolút valószínűségek* a következőképpen határozhatók meg:

$$P_j(n) = \sum_i P_i(0) \cdot p_{ij}^{(n)}. \tag{5}$$

A $p_{ij}^{(n)}$ n-lépéses átmenetvalószínűségek kiszámítása a p_{ij} átmenetvalószínűségek segítségével történik a következő rekurzív képlet alapján:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik} p_{kj}^{(n-1)}, \tag{6}$$

amely a teljes valószínűség tétele alkalmazásával igazolható. Speciálisan $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$. Ha a $p_{ij}^{(n)}$ átmenetvalószínűségeket is elrendezzük mátrix alakban, úgy ez a mátrix π^n, azaz a π mátrix n-edik hatványa lesz. Ez teljes indukcióval igazolható, a mátrixok szorzási szabálya alapján, a fenti rekurzív képlet tekintetbe vételével.

I.2.1.3. A Markov-láncok és állapotainak osztályozása

Azt mondjuk, hogy az E_k állapot *elérhető* az E_j állapotból, ha létezik olyan n, hogy $p_{ij}^{(n)} > 0$. Egy Markov-láncot *irreducibilis*nek nevezünk akkor, ha minden állapota elérhető minden állapotából. A nem irreducibilis Markov-láncok vizsgálata visszavezethető egymástól független irreducibilis Markov-láncok tárgyalására.

Egy Markov-lánc állapotainak C halmazát *zárt*nak mondjuk, ha egylépéses átmenettel nem lehet kijutni ebből a halmazból, azaz $p_{jk} = 0$, ha $E_j \in C$, és $E_k \notin C$. Nyilvánvalóan ekkor tetszőleges n-re is fennáll $p_{jk}^{(n)} = 0$, ha $E_j \in C$ és $E_k \notin C$. Az irreducibilis Markov-láncok állapotai egyetlen zárt halmazt alkotnak. Ha csupán egy zárt C halmaz állapotait tekintjük, úgy egy rész Markov-láncot nyerünk, amely a többi állapottól függetlenül vizsgálható. Egy Markov-láncot *szétbonthatónak* mondunk, ha állapotai két vagy több zárt halmazra bomlanak.

Ha egyetlen E_k állapot képez egy zárt halmazt, akkor az E_k állapotot *abszorbeáló állapot*nak nevezzük. Ekkor $p_{kk} = 1$.

Tekintsünk egy tetszőleges, de rögzített E_j állapotot. Tegyük fel, hogy a rendszer kezdetben E_j állapotban van ($\xi_0 = j$). Jelölje $f_j^{(n)}$ annak a valószínűségét, hogy az első *visszatérés* az E_j állapotba az n-edik lépésnél következik be ($f_j^{(0)} = 1$). Az $f_j^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ valószínűségek sorban meghatározhatók a

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} f_i^{(m)} p_{ij}^{(n-m)} \tag{7}$$

rekurzív képletek alapján. Annak a valószínűsége, hogy a rendszer *valamikor* visszatér az E_j állapotba,

$$f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}. \tag{8}$$

Ha $f_j = 1$, azaz a visszatérés biztos, úgy a visszatérésig megtett lépésszám várható értéke, az *átlagos visszatérési idő*

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_j^{(n)}. \tag{9}$$

A fentiek előrebocsátása után a Markov-lánc állapotait a következőképpen osztályozhatjuk:

Az E_j állapotot *rekurrens állapot*nak mondjuk, ha az E_j állapotba való visszatérés biztos, azaz $f_j = 1$. Az E_j állapotot *tranziens állapot*nak mondjuk, ha az E_j állapotba való visszatérés nem biztos, azaz $f_j < 1$. Az E_j rekurrens állapotot *zérus állapot*nak nevezzük, ha az átlagos visszatérési idő végtelen, azaz $f_j = 1$ és $\mu_j = \infty$.

Az E_j állapotot *periodikus*nak mondjuk, t periódussal, ha az E_j állapotba való visszatérés csupán a $t, 2t, 3t, \ldots$ lépésnél következhet be, és $t > 1$ a legnagyobb ilyen tulajdonsággal rendelkező szám. Ekkor $p_{jj}^{(n)} = 0$, ha n nem osztható t-vel.

Az E_j rekurrens állapotot *ergodikus*nak mondjuk, ha nem zérus állapot és nem periodikus.

1. Tétel.

Egy irreducibilis Markov-lánc állapotai mind ugyanazon osztályhoz tartoznak: vagy mind tranziensek, vagy rekurrens zérus állapotok, vagy rekurrens nem zérus állapotok. Mindegyik esetben az összes állapot periódusa megegyezik.

Megjegyzés. Egy véges sok állapotú láncnak nem lehet zérus állapota, és nem lehet az összes állapotza tranziens.

I.2.1.4. Nem periodikus Markov-lánc határeloszlás-tételei

Egy Markov-láncot *ergodikus*nak nevezünk, ha a $(P_j(n))$ valószínűség-eloszlások a kezdeti $(P_j(0))$ eloszlástól független (P_j) határeloszláshoz konvergálnak, azaz $\lim_{n\to\infty} P_j(n) = P_j \ , \quad j = 1, 2, 3, \ldots$.

A kezdeti $(P_j(0))$ eloszlást *stacionárius eloszlás*nak mondjuk abban az esetben, ha a $(P_j(n))$ eloszlások megegyeznek a kezdeti eloszlással.

2. Tétel.

Tegyük fel, hogy egy irreducibilis Markov-lánc állapotai nem periodikusak, nem tranziensek, és nem zérus állapotok. Ekkor $(P_j(0))$ kezdeti eloszlástól függetlenül léteznek a

$$\lim_{n\to\infty} P_j(n) = P_j \tag{10}$$

határértékek. Továbbá (P_j) egy valószínűségeloszlás pozitív elemekkel, azaz

$$P_j > 0 \quad \text{és} \quad \sum_j P_j = 1. \tag{11}$$

A (P_j) valószínűségeloszlás egyértelműen meghatározható az alábbi lineáris egyenletrendszer segítségével:

$$P_j = \sum_j P_i p_{ij}. \tag{12}$$

Végül fennáll, hogy az E_j állapot átlagos visszatérési ideje, $\mu_j = 1/P_j$.

Megjegyezzük, hogy ha egy irreducibilis Markov-lánc állapotai nem periodikusak, de az összes állapotai tranziensek vagy zérus állapotok, úgy a kezdeti eloszlástól függetlenül fennáll $\lim\limits_{n\to\infty} P_j(n) = 0$.

Megemlítünk néhány kritériumot egy Markov-lánc ergodikus voltának eldöntésére.

A. A. Markov tétele szerint véges sok állapottal bíró, nem periodikus és irreducibilis Markov-lánc állapotai ergodikusak, és így érvényes a 2. Tétel.

Egy tetszőleges, nem periodikus és irreducibilis Markov-lánc ergodikus, ha a (12) alatti

$$\sum_i x_i p_{ij} = x_j$$

egyenletrendszernek létezik olyan nem zérus megoldása, amelyre

$$\sum_i |x_i| < \infty.$$

A 2. Tételből következik, hogy ha a Markov-lánc ergodikus, úgy egyetlen stacionárius eloszlás létezik, éspedig ez a (P_j) határeloszlással egyezik meg. Ha pedig egy irreducibilis és nem periodikus Markov-lánc állapotai tranziensek vagy zérus állapotok, úgy nem létezik stacionárius eloszlás.

Fizikai rendszereknél a statisztikai egyensúly-állapotot a stacionárius eloszlással írjuk le, és azt a tényt, hogy a $(P_j(n))$ eloszlások konvergálnak a (P_j) határeloszláshoz, úgy értelmezzük, mint az egyensúlyi állapothoz való közeledést.

I.2.2. Markov-folyamatok

I.2.2.1. Bevezetés

A Markov-láncok tárgyalásánál valószínűségi változók (ξ_n) sorozatának vizsgálatával foglalkoztunk. Ha egy fizikai rendszer állapotának időbeli változását vizsgáljuk, és $t = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ időpontokban a rendszer állapotát $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ változókkal jellemezzük, úgy sok esetben a (ξ_n) változók Markov-láncot alkotnak, és ekkor alkalmazhatjuk a Markov-láncokra vonatkozó eredményeket. Sokszor azonban ez a tárgyalás nem kielégítő, és a rendszer állapotának pontos időbeli változása érdekel bennünket. Ilyenkor bevezetjük a ξ_t valószínűségi változót, amely a rendszer állapotát t időpontban jellemzi, és ezt a valós t paraméter véges vagy végtelen intervallumba eső értékeire tekintjük. A ξ_t valószínűségi változók bármely ilyen összességét *sztochasztikus folyamat*nak nevezzük. Miként a (ξ_n) sztochasztikus sorozatok vizsgálatánál a Markov-láncok játszottak fontos szerepet, úgy a sztochasztikus folyamatok körében a Markov- típusú folyamatok bírnak kiterjedt alkalmazási területtel.

I.2.2.2. A Markov-folyamatok definícója

Tekintsük a t paraméter véges vagy végtelen intervallumba eső értékeire értelmezett valós ξ_t valószínűségi változók összeségét. A (ξ_t) sztochasztikus folyamatot *Markov-folyamat*nak nevezzük, ha fennáll

$$(13) \quad P(\xi_t \le x \mid \xi_{u_1} = y_1, \xi_{u_2} = y_2, \ldots, \xi_{u_n} = y_n) = P(\xi_t \le x \mid \xi_{u_n} = y_n)$$

valamennyi $u_1 < u_2 < \ldots < u_n < t$-re és a szóban forgó változók összes lehetséges értékeire. Ilyen módon a Markov-folyamatok a Markov-láncok közvetlen általánosításának tekinthetők.

Ha egy Markov-folyamatnál ismerjük a ξ_0 változó $P(\xi_0 \leq x) = P(0, x)$ *kezdeti eloszlását* és a következő feltételes eloszlásfüggvényeket,

$$P(\xi_t \leq x \mid \xi_s = y) = F(s, y; t, x) \quad (\text{ahol } (s < t), \tag{14}$$

az ún. *átmenetvalószínűség*eket, úgy ezzel a folyamat egyértelműen meg van határozva.

Speciálisan a $P(\xi_t \leq x) = P(t, x)$ eloszlásfüggvényt

$$P(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(0, y, t, x) d_y F(0, y) \tag{15}$$

szolgáltatja.

A teljes valószínűség tétele szerint könnyen belátható, hogy az $F(s, y, t, x)$ átmenetvalószínűségekre fennáll az

$$F(s, y, t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u, z, t, x) d_z F(s, y, u, z)$$

ún. *Chapman-Kolmogorov* egyenlet, ahol $s < u < t$.

A (ξ_t) Markov-folyamatot *ergodikus*nak nevezzük, ha létezik a $\lim_{t \to \infty} P(\xi_t \leq x \mid \xi_0 = y)$ határeloszlásfüggvény és független y-tól. Ekkor $\lim_{t \to \infty} P(t, x)$ is létezik és az előzővel megegyezik.

A ξ_0 változó $P(0, x)$ eloszlását *stacionárius*nak mondjuk, ha $P(\xi_t \leq x) = P(t, x) = P(0, x)$. A (ξ_t) Markov-folyamatot osztályozhatjuk még aszerint is, hogy ξ_t értékkészlete diszkrét vagy ξ_t változása folytonos, vagy ξ_t változása folytonos és ugrásszerű lehet.

I.2.2.3. Markov-folyamat megszámlálható sok állapottal

Tegyük fel, hogy a vizsgált fizikai rendszer véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ leh etséges állapottal rendelkezik, és legyen $\xi_t = j$, ha t időpontban E_j állapotban van a rendszer. Az *átmenetvalószínűségeket* definiáljuk most a következőképpen:

$$P(\xi_t = j \mid \xi_s = i_j = p_{ij}(s,t) \quad (s < t). \tag{16}$$

Ennek segítségével a (14) alatti átmenetvalószínűségek a következőképpen fejezhetők ki:

$$F(s,y,t,x) = \sum_{i \leq x} p_{yi}(s,t).$$

A *Chapman-Kolmogorov*-egyenlet ebben az esetben a következő, egyszerűbb alakban is kifejezhető:

$$p_{ik}(s,t) = \sum_j p_{ij}(s,u) p_{jk}(u,t). \tag{17}$$

A *Kolmogorov-féle egyenletek:* Tegyük fel, hogy

1. Minden egyes E_n állapotnak megfelel egy folytonos $c_n(t) \geq 0$ függvény úgy, hogy t-ben egyenletesen

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1 - p_{nn}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = c_n(t). \tag{18}$$

Ez a feltétel a következőt jelenti: Ha t időpontban a rendszer E_n állapotban van, úgy annak a valószínűsége, hogy $(t, t+\Delta t)$ időközben változás történik: $c_n(t)\Delta t + o(\Delta t)$.

2. Bármely két különböző E_j és E_k állapothoz tartozik egy $\hat{p}_{jk}(t)$ átmenetvalószínűség úgy, hogy t-ben egyenletesen fennáll

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{jk}(t, t+\Delta t)}{\Delta t} = c_j(t)\hat{p}_{jk}(t). \tag{19}$$

A $\hat{p}_{jk}(t)$-k t-ben folytonosak, $\hat{p}_{jj}(t) = 0$ és

$$\sum_k \hat{p}_{jk}(t) = 1. \tag{20}$$

A $\hat{p}_{jk}(t)$ annak a feltételes valószínűségét jelenti, hogy ha a t időpontban a rendszer E_j állapotban van, és változás történik, akkor ezzel a rendszer E_k állapotba jut.

3. Rögzített k esetén a (19) határátmenet j-ben egyenletes.

Az 1., 2. és 3. feltételek teljesülése esetén fennáll *Kolmogorov első differenciálegyenlet-rendszere:*

$$\frac{\partial p_{ik}(s,t)}{\partial t} = -c_k(t)p_{ik}(s,t) + \sum_{j \neq k} p_{ij}(s,t)c_j(t)\hat{p}_{jk}(t). \tag{21}$$

Ez a $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ik}(s,t+\Delta t) - p_{ik}(s,t)}{\Delta t}$ határátmenet elvégzésével adódik, ha még tekintetbe vesszük, hogy $p_{ik}(s, t+\Delta t) = \sum\limits_j p_{ij}(s,t)p_{jk}(t, t+\Delta t)$. A (12) egyenletrendszerben i és s paraméterek, amelyek csupán a

$$p_{ik}(s,s) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } k = i, \\ 0 & \text{, ha } k \neq i, \end{cases}$$

kezdeti feltételekben mutatkoznak.

Hasonlóképpen nyerjük az 1. és 2. feltételek teljesülése esetén a *Kolmogorov második differenciálegyenlet-rendszerét:*

$$\frac{\partial p_{ik}(s,t)}{\partial s} = c_i(s)p_{ik}(s,t) - c_i(s)\sum_{j \neq i} \hat{p}_{ij}(s)p_{jk}(s,t). \tag{25}$$

Ez az egyenletrendszer $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{p_{ik}(s-\Delta s,t)-p_{ik}(s,t)}{\Delta s}$ határátmenet elvégzésével adódik, ha előbb $p_{ik}(s-\Delta s,t) = \sum\limits_j p_{ij}(s-\Delta s,s)p_{jk}(s,t)$ előállítást alkalmazzuk. Most a kezdeti feltételek:

$$\sum_k p_{ik}(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } i = k, \\ 0 & \text{, ha } i \neq k. \end{cases}$$

A (21) és (22) differenciálegyenlet-rendszerek mindegyike a megfelelő kezdeti feltételekkel egyértelműen meghatározza a $p_{ik}(s,t)$ átmenetvalószínűségeket.

Megjegyezzük, hogy $((p_{ik}(s,t))$ nem mindig szolgáltat valódi eloszlásfüggvényt, megtörténhet, hogy

$$\sum_k p_{ik}(s,t) < 1.$$

Ekkor $1 - \sum\limits_k p_{ik}(s,t)$ annak a valószínűségét jelenti, hogy (s,t) időintervallumban végtelen sok átmenet történik.

Ha a ξ_t változó eloszlását $P(\xi_t = k) = P_k(t)$ jelöli, akkor, ha ismerjük a $(P_k(0))$ kezdeti eloszlását, felírható, hogy

$$P_k(t) = \sum_i P_i(0)p_{ik}(0,t),$$

és $P_k(t)$ (21) szerint kielégíti a

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -c_k(t)P_k(t) + \sum_{j\neq k} c_j(t)\hat{p}_{jk}(t)P_j(t), \tag{23}$$

differenciálegyenlet-rendszert.

Ha a (ξ_t) Markov-folyamat *homogén*, akkor $c_i(t) \equiv c_i$ és $\hat{p}_{jk}(t) \equiv \hat{p}_{jk}$ t-től független állandók. Ekkor $p_{ik}(s,t) = p_{ik}(t-s)$ írható, és az *első differenciálegyenlet-rendszer*,

$$\frac{dp_{ik}(t)}{dt} = -c_k p_{ik}(t) + \sum_{j\neq k} c_j \hat{p}_{jk} p_{ij}(t), \tag{24}$$

a *második differenciálegyenlet-rendszer* pedig

$$\frac{dp_{ik}(t)}{dt} = -c_i p_{ik}(t) + c_i \sum_{j \neq i} \hat{p}_{jk} p_{jk}(t), \tag{25}$$

lesz.

Most, ha $P(\xi_t = k) = P_k(t)$, úgy (21) szerint ez kielégíti a

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -c_k P_k(t) + \sum_{j \neq k} c_j \hat{p}_{jk} P_j(t) \tag{26}$$

differenciálegyenlet-rendszert.

A (ξ_t) homogén Markov-folyamat *ergodikus*, ha a $\lim\limits_{t \to \infty} p_{jk}(t) = P_k$ határértékek léteznek, j-től függetlenek, és (P_k) valószínűségeloszlás. Ha (ξ_t) ergodikus, úgy $\lim\limits_{t \to \infty} P_k(t) = P_k$ is fennáll. (23)-ból következik, hogy a (P_k) határeloszlás a

$$c_k P_k = \sum_{j \neq k} c_j \hat{p}_{jk} P_j \tag{27}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával egyértelműen meghatározható.

Ha a (ξ_t) homogén Markov-folyamatnál az állapotok száma véges, és bármely más állapotból elérhető, úgy (ξ_t) ergodikus, és a (P_k) határeloszlás a (27) egyenletrendszer megoldásával egyértelműen meghatározható.

Gyakorlati alkalmazásoknál nagyon fontos az alábbi tétel

3. Tétel.

Legyen $(\xi_t, t \geq 0)$ ergodikus Markov-folyamat. Ekkor 1 valószínűséggel

$$P_k = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi(\xi_t = k) dt = \frac{1}{c_k m_{kk}},$$

ahol

m_{kk} : a k állapotba való *első visszatérési idő* várható értéke,

$\chi(A)$: az A esemény indikátorfüggvénye.

Szavakban: hosszútávon a k állapotban való tartózkodási idő osztva az időintervallum hosszával az ergodikus eloszláshoz konvergál. Mivel ξ_t a k állapotban c_k paraméterű exponenciális eloszlású ideig tartózkodik, ezért

$$P_k = \frac{\text{a } k \text{ állapotban való átlagos tartózkodási idő}}{\text{a } k \text{ állapotba való első visszatérési idő várható értéke}}.$$

I.3. Születési-halálozási folyamatok

A Markov-folyamatok egy igen fontos speciális osztálya *születési-halálozási folyamatok* néven ismert. A definiáló feltétel: minden állapotból csak „szomszédos" állapotba mehet végbe átmenet (± 1-el változhat). Állapottérnek ekkor a nem negatív egész számok halmazát választjuk (ami nem megy az általánosság rovására), és $X_k = i$ esetében X_{k+1} vagy $i-1$, vagy i, vagy $i+1$ lehet. A születési-halálozási folyamatoknak nagy szerepük van a sorbanállási rendszerek vizsgálatában.

Ahhoz, hogy egy $X(t)$ Markov lánc születési-halálozási folyamat legyen, ki kell elégítenie az alábbi feltételeket :

1. $P(X(t+h) = k+1 | X(t) = k) = \lambda_k h + o(h);$
2. $P(X(t+h) = k-1 | X(t) = k) = \mu_k h + o(h);$
3. $P(X(t+h) = k | X(t) = k) = 1 - (\lambda_k + \mu_k) h + o(h);$
4. $P(X(t+h) = m | X(t) = k) = o(h), \qquad | m - k | > 1,$

ahol h egy tetszőlegesen kis intervallumot jelent, $o(h)$ pedig olyan mennyiséget jelöl, amely gyorsabban tart 0-hoz, mint h, ha $h \to 0$, vagyis $\frac{o(h)}{h} \to 0$, ha $h \to 0$.

Vegyük észre, hogy λ_k, μ_k pozitív mennyiségek függetlenek az időtől. A λ_k-kat *születési intenzitásnak*, a μ_k-kat pedig *halálozási intenzitásnak* nevezzük.

Jelöljük $P_k(t)$-vel annak valószínűségét, hogy a folyamat a t időpillanatban a k állapotban van, vagyis

$$P_k(t) = P(X(t) = k).$$

Ezt szokás *abszolút valószínűségnek* is nevezni. Ezen valószínűségek kiszámításához figyelembe kell venni a következőket. A $t+h$ időpillanatban a $X(t)$ k állapotban van akkor és csak akkor, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

1. t időpillanatban a folyamat a k állapotban van és a $(t, t+h)$ időintervallumban változás nem következik be;
2. t időpillanatban a folyamat a $k-1$ állapotban volt és a k-ba történt átmenet;
3. t időpillanatban a folyamat a $k+1$ állapotban volt és a k-ba történt átmenet;
4. $(t, t+h)$ alatt 2 vagy több átmenet történt.

Látható, hogy az 1-3 feltételek kölcsönösen kizárják egymást, és a 4. eset valószínűsége $o(h)$.
Világos, hogy t minden értékére teljes eseményrendszerről van szó, így:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1. \tag{28}$$

Az előbbi feltételek teljesülése után már felírhatjuk a $P_k(t+h)$ valószínűséget:

$$\begin{aligned} P_k(t+h) = &P_k(t)\{1 - \lambda_k h - \mu_k h + o(h)\} \\ &+ P_{k-1}(t)\{\lambda_{k-1} h + o(h)\} \\ &+ P_{k+1}\{\mu_{k+1} h + o(h)\} + o(h), \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Ha mindkét oldalból kivonjuk $P_k(t)$-t és osztjuk h-val, akkor $h \to 0$ esetén a következő differenciálegyenleteket kapjuk:

$$\frac{P_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t), \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \frac{dP_k(t)}{dt} &= -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \\ &+ \mu_{k+1}P_{k+1}(t), \qquad k = 1, 2, 3, ... \end{aligned} \tag{30}$$

Annak belátása, hogy a fenti egyenleteknek létezik egyértelműen meghatározott megoldása nem könnyű feladat. Az egyenletrendszer megoldható, ha bizonyos megkötéseket teszünk a születési-halálozási folyamatra vonatkozóan. Meg kell adni a $P_k(0)$, $k = 0, 1, 2, ...$ értékeket, ezenkívül a (28) egyenlőségnek is teljesülnie kell.

Most tegyünk egy kis kitérőt. Adjunk egy intuitív módszert arra, hogyan lehet az előbbi differenciálegyenlet-rendszert megkapni. Figyeljük a k állapotot. Észrevehetjük, hogy oda csak a $k-1$ és a $k+1$ állapotokból lehet átlépni. Hasonlóképpen a k állapototë csak úgy lehet elhagyni, hogy a $k-1$ vagy a $k+1$ állapotba jutunk. Mivel dinamikus szituációt vizsgálunk, ezért világos, hogy a két rátának a különbsége, amellyel a folyamat belép a k állapotba, ill. elhagyja azt, egyenlő kell, hogy legyen az illető állapot abszolút valószínűségének a megváltozásával. Ennek segítségével leírhatjuk a $P_k(t)$ valószínűségekre vonatkozó mozgásegyenletet. A t pillanatban az érkezés intenzitása ebbe az állapotba:

$$Q\lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t),$$

míg a távozás intenzitása:

$$(\lambda_k + \mu_k)P_k(t).$$

E kettő különbsége az abszolút valószínűség t-beli változásával (deriváltjával) egyenlő, azaz

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t) - (\lambda_k + \mu_k)P_k(t) \ .$$

De ez éppen a (30) összefüggés $k > 0$ esetén. Könnyű belátni, hogy ez az érvelés a $k = 0$ esetben is korrekt egyenletre vezet.

Az általános, időfüggő megoldás nehezen adható meg, ezért mi megelégszünk az ún. *egyensúlyi* (vagy stacionárius) megoldással, mivel ez sok esetben jól használható.

Definiáljuk a *stacionárius* megoldást, mint egy P_k valószínűségi eloszlást, amelyre fennáll a következő: $P_k(t) = P_k$. Ha egy ilyen eloszlás létezik, akkor egyértelmű és minden k-ra teljesül:

$$\lim_{t\to\infty} P_k(t) = P_k.$$

Mivel minket most csak a folyamat időtől független tulajdonságai érdekelnek, ezért először vegyük a (30) baloldalának határértékét $t \to \infty$ esetén, ez 0-val lesz egyenlő, és egy kis átalakítással a következő lineáris differenciaegyenletet kapjuk:

$$\lambda_k P_k - \mu_{k+1}P_{k+1} = \lambda_{k-1}P_{k-1} - \mu_k P_k, \qquad k = 1, 2, \ldots \quad .$$

Ebből arra következtethetünk, hogy

$$\lambda_{k-1}P_{k-1} - \mu_k P_k = \text{konstans}, \qquad k = 1, 2, \ldots \quad .$$

A (29)-ből:

$$\lambda_0 P_0 - \mu_1 P_1 = 0.$$

Tehát a fenti konstansnak nullának kell lenni, ezzel az alábbi egyenlőségre jutottunk:

$$\mu_k P_k = \lambda_{k-1} P_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots \quad .$$

Ez a következőképpen értelmezhető: a baloldal a k állapotból a $k-1$ állapotba való átmenet rátája, ami egyensúlyban van a $k-1$ állapotból a k állapotba való átmenet rátájával, ami a jobboldalon található. Így az egyensúlyi állapot valószínűségei a következők:

$$P_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} P_{k-1} = \frac{\Lambda(k)}{M(k)} P_0,$$

ahol

$$\Lambda(k) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_{i-1},$$

és

$$M(k) = \prod_{i=1}^{k} \mu_i.$$

A P_0 valószínűséget egyértelműen meghatározhatjuk, mivel a valószínűségek $\{P_k; k = 0, 1, 2, \ldots\}$ összegének 1-nek kell lenni. Tehát, ha az

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{M(k)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$

sor konvergens, és összege φ akkor

$$P_0 = \varphi^{-1},$$

és ez egyben a stacionáris eloszlás létezésének elégséges feltétele is.

A Poisson-folyamat

A vizsgált rendszerek közül a legegyszerűbb a tiszta születési folyamat. Ekkor feltesszük, hogy $\mu_k = 0$ minden k esetén. Tovább egyszerűsítve a problémát tegyük fel, hogy $\lambda_k = \lambda$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ekkor a (29, 30) a következőre redukálódik:

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t), \text{ ha } k \geq 1,$$

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t), \text{ ha } k = 0.$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a rendszer a 0 állapotból indul a 0 időpillanatban, azaz

$$P_k(0) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } k = 0 \text{ ,} \\ 0 & , \text{ ha } k \neq 0. \end{cases}$$

Könnyű látn¡i, hogy a $P_0(t)$ valószínűségre:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Így a $k = 1$ esetre az alábbit kapjuk:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}.$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása:

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Indukcióval folytatva a megoldást, könnyen meggyőződhetünk, hogy

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad k \geq 0, t \geq 0.$$

Ez a híres *Poisson-eloszlás.* A konstans λ születési intenzitású tiszta születési folyamatban előforduló születések sorozatát nevezik *Poisson-folyamatnak.*

Mivel a kapott eredményeket később a sorbanállási rendszerek tanulmányozásakor szeretnénk felhasználni, így rögtön sorbanállási jelöléseket vezetünk be: a Poisson-folyamatot mint igények beérkezését tekintjük valamilyen kiszolgálási rendszerben, nem pedig mint egy populáció új tagjainak születését. Ezért λ az igénybeérkezés átlagos intenzitása. A kezdeti feltételllel együtt a $P_k(t)$ mennyiség megadja annak valószínűségét, hogy k igény érkezik be a $(0,t)$ intervallumban. Világos, hogy ha átlagosan λ igény érkezik be időegységenként, ezért egy t hosszúságú intervallum alatt átlagosan λt számú igénynek kell beérkeznie, azaz a t idő alatt beérkezett igények számának várható értéke λt.

A Poisson-folyamatot, mint tiszta születési folyamatot vezettük be, és levezettük a $P_k(t)$ mennyiségekre - egy adott t hosszúságú időintervallum alatt bekövetkező érkezések számának valószínűségeloszlására - egy formulát. Vizsgáljuk most meg a beérkezések időpillanatainak együttes eloszlását, ha előre ismert, hogy éppen k igény érkezett ebben az intervallumban. Osszuk fel a $(0,t)$ intervallumot $2k+1$ diszjunkt részre a következőképpen. Az α_i hosszúságú intervallumok előzzék meg a β_i hosszúságú intervallumokat $(i = 1, \ldots, k)$, és az utolsó intervallum α_{k+1} hosszúságú legyen, továbbá

$$\sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i = t.$$

Jelentse A_k azt az eseményt, hogy éppen egy beérkezés fordul elő minden egyes β_i intervallumban $(i = 1, 2, ..., k)$, az α_i intervallumban pedig egy sem. A_k valószínűségét akarjuk kiszámolni, feltéve, hogy éppen k beérkezés történik a $(0,t)$ intervallumban. A feltételes valószínűség definíciójából

$$P(A_k|\text{pontosan } k \text{ beérkezés a } (0,t) \text{ alatt}) =$$

$$= \frac{P(A_k \text{ és pontosan } k \text{ beérkezés } (0,t) \text{ alatt})}{P(\text{pontosan } k \text{ beérkezés } (0,t) \text{ alatt})}$$

Amikor a Poisson-folyamat szerinti beérkezéseket vizsgáljuk diszjunkt időintervallumokban, akkor független eseményeket vizsgálunk, azaz ezek együttes valószínűségét az egyes valószínűségek szorzataként lehet kiszámolni. Könnyu látni, hogy

$$P(\text{egyetlen beérkezés egy } \beta_i \text{ hosszúságú intervallum alatt}) = \lambda\beta_i e^{-\lambda\beta_i}$$

és

$$P(\text{nincs beérkezés egy } \alpha_i \text{ hosszúságú intervallum alatt}) = e^{-\lambda\alpha_i}.$$

Kihasználva ezt, azonnal kapjuk a következőt:

$$P(A_k|\text{ éppen } k \text{ beérkezés } (0,t) \text{ alatt}) =$$

$$= \frac{(\lambda\beta_1\lambda\beta_2...\lambda\beta_k e^{-\lambda\beta_1}e^{-\lambda\beta_2}...e^{-\lambda\beta_k})(e^{-\lambda\alpha_1}e^{-\lambda\alpha_2}...e^{-\lambda\alpha_k})}{((\lambda t)^k/k!)e^{-\lambda t}} = \tag{31}$$

$$= \frac{\beta_1\beta_2...\beta_k}{t^k}k!.$$

Másrészt tekintsünk egy olyan folyamatot, amelynél a $(0,t)$ intervallumban k darab pont fordul elő egymástól függetlenül, mégpedig mindegyik az intervallumon egyenletes eloszlás szerint. Könnyen belátható, hogy

$$P(A_k|\text{ éppen } k \text{ beérkezés } (0,t) \text{ alatt}) = \left(\frac{\beta_1}{t}\right)\left(\frac{\beta_2}{t}\right)...\left(\frac{\beta_k}{t}\right)k!, \tag{32}$$

ahol a $k!$ tényező amiatt jelenik meg, mert nem különböztetjük meg a k darab pont permutációit. Észrevehetjük, hogy a (31) és a (32) összefüggésekben megadott két feltételes valószínűség megegyezik, és ennek alapján arra gondolhatunk, hogy ha a Poisson-folyamatban t idő alatt k beérkezés történik, akkor a beérkezések eloszlása ugyanaz, mint k darab ugyanazon az intervallumon egyenletes eloszlású pont eloszlása. Ennek pontos igazolása a fenti gondolatmenet finomításával elvégezhető. A születési folyamat tulajdonságaiból könnyű levezetni, hogy a Poisson-folyamat homogén; vagyis ha $X(s, s+t)$ jelöli a t hosszúságú $(s, s+t)$ intervallum alatti beérkezések számát, akkor

$$P(X(s, s+t) = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},$$

függetlenül attól, hogy hol helyezkedik el az intervallum (vagyis függetlenül az intervallum s kezdőpontjától).

Most a Poisson-folyamat és az exponenciális eloszlás közötti összefüggés vizsgálatára térünk át. Az exponenciális eloszlásnak szintén központi szerepe van a sorbanállás elméletében. Tekintsük a $\tilde{t}$ valószínűségi változót - a két egymás utáni „szomszédos” beérkezések között eltelt idő -, amelynek eloszlás- és sűrűségfügvényét $F(t)$, ill. $f(t)$ jelöli. Ekkor $f(t)\Delta t + o(\Delta t)$ a valószínűsége annak, hogy a soron következő beérkezésig a legutolsó beérkezéstől eltelt idő legalább t, de legfeljebb $(t + \Delta t)$.

Mivel $F(t)$ a valószínűsége annak, hogy a beérkezések közötti idő$\leq t$, ezért

$$F(t) = 1 - P(\tilde{t} > t).$$

De $P(\tilde{t} > t)$ éppen annak valószínűsége, hogy egyetlen beérkezés sem következik be a $(0, t)$ intervallumon, azaz $P_0(t)$. Azt kapjuk tehát, hogy

$$F(t) = 1 - P_0(t),$$

így az eloszlásfüggvény (a Poisson esetben)

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0. \tag{33}$$

Ezt differenciálva, a sűrűségfüggvény:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0.$$

Ez a jól ismert exponenciális eloszlás, tehát a *Poisson-folyamat esetén a beérkezési időközök független exponenciális eloszlásúak.*

Az exponenciális eloszlás legfontosabb jellemzője az, hogy emlékezetnélküli, azaz a valószínűségi változó múltja nem játszik szerepet jövőjének meghatározásában. Ezen a következőt értjük. Képzeljük el, hogy a 0 időpillanatban következett be egy beérkezés. Ha azt kérdezzük, hogy mi a legközelebbi beérkezésig eltelő t idő eloszlása, a felelet nyilvánvaló, a (33) képlet adja meg az eloszlásfüggvényét. Teljék el bizonyos idő, mondjuk t_0 másodperc, ez alatt ne történjen beérkezés. Ekkor újra megkérdezhetjük: Mennyi a valószínűsége annak, hogy a legközelebbi beérkezésig mostantól számítva t idő telik el. Ez a kérdés csak annyiban különbözik a 0 időpillanatban feltett kérdéstől, hogy most tudjuk, a két beérkezés között eltelő idő legalább t_0 másodperc. Ahhoz, hogy feleljünk a második kérdésre, a következő számításokat végezzük:

$$\begin{aligned} P(\tilde{t} \leq t + t_0 | \tilde{t} > t_0) &= \frac{P(t_0 < \tilde{t} \leq t + t_0)}{P(\tilde{t} > t_0)} = \\ &= \frac{P(\tilde{t} \leq t + t_0) - P(\tilde{t} \leq t_0)}{P(\tilde{t} > t_0)}. \end{aligned}$$

A (33) miatt

$$P(\tilde{t} \leq t + t_0 | \tilde{t} > t_0) \frac{\bar{1} - e^{-\lambda(t+t_0)} - (1 - e^{-\lambda t_0})}{1 - (1 - e^{-\lambda t_0})},$$

és így

$$P(\tilde{t} \leq t + t_0 | \tilde{t} > t_0) = 1 - e^{-\lambda t} = P(\tilde{t} \leq t).$$

Az eredmény azt mutatja, hogy ha az utolsó beérkezés óta t_0 idő telt el, akkor a következő beérkezésig hátralevő idő eloszlása ugyanaz, mint a beérkezési időköz feltétel nélküli eloszlása. És ez az egyetlen olyan folytonos eloszlás, amely ilyen tulajdonságú.

Nem nehéz belátni, hogy

$$1 - e^{-\lambda t} = \lambda t + o(t).$$

Ez nyilván egyenértékű a

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{t} = \lambda$$

állítással, amelyet a L'Hospital-szabállyal egyszerűen bebizonyíthatunk. Hiszen

$$\lim_{t \to 0} \frac{\left(1 - e^{-\lambda t}\right)'}{t'} = \lambda.$$

Az $1 - e^{-\lambda t} = \lambda t + o(t)$ egyenlőség a későbbiekben nagyon fontos lesz számunkra.

II. Elemi sorbanállási elmélet

A sorbanállási elméletre vonatkozó "elemi" jelző azt fejezi ki, hogy olyan rendszereket vizsgálunk, amelyek tiszta Markov-folyamatok, és ennek következtében az állapotátmenetek leírására egyszerű, könnyen kezelhető összefüggéseket kapunk. Az előző fejezetben azokkal az egyenletekkel foglalkoztunk, amelyek a születési-halálozási folyamatok abszolút valószínűségeit az időtől függetlenül írták le. A (3) összefüggés a fejezet lényeges eredménye; a továbbiakban ennek egyszerű alkalmazásaival foglalkozunk.

A későbbiek során a következőképpen járunk el. Bevezetünk egy $X(t)$ sztochasztikus folyamatot, ami a t-edik időpillanatban a kiszolgáló egységnél tartózkodó igényeket jelöli majd. A beérkezési és kiszolgálási folyamatok eloszlásainak felhasználásával megadjuk a h időintervallum alatti átmeneti valószínűségeket. Ha — feltevésünk szerint — a fellépő eloszlások exponenciálisak, az $X(t)$ folyamat Markov-típusú lesz, sőt születési-halálozási folyamat. Konkrét rendszereknél mindig meghatározzuk a születési, halálozási intenzitásokat, és ezek felhasználásával megkeressük az egyenletrendszer megoldását. Ezt követően kiszámítjuk a rendszer működésére vonatkozó jellemzőket (pl. átlagos sorhossz, kihasználtságok, átlagos várakozási idő stb.)

Az előbbi fejezetben a sztochasztikus folyamatok különböző osztályait tanulmányoztuk. Kiemeltük, hogy a sorbanállási rendszerek vizsgálatában alapvető szerepük van a Markov-folyamatoknak. Ezen belül is egy speciális Markov-folyamatot vizsgáltunk meg - a születési-halálozási folyamatot. Megmutattuk, hogy a születési-halálozási folyamatoknak — a számításokban — az az igen „jó" tulajdonságuk van, hogy mind a születések, mind a halálozások közötti idő exponenciális eloszlású (ami közvetlen következménye annak, hogy ezek Markov-folyamatok - feltéve, hogy a rendszer nem üres). Ezután megadtuk a folyamat állapotegyenleteit. Jelen fejezetben ezeknek az egyenleteknek határátmenet útján adódó alakjait vizsgáljuk, így a születési-halálozási sorbanállási rendszerek *stacionárius* viselkedését kapjuk meg.

Az elemi sorbanállási elmélet egyrészt történeti okokból, másrészt pedig azért fontos, mert alkalmas arra, hogy szemléltesse a bonyolultabb sorbanállási rendszerek jellemzőit. A kapott eredmények betekintést nyújtanak sok egyéb sorbanállási rendszer viselkedésébe.

Nem szabad elfelejtenünk, hogy a születési-halálozási folyamat miképpen felel meg a sorbanállási rendszereknek. Pl. tekintsünk egy orvosi várószobát (amelyben esetleg várakozni kell), és tekintsünk egy orvosi rendelőt, mint egy kiszolgálóegységet. Minden egyes időpontot, amikor egy páciens belép az utcáról a várószobába, úgy tekintünk, mint egy igény beérkezését a sorbanállási rendszerbe; másrészt ezt a beérkezést úgy is fel lehet fogni, mint egy populáció új tagjának születését - a populációt a jelenlevő páciensek alkotják. Hasonlóképpen, amikor (kezelés után) egy páciens elhagyja a rendelőt, ezt mint a sorbanállási rendszerből való távozást tekintjük, a születési-halálozási folyamat terminológiájában ez a populáció egy tagjának halálát jelenti.

A λ_k születési és a μ_k halálozási együtthatók szabad választásával különféle sorbanállási rendszerek konstruálására van lehetőségünk, mint ezt rövidesen látni fogjuk. Először azonban határozzuk meg a stacionárius megoldásokat az általános esetre.

Általános stacionárius megoldás

Az előző fejezetben láttuk, hogy a születési-halálozási folyamatok időtől függő megoldása gyakorlatilag kezelhetetlenné válik, amint bonyolultabb születési-halálozási λ_k, μ_k intenzitásokat veszünk. Továbbá, még ha a $P_k(t)$ függvényeket meg is tudnánk határozni, nem világos, mennyire segít minket ez a függvényhalmaz abban, hogy jobban át tudjuk tekinteni a sorbanállási rendszer viselkedését. Ezért természetes, hogy azt kérdezzük, vajon a $P_k(t)$ valószínűségϒek t növekedésével megállapodnak-e végül is (stabilizálódnak-e), megszűnik-e időbeli változásuk, beáll-e stacionárius állapot. Legyen

$$P_k := \lim_{t \to \infty} P_k(t),$$

ahol P_k jelenti azon esemény valószínűségét, hogy a rendszer hosszú működés után a k állapotban van. Nagyon fontos, hogy megértsük: jóllehet a P_k mennyiségek (feltéve, hogy léteznek) nem a t függvényei, ebből nem következik, hogy a határesetben nem megy át a folyamat az egyik állapotból a másikba. A populáció tagjainak száma változik az idővel, azonban annak valószínűségét, hogy a rendszer k tagú lesz, nagy t-re éppen P_k adja meg.

Feltételezve, hogy a konstans határérték létezik, a születési-halálozási folyamatokra felírt (29, 30) egyenletekben a $\lim\limits_{t \to \infty} \frac{dP_k(t)}{dt}$ mennyiséget nullával tehetjük egyenlővé. Ebből azonnal egy lineáris egyenletrendszer adódik

$$0 = -(\lambda_k + \mu_k)P_k + \lambda_{k-1}P_{k-1} + \mu_{k+1}P_{k+1}, \qquad \text{ha } k \geq 0, \tag{1}$$

feltételezve, hogy $\mu_0 = \lambda_{-1} = 0$. Megköveteljük, hogy ez a teljes eseményrendszer is legyen, melyre normalizáló feltételként hivatkozunk majd :

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1. \tag{2}$$

Egyensúlyi helyzetben a befelé irányuló folyamnak egyenlőnek kell lennie a kifelé irányuló folyammal. A k állapotra koncentrálva megfigyelhetjük, hogy

- a beáramlás intenzitása a k állapotba $=\lambda_{k-1}P_{k-1}+\mu_{k+1}P_{k+1}$,
- a kiáramlás intenzitása a k állapotból $=(\lambda_k+\mu_k)P_k$.

Egyensúlyi helyzetben ez a két érték meg kell, hogy egyezzen, így azonnal kapjuk, hogy

$$\lambda_{k-1}P_{k-1}+\mu_{k+1}P_{k+1}=(\lambda_k+\mu_k)P_k.$$

Amint azt az $I.3.$ részben láttuk

$$\lambda_{k-1}P_{k-1}=\mu_k P_k,$$

és az általános megoldás könnyen adódik

$$P_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}P_0.$$

Az összes P_k valószínűséget az intenzításokkal és az egyetlen ismeretlen P_0 állandóval fejeztük ki:

$$P_k=P_0\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}},\qquad k=0,1,2,.... \tag{3}$$

(Az üres szorzat értéke definíció szerint 1.) A normalizáló feltétel segítségével meghatározhatjuk a P_0-t, nevezetesen

$$P_0=\frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\prod\limits_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}.$$

Ez a szorzatalakú megoldás az *egyik legfontosabb egyenlete az elemi sorbanállási elméletnek.*

Most megvizsgáljuk a P_k stacionárius valószínűségek létezésének feltételeit. Pontosabban azt kell megnézni, hogy ezek a mennyiségek valóban valószínűségeloszlást alkotnak-e. Ehhez viszont az szükséges, hogy a $P_0 > 0$ legyen. Ez az egyenletekben szereplő születési és halálozási együtthatókra ró ki feltételt. Lényegében azt követeljük meg, hogy a rendszer alkalomadtán üres is legyen. Az, hogy ez feltétele a stabilitásnak rögtön ésszerűnek látszik. Pontosabban osztályozhatjuk a lehetőségeket, ha előbb definiáljuk az alábbi két összeget:

$$S_1 := \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}},$$

$$S_2 := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}.$$

Azt mondjuk, hogy a születési-halálozási folyamat minden egyes állapota *ergodikus*, ha

$$S_1 < \infty, S_2 = \infty;$$

rekurrens nulla, ha

$$S_1 = \infty, S_2 = \infty;$$

átmeneti (tranziens), ha

$$S_1 = \infty, S_2 < \infty.$$

Az ergodikus esetben $P_0 > 0$, és ekkor kapjuk a $\{P_k\}$ stacionárius valószínűségeket. Ez a legfontosabb eset számunkra. Az ergodikusság elégséges feltétele teljesül, ha a $\{\lambda_k/\mu_k\}$ sorozat egy bizonyos k értéktől kezdve végig 1 alatt marad, pontosabban ha létezik valamilyen k_0 pozitív egész szám és $\varepsilon > 0$ úgy, hogy minden $k \geq k_0$ értékre fennáll

$$\frac{\lambda_k}{\mu_k} < 1 - \varepsilon.$$

A legtöbb megvizsgálandó sorbanállási rendszerben teljesül ez a feltétel.

A sorbanállási rendszerek jellemzői

Ahhoz, hogy egy sorbanállási rendszert teljesen jellemezzünk, meg kell adnunk azt a sztochasztikus folyamatot, amely a beérkező igényeket írja le, és le kell írnunk a kiszolgálás szabályait és struktúráját. A beérkező folyamatot általában az egymás után beérkező igények közötti időintervallumok valószínűségeloszlása segítségével írjuk le. Ezt az $A(t)$ szimbólummal jelöljük, ahol

$$A(t) = P(\text{két egymás utáni beérkezési időköz} \leq t).$$

A sorbanállás elméletében többnyire feltesszük, hogy az egymás utáni beérkezések közötti időközök (röviden *beérkezési időközök*), azonos eloszlású független valószínűségi változók (a beérkezési folyamat ún. *felújítási folyamatot* alkot). A másik sztochasztikus mennyiség, amit meg kell adni, a beérkező igények által a feldolgozással szemben támasztott követelmények (munka) nagysága; ezt *kiszolgálási időnek* nevezzük és valószínűségeloszlását $B(x)$-szel jelöljük, azaz

$$B(x) = P(\text{kiszolgálási idő} \leq x).$$

A kiszolgálás ideje annak az időintervallumnak a hosszát jelenti, amelyet az igény a kiszolgáló egységben eltölt.

A kiszolgálás szabályára és struktúrájára vonatkozóan további mennyiségeket kell meghatározni. Az egyik a *befogadóképesség*, ami nem más, mint a várakozó sor maximális hossza. Ezt rendszerint K-val jelöljük, és értékét gyakran végtelennek tekintjük. Egy további jellemző a rendelkezésre álló *kiszolgáló állomások (csatornák) száma*. A *kiszolgálási elv* adja meg az igények kiszolgálásának sorrendjét. A leggyakrabban használt kiszolgálási elvek : FIFO (First In - First Out) - érkezési sorrendben; LIFO (Last In - First Out) - fordított sorrendben; SIRO (Service In Random Order) - véletlen sorrendben történő kiszolgálások. Ha a beérkező igényeket bizonyos csoportokba tartozás szerint meg lehet különböztetni, és a csoportok között *prioritást* lehet megállapítani, akkor ezen a prioritáson alapul a kiszolgálás sorrendje. Ez az egyik legalkalmasabb ütemezési elv, mivel így az igények közötti fontossági sorrendet felállítva történik a kiszolgálás.

A prioritásos sorbanállási elvnek két fő típusa van: *abszolút* és *relatív*. Az előbbi azt jelenti, hogy ha egy igény kiszolgálása folyamatban van, és érkezik egy magasabb prioritású igény, akkor az éppen kiszolgálás alatt álló folyamat kiszolgálása megszakad, és újra beáll a várakozási sorba, míg a magasabb prioritású kiszolgálása elkezdődik. Relatív priorításnál a kiszolgálás nem szakad meg, hanem annak végeztével a kiszolgáló a legmagasabb priorítással rendelkező igénnyel folytatja munkáját. A számítógéprendszerek egyik leggyakoribb kiszolgálási elve a TS (Time Sharing) vagy más terminológiával RR (Round Robin) — *időosztásos diszciplina* —, ami a következőt jelenti. A kiszolgálásra várakozó jobok mindegyikét a CPU bizonyos q, ú.n. kvantum ideig szolgálja ki. Ha ennyi idő alatt a job kiszolgálása teljesen befejeződik, akkor távozik a CPU-tól, ha nem, akkor ismét beáll a várakozók sorába. Ez az elv azt eredményezi, hogy a rövid CPU időt igénylő jobok nem tartózkodnak sokáig a CPU-nál. Mivel ezt az elvet elég nehéz matematikailag modellezni, vagyis megfelelő sztochasztikus folyamatot konstruálni hozzá, ezért szívesebben foglalkozunk ezen elv határesetével, amikor is a q nagyon kicsi. Ekkor kapjuk az ú.n. PS (Processor Sharing) — *osztott processzoros* — kiszolgálási diszciplinát. Ekkor, ha Δt idő alatt k job tartózkodik a CPU-nál, akkor mindegyik kiszolgálása folyik, de nem 1, hanem $1/k$ intenzitással. Vagyis Δt idő alatt mindegyik job igényelt kiszolgálási idejéből $\Delta t/k$ egység telt el.

A sorbanállási rendszerek hatékonyságának és teljesítményének vizsgálatához a következő mérőszámokat fogjuk meghatározni: az *igények várakozási ideje*; a rendszerben levő *igények száma*; a *foglaltsági intervallum* *hossza* (vagyis az a folytonos időintervallum, amelyben a kiszolgálós egység állandóan foglalt); az *üresjárati időszakasz hossza*; a pillanatnyi *munkahátralék nagysága*. Mindegyik mennyiség valószínűségi változó, és így teljes valószínűségszámítási jellemzésüket (vagyis eloszlásfüggvényüket) keressük, amit általában nehéz megadni, így sokszor megelégszünk az átlagos mennyiségekkel és szórásokkal.

Az elemi sorbanállási elmélet egyrészt történeti okokból, másrészt pedig azért fontos, mert alkalmas arra, hogy a bonyolultabb sorbanállási rendszerek jellemzőit is meg lehessen határozni.

Egyszerűség kedvéért tekintsünk először egy egykiszolgálós rendszert.

A sorbanállási rendszerek teljesítményének mérésére legalkalmasabb eszköz a torlódás vizsgálata. Legyen ϱ a következő dimenzió nélküli mennyiség:

$$\varrho = \text{forgalmi intenzitás} = \frac{\text{átlagos kiszolgálási idő}}{\text{átlagos beérkezési időköz}}.$$

Az 1-nél nagyobb *forgalmi intenzitás* azt mutatja, hogy az igények gyorsabban érkeznek, mint ahogy egy kiszolgálóegység (szerver, csatorna) ki tudná szolgálni őket.

Jelölje $\chi(A)$ az A esemény karakterisztikus függvényét, azaz

$$\chi(A) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } A \text{ teljesül,} \\ 0 & \text{, ha nem } A \text{ teljesül ,} \end{cases}$$

és $X(t) = 0$ azt az eseményt, hogy a kiszolgáló tétlen a t időpillanatban. Ekkor a szerver időegységre eső kihasználtsága a $[0, T]$ intervallumon

$$\frac{1}{T} \int_0^T \chi\left(X(t) \neq 0\right) dt \ ,$$

Ha $T \to \infty$ esetén a fenti mennyiségeknek létezik határértéke, akkor a szerver *kihasználtságán* ezt az U_s-sel jelölt mennyiséget értjük. Továbbá 1 valószínűséggel fennáll

$$U_s = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi\,(X(t) \neq 0)\, dt = 1 - P_0 = \frac{E\delta}{E\delta + Ei}, \tag{4}$$

ahol P_0 annak stacionárius valószínűsége, hogy a szerver tétlen, $E\delta$ a kiszolgáló egység átlagos foglaltsági periódushosszát, Ei pedig az átlagos tétlenségi periódushosszát jelöli. (Lásd pl. Cohen (1976, 1982), Ross (1970))

A (4) összefüggés Markov-folyamatoknál speciális esete a következő, gyakran felhasználható relációnak. Legyen $X(t)$ egy ergodikus Markov-folyamat, A pedig diszkrét állapotterének egy részhalmaza. $X(t)$ az idő folyamán felváltva tartózkodik A-ban és $\overline{A}$-ban. Ekkor 1 valószínűséggel

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left(\int_0^T \chi(X(t) \in A) dt \right) &= \sum_{i \in A} P_i \\ &= \frac{m(A)}{m(A) + m(\overline{A})},\end{aligned} \tag{5}$$

ahol $m(A)$ és $m(\overline{A})$ az A ill. az $\overline{A}$ részhalmazban való átlagos tartózkodási időt jelöli egy visszatérés alkalmával, P_i pedig az $X(t)$ folyamat ergodikus eloszlása. (Lásd Tomkó (1981, 1982))

Egy m párhuzamos szerverből álló rendszerben T idő alatt átlagosan $\lambda T/m$ igény érkezik szerverenként, feltéve, hogy a forgalom egyenletesen kerül elosztásra az m kiszolgáló egység között. Ha minden beérkezett kérés kiszolgálása átlagosan $1/\mu$ ideig tart, akkor egy szerver teljes foglaltsági idejének várható értéke $\lambda T/m\mu$, így

$$\varrho = \frac{\lambda}{m\mu}.$$

Mivel a kihasználtság maximum 1 lehet, így az m szerveres rendszer kihasználtsági tényezőre vonatkozó korrekt kifejezés:

$$\varrho = \min\left\{\frac{\lambda}{m\mu}, 1\right\}.$$

Másik gyakran használt teljesítménymérő mutató a számítógépes rendszerek sorbanállási modelljének analízisében a *rendszer átbocsátóképessége.* Ezt a mennyiséget úgy definiálhatjuk, mint az időegységenként kiszolgált igények átlagos számát. m szerveres rendszerben minden időegység alatt átlag $m\varrho\mu$ igény kiszolgálása fejeződik be, így az

$$\text{átbocsátóképesség} = m\varrho\mu = \min\{\lambda, m\mu\}.$$

Ami azt jelenti, hogy az átbocsátóképesség ekvivalens a λ érkezési intenzitással, amennyiben a λ kisebb, mint a maximális kiszolgálási sebesség $(m\mu)$, azon túl az átbocsátóképesség beáll $m\mu$-re.

Az igények szempontjából a legjelentősebb teljesítménymérő eszköz az az iidő, amit egy igény a várakozási sorban vagy a rendszerben tölt. Definiáljuk a W_j *várakozási időt*, mint a j-edik igény várakozási sorban eltöltött idejét, és a T_j *válaszidőt*, mint az igény által e rendszerben eltöltött teljes időt. Ezen jelöléseket használva a következő egyenlőséget kapjuk:

$$T_j = W_j + S_j,$$

ahol S_j a kiszolgálási időt jelöli. W_j és T_j is valószínűségi változó, várható értékük $\overline{W_j}$ és $\overline{T_j}$ alkalmas a rendszer teljesítményének mérésére.

A rendszer teljesítményének vizsgálata történhet a *várakozási sor hosszának* mérésével is. A $Q(t)$ valószínűségi változó jelentse a t időpillanatban a sorban található igények számát, és $N(t)$ a t időpillanatban a *rendszerben található igények számát.* Egy rendszerben levő igény vagy a várakozási sorban van, vagy éppen kiszolgálás alatt áll, tehát m szerveres rendszer esetén:

$$Q(t) = \max\{0, N(t) - m\}.$$

Mielőtt rátérnénk az elemi sorbanállási rendszerek vizsgálatára, néhány, Kendalltól származó jelölést vezetünk be, melyek segítségével osztályozhatjuk a rendszereket. A következő jelölés általánosan használt:

N/A/B/m/K, ahol

N: az igényforrások száma,

A: a beérkezési időközök eloszlásfüggvénye,

B: a kiszolgálási idő eloszlásfüggvénye,

m: a kiszolgálók száma,

K: a várakozási sor kapacitása.

Ha az A és B eloszlások exponenciálisak, akkor az M jelölést (Markov) használjuk. Továbbá, ha a befogadóképesség és az igényforrás számossága végtelen, akkor ezeket a jelöléseket elhagyjuk.

Így pl. az M/M/1 szimbólum, egy egy kiszolgálós Poisson beérkezéssel és exponenciális kiszolgálási idővel jellemzett rendszert jelöl. Az M/G/m rendszernél a beérkezések Poisson-folyamat szerint történnek, a kiszolgálási idők általános eloszlásúak, és m szerver áll rendelkezésünkre. Az N/M/M/r rendszer esetén az igények N forrásból származnak ahol exponenciális eloszlású ideig tartózkodnak, a kiszolgálást r egység végzi exponenciális eloszlású ideig.

II.1. Az M/M/1 típusú klasszikus sorbanállási rendszer

Az M/M/1 rendszer a legegyszerűbb nemtriviális rendszer. Emlékeztetünk rá, hogy ebben az esetben a beérkezési folyamat λ paraméterű Poisson-folyamat, vagyis a beérkezési időközök λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. A kiszolgálási idők μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Feltesszük továbbá, hogy a beérkezési időközök, és a kiszolgálási idők egymástól független valószínűségi változók. Jelölje most $X(t)$ a t időpillanatban a rendszerben tartózkodó igények számát, és azt mondjuk, hogy a rendszer a k állapotban van, ha $X(t) = k$. Mivel a fellépő valószínűségi változók exponenciális eloszlásúak, vagyis emlékezet nélküliek, az $X(t)$ folytonos idejű Markov-lánc lesz.

Vizsgáljuk meg a rendszer állapotváltozásainak valószínűségeit egy adott h időtartam alatt:

$$\begin{aligned} p_{k,k+1}(h) = {} & (\lambda h + o(h))\,(1 - (\mu h + o(h)) + \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} (\lambda h + o(h))^k\,(\mu h + o(h))^{k-1}\,, \\ & k = 0, 1, 2, \dots\,. \end{aligned}$$

Az összeg első tagja annak a valószínűsége, hogy a rendszerben egy igény érkezett, és nem szolgáltak ki egyet sem. Az összeg második tagja pedig annak a valószínűségét adja, hogy a rendszerbe 2 vagy több igény érkezett, és a beérkezettnél eggyel kevesebb került kiszolgálásra. De ez a valószínűség éppen $o(h)$-val egyenlő, így

$$p_{k,k+1}(h) = \lambda h + o(h).$$

Az előbbiekhez hasonlóan írható fel annak valószínűsége, hogy a rendszer k állapotban volt és a h időtartam után a $k-1$ állapotba került:

$$\begin{aligned} p_{k,k-1}(h) &= (\mu h + o(h))\,(1-(\lambda h + o(h)) + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} (\lambda h + o(h))^{k-1}\,(\mu h + o(h))^{k} \\ &= \mu h + o(h). \end{aligned}$$

Könnyen látható továbbá, hogy

$$p_{k,j} = o(h), \qquad \mid k-j \mid \geq 2.$$

Tehát egy olyan születési-halálozási folyamattal van dolgunk, amit a születési és halálozási intenzitások alábbi megválasztásával lehet jellemezni:

$$\lambda_k = \lambda, \qquad k = 0, 1, 2, ...,$$

$$\mu_k = \mu, \qquad k = 1, 2, 3....$$

Vagyis az összes születési intenzitás λ, az összes halálozási intenzitás pedig μ. Feltesszük, hogy végtelen hosszúságú sorok is létrejöhetnek, és az igények kiszolgálása FIFO elv alapján történik.

Helyettesítsük be az intenzitásokat a (3)-ba, így a következő adódik:

$$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu},$$

vagyis

$$P_k = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \qquad k \geq 0.$$

Az eredmény kézenfekvő. Az ergodikusság feltétele általánosságban (és így annak is, hogy egy $P_k > 0$ stacionárius megoldást kapjunk) $S_1 < \infty$ és $S_2 = \infty$; esetünkben az első feltétel:

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_k}{P_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k < \infty.$$

Az S_1 sor akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\lambda/\mu < 1.$$

Az ergodicitás második feltétele esetünkben

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda\left(\frac{P_k}{P_0}\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k = \infty.$$

Ez akkor teljesül, ha $\lambda/\mu \leq 1$. Tehát az ergodikusság szükséges és elégséges feltétele az M/M/1 sor esetén egyszerűen $\lambda < \mu$. A P_0 valószínűség kiszámolásához a normalizáló feltételt használjuk és azt kapjuk, hogy

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}.$$

Mivel $\lambda < \mu$, ezért a sor konvergens, és így

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}.$$

A kihasználtsági tényező $\varrho = \frac{\lambda}{\mu}$ vagy 1. A stabilitás feltétele miatt a $0 \leq \varrho < 1$ egyenlőséget meg kell követelni. Ez biztosítja, hogy $P_0 > 0$ legyen. Így

$$P_k = (1-\varrho)\varrho^k, \qquad k = 0, 1, 2, ...,$$

amely valóban valószínűségi eloszlás, nevezetesen a geometriai eloszlás.

A rendszer *jellemzői*:

(I.) A rendszerben tartózkodó *igények átlagos száma*:

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k = (1-\varrho)\varrho \sum_{k=1}^{\infty} k\varrho^{k-1} =$$

$$= (1-\varrho)\varrho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\varrho^k}{d\varrho} = (1-\varrho)\varrho \frac{d}{d\varrho}\left(\frac{1}{1-\varrho}\right) = \frac{\varrho}{1-\varrho}.$$

A rendszerben tartózkodó igények számának *szórásnégyzete*:

$$\begin{aligned}
\sigma_N^2 =& \sum_{k=0}^{\infty}(k-\overline{N})^2 P_k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(k-\frac{\varrho}{1-\varrho}\right)^2 P_k = \\
=& \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k + \left(\frac{\varrho}{1-\varrho}\right)^2 - \sum_{k=0}^{\infty} 2k\frac{\varrho}{1-\varrho} P_k = \\
=& \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)P_k + \frac{\varrho^2}{(1-\varrho)^2} + \frac{\varrho}{1-\varrho} - 2\left(\frac{\varrho}{1-\varrho}\right)^2 = \\
=& (1-\varrho)\varrho^2 \frac{d^2}{d\varrho^2}\sum_{k=0}^{\infty}\varrho^k + \frac{\varrho}{1-\varrho} - \left(\frac{\varrho}{1-\varrho}\right)^2 = \\
=& \frac{2\varrho^2}{(1-\varrho)^2} + \frac{\varrho}{1-\varrho} - \left(\frac{\varrho}{1-\varrho}\right)^2 = \frac{\varrho}{(1-\varrho)^2}.
\end{aligned}$$

(II.) A várakozó igények *átlagos száma* (átlagos sorhossz):

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)P_k = \sum_{k=1}^{\infty} kP_k - \sum_{k=1}^{\infty} P_k = \overline{N} - (1-P_0) = \overline{N} - \varrho = \frac{\varrho^2}{1-\varrho}.$$

Az átlagos sorhossz *szórásnégyzete*:

$$\sigma_Q^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(k-1)^2 P_k - \overline{Q}^2 = \frac{\varrho^2(1+\varrho-\varrho^2)}{(1-\varrho)^2}.$$

(III.) A *szerver kihasználtsága*:

$$U_s = 1 - P_0 = \frac{\lambda}{\mu} = \varrho.$$

(4) alapján látható, hogy

$$P_0 = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + E\delta},$$

ahol $E\delta$ a *kiszolgáló átlagos foglaltsági periódushossza*, $\frac{1}{\lambda}$ a tétlenségi idő várható értéke. Mivel a szerver addig tétlen, amíg igény nem érkezik, az pedig exponenciális eloszlású λ paraméterrel. Így

$$1-\varrho=\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}+E\delta},$$

melyből

$$E\delta=\frac{1}{\lambda}\frac{\varrho}{1-\varrho}=\frac{1}{\lambda}\overline{N}=\frac{1}{\mu-\lambda}.$$

(IV.) Egy igény *várakozási idejének* eloszlása:

Megmutatjuk, hogy olyan sorbanállási rendszernél, amelybe az igények Poisson-folyamat szerint érkeznek,

$$P_k(t)=R_k(t),$$

ahol $P_k(t)$ - mint korábban is - annak valószínűsége, hogy a t pillanatban a rendszer a k állapotban van, $R_k(t))$ pedig annak valószínűsége, hogy egy a t pillanatban érkező igény a rendszert a k állapotban találja. Jelölje

$$A(t,t+\Delta t)$$

azt az eseményt, hogy egy beérkezés történik a $(t,t+\Delta t)$ intervallumban. Ekkor

$$R_k(t):=\lim_{\Delta t\to 0}P\left(X(t)=k|A(t,t+\Delta t)\right),$$

ahol $X(t)$ a rendszerbeli igények száma a t pillanatban. Felhasználva a feltételes valószínűség definícióját,

$$R_k(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\left(X(t)=k\ ,\ A(t,t+\Delta t)\right)}{P\left(A(t,t+\Delta t)\right)}=$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(A(t, t+\Delta t) | X(t)=k\right) P\left(X(t)=k\right)}{P\left(A(t, t+\Delta t)\right)}.$$

Poisson-folyamat esetén tudjuk, hogy (az emlékezetnélküliség miatt) az $A(t, t+\Delta t)$ esemény nem függ a t pillanatban a rendszerben tartózkodó igények számától (és magától a t időtől sem), ezért

$$P\left(A(t, t+\Delta t) | X(t)=k\right) = P\left(A(t, t+\Delta t)\right),$$

így

$$R_k(t) = P\left(X(t)=k\right).$$

Azaz, annak valószínűsége, hogy egy beérkező igény a rendszert a k állapotban találja, éppen azzal a valószínűséggel egyezik meg, hogy a rendszer a k állapotban van.

Ha egy tetszőleges pillanatban egy igény érkezik, P_0 lesz annak a valószínűsége, hogy nem kell várakoznia, hisz ekkor a rendszer üres. Minden más esetben várakoznia kell. Tegyük fel, hogy az érkezés pillanatában n igény tartózkodik a rendszerben. Ekkor az érkező igénynek meg kell várnia, míg a kiszolgálás alatt álló igény kiszolgálása befejeződik és az előtte álló $n-1$ igény elhagyja a rendszert.

Feltettük, hogy a kiszolgálások egymástól függetlenek és μ paraméterű exponenciális eloszlásúak. Köztudott, hogy az exponenciális eloszlás emlékezetnélküli, így a kiszolgálás alatt levő igény eloszlása független attól mióta folyik a kiszolgálás, ezért a várakozási idő Γ vagy (Erlang-) eloszlású μ és n paraméterrel. Emlékeztetőül az n és μ paraméterű Erlang-eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f_n(x) = \frac{\mu(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu x}, \qquad x \geq 0.$$

Jelölje $f_W(x)$ egy tetszőleges igény várakozási idejének sűrűségfüggvényét, $x>0$. A teljes valószínűség tétele értelmében:

$$f_W(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!}\mu e^{-\mu x}\varrho^n(1-\varrho)=(1-\varrho)\varrho\mu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu x\varrho)^k}{k!}e^{-\mu x}=$$

$$=(1-\varrho)\varrho\mu e^{-\mu(1-\varrho)x}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} f_W(0)&=1-\varrho, && \text{ha } x=0,\\ f_W(x)&=\varrho(1-\varrho)\mu e^{-\mu(1-\varrho)x}, && \text{ha } x>0. \end{aligned}$$

Így

$$F_W(x)=1-\varrho+\varrho\left(1-e^{-\mu(1-\varrho)x}\right)=1-\varrho e^{-\mu(1-\varrho)x}.$$

Az átlagos várakozási idő:

$$\overline{W}=\int_0^{\infty}xf_W(x)dx=\frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)}=\varrho E\delta=\overline{N}\frac{1}{\mu}.$$

(V.) Egy igény *tartózkodási idejének* eloszlása:

A gondolatmenet az előzőhöz hasonló, de az igény akkor hagyja el a rendszert, ha őt is kiszolgálták, így az Erlang eloszlás $n+1$ tagból tevődik össze. Tehát a sűrűségfügvény:

$$f_T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-\varrho)\varrho^n\frac{(\mu x)^n}{n!}\mu e^{-\mu x}=\mu(1-\varrho)e^{-\mu x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\varrho\mu x)^n}{n!}=$$

$$=\mu(1-\varrho)e^{-\mu(1-\varrho)x}.$$

Az eloszlásfüggvény:

$$F_T(x)=1-e^{-\mu(1-\varrho)x}.$$

Vagyis azt kaptuk, hogy a tartózkodási idő is exponenciális eloszlású $\mu(1-\varrho)=\mu-\lambda$ paraméterrel. Ezért az átlagos rendszerbeli tartózkodási idő:

$$\overline{T}=\frac{1}{\mu(1-\varrho)}=\frac{1}{\mu-\lambda}.$$

Továbbá, nyilvánvaló, hogy

$$\overline{T}=\overline{W}+\frac{1}{\mu}=\frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu(1-\varrho)}=\frac{1}{\mu-\lambda}=E\delta.$$

Vegyük észre, hogy

$$(*)\qquad \lambda\overline{T}=\lambda\frac{1}{\mu(1-\varrho)}=\frac{\varrho}{1-\varrho}=\overline{N}.$$

Továbbá

$$(**)\qquad \lambda\overline{W}=\lambda\frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)}=\frac{\varrho^2}{1-\varrho}=\overline{Q}.$$

A (*) és a (**) összefüggéseket **Little-formuláknak** nevezzük, melyek általánosabb esetben is igazak maradnak.

Példa:

1. Egy postahivatalban naponta 70 személy fordul meg (a posta minden nap 10 óra hosszat van nyitva) ; óránként 10 személyt képesek kiszolgálni. Tételezzük fel, hogy a beérkezések megfelelnek a Poisson-folyamat jellegzetességeinek és a kiszolgálás exponenciális eloszlású. Mekkora lesz a várakozó sor átlagos hossza, mi annak a valószínűsége, hogy sorban 2-nél több személy várakozzék? Mennyi a várható sorban állási idő? Mennyi annak a valószínűsége, hogy a várakozás 20 percnél több időt vesz igénybe? $E\delta =?$

   Megoldás:

   Legyen $T = 1$ óra, akkor $\lambda = 7$, $\mu = 10$, $\varrho = \frac{7}{10}$

$$\overline{N} = \frac{\varrho}{1-\varrho} = \frac{7}{3}, \quad \overline{Q} = \overline{N} - \varrho = \frac{7}{3} - \frac{7}{10} = \frac{70-21}{30} = \frac{49}{30}$$

$$P(n > 3) = 1 - P(n \leq 3) = 1 - P_0 - P_1 - P_2 - P_3 =$$

$$= 1 - 1 + \varrho - (1-\varrho)(\varrho + \varrho^2 + \varrho^3) = \varrho^4 = 0.343 \cdot 0.7 = 0.2401$$

$$\overline{W} = \frac{\overline{N}}{\mu} = \frac{7}{3 \cdot 10} = \frac{7}{30} \text{ óra } \approx 14 \text{ perc}$$

$$P\left(W > \frac{1}{3}\right) = 1 - F_W\left(\frac{1}{3}\right) = 0.7 \cdot e^{-10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.3} = 0.7 \cdot e^{-}1 = 0.257$$

II.2. Az M/M/1/K típusú, véges befogadóképességű rendszer

Most olyan sorbanállási rendszereket vizsgálunk, amelyekben rögzített a várakozó igények számának maximuma. Feltesszük, hogy a rendszerben legfeljebb K igény tartózkodhat (beleértve a kiszolgáló egységben levő igényt is), egyetlen ezen felül érkező igény sem léphet be a rendszerbe, hanem azonnal távozik, anélkül, hogy kiszolgálnák őt. Továbbra is Poission-folyamat szerint érkeznek az igények, azonban csak azok az igények léphetnek be a rendszerbe, amelyek érkezésekor kevesebb, mint K igény van ott.

Ennek a látszólag bonyolult rendszernek a leírását az alábbi módon tudjuk összhangba hozni a születési-halálozási modellel. Az előzőekhez hasonlóan nem nehéz belátni, hogy ebben az esetben az alábbi intenzitásokat kapjuk.

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & \text{, ha } k < K \text{ ,} \\ 0 & \text{, ha } k \geq K \text{ ,} \end{cases}$$

$$\mu_k = \mu, \qquad k = 1, 2, ..., K.$$

Látszik, hogy ez a rendszer mindig ergodikus, mert állapottere véges. Továbbá

$$P_k = P_0 \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \qquad \text{ha } k \leq K.$$

Természetesen

$$P_k = 0, \text{ ha } k > K.$$

Szeretnénk kiszámolni a P_0 valószínűséget. A normalizáló feltétel alapján

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1} = \left[1 + \frac{(\lambda/\mu)\left(1 - (\lambda/\mu)^K\right)}{1 - \lambda/\mu}\right]^{-1} = \frac{1 - \lambda/\mu}{1 - (\lambda/\mu)^{K+1}},$$

végül

$$P_k = \begin{cases} \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k & \text{, ha } 0 \le k \le K, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$K = 1$ esetén az M/M/1/1 rendszer azt jelenti, hogy egyáltalán nincs várakozás.

$$P_k = \begin{cases} \frac{1}{1+\lambda/\mu} & \text{, ha } k = 0, \\ \frac{\lambda/\mu}{1+\lambda/\mu} & \text{, ha } k = 1 = K, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

II.3. Az M/M/n típusú rendszer

Ismét olyan λ állandó beérkezési intenzitású rendszert vizsgálunk, melyben korlátlan hosszúságú sor kialakulása megengedett. A rendszer n db kiszolgálócsatornával (szerverrel) van ellátva. Ez az eset is leírható születési-halálozási folyamattal a következők miatt. Először is tekintsünk független, μ_i paraméterű exponenciális eloszlású ξ_i valószínűségi változókat. Jelöljük η-val ezen ξ_i $(i = 1, 2, ..., N)$ változók minimumát. Nem nehéz belátni, hogy η is exponenciális eloszlású lesz $\sum_{i=1}^{N} \mu_i$ paraméterrel. Ugyanis

$$P(\eta < x) = 1 - P(\eta \ge x) = 1 - P(\xi_i \ge x,\ i = 1, ..., N) =$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{N} P(\xi_i \ge x) = 1 - e^{-\left(\sum_{i=1}^{N} \mu_i\right) x}.$$

Ezt felhasználva kapjuk meg annak valószínűségét, hogy a rendszer a h idő alatt a k állapotból a $k-1$ állapotba, ill. a k állapotból a $k+1$ állapotba kerül. Így

$$p_{k,k-1}(h) = (1 - (\lambda h + o(h)))\,(\mu_k h + o(h)) + o(h) = \mu_k h + o(h),$$

$$p_{k,k+1}(h) = (\lambda h + o(h))\,(1 - (\mu_k h + o(h))) + o(h) = \lambda h + o(h),$$

ahol

$$\mu_k = \min(k\mu, n\mu) = \begin{cases} k\mu & , \text{ha } 0 \le k \le n, \\ n\mu & , \text{ha } n < k. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy az ergodikusság feltétele $\lambda/n\mu < 1$.

Amikor hozzákezdünk a P_k mennyiségek kiszámolásához, azt találjuk, hogy a megoldást két részre kell szétbontanunk, mivel a μ_k mennyiség kétféle módon függ k-tól. Eszerint, ha $k < n$, akkor

$$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}.$$

Ha viszont $k \ge n$, akkor

$$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{j=n}^{k-1} \frac{\lambda}{n\mu} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{n! n^{k-n}}.$$

Összefoglalva a kapott eredményeket:

$$P_k = \begin{cases} P_0 \dfrac{(n\varrho)^k}{k!} & , \text{ha } k \le n, \\[2ex] P_0 \dfrac{\varrho^k n^n}{n!} & , \text{ha } k > n, \end{cases}$$

ahol

$$\varrho = \frac{\lambda}{n\mu} < 1.$$

Ez a ϱ éppen a kihasználtsági tényező. Továbbá

$$P_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n\varrho)^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(n\varrho)^k}{n!} \frac{1}{n^{k-n}}\right)^{-1},$$

és így

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n\varrho)^k}{k!} + \frac{(n\varrho)^n}{n!} \frac{1}{1-\varrho}\right)^{-1}.$$

Annak a valószínűsége, hogy egy újonnan érkező igénynek sorba kell állnia,

$$P(\text{sorbanállás}) = \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \sum_{k=n}^{\infty} P_0 \frac{(n\varrho)^k}{n!} \frac{1}{n^{k-n}}.$$

Ebből

$$P(\text{sorbanállás}) = \frac{\dfrac{(n\varrho)^n}{n!} \dfrac{1}{1-\varrho}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n\varrho)^k}{k!} + \frac{(n\varrho)^n}{n!} \frac{1}{1-\varrho}}.$$

Ezt a valószínűséget széles körben használják a telefonrendszerek vizsgálatával kapcsolatban. Itt annak a valószínűségét adja meg, hogy egy újonnan beérkezett hívás (igény) számára nincs szabad vonal (kiszolgálóegység) egy n szerveres rendszerben. Ez az ú.n. Erlang C-formulája, amit többnyire $C(n, \lambda/\mu)$ szimbólummal jelölnek.

Az M/M/n rendszer jellemzői:

(I.) Az *átlagos sorhossz*:

$$\overline{Q} = \sum_{k=n}^{\infty} (k-n) P_k = \sum_{j=0}^{\infty} j P_{n+j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+j}}{n! n^j} P_0 =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} j \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \varrho^j P_0 = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \varrho \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d\varrho^j}{d\varrho} = P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \varrho \frac{d}{d\varrho} \sum_{j=0}^{\infty} \varrho^j =$$

$$= P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \frac{\varrho}{(1-\varrho)^2}.$$

(II.) A foglalt *szerverek átlagos száma*:

$$\overline{n} = \sum_{k=0}^{n-1} k P_k + \sum_{k=n}^{\infty} n P_k = P_0 \left(n\varrho \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n\varrho)^k}{k!} + \frac{(n\varrho)^n}{(n-1)!} \frac{1}{1-\varrho} \right) =$$

$$= n\varrho\left(\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n\varrho)^k}{k!}+\frac{(n\varrho)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(n\varrho)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{1}{1-\varrho}-1\right)\right)P_0 =$$

$$= n\varrho\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n\varrho)^k}{k!}+\frac{(n\varrho)^{n}}{n!}\frac{1}{1-\varrho}\right)P_0 = n\varrho\frac{1}{p_0}P_0 = n\varrho.$$

(III.) A rendszerben tartózkodó *igények átlagos száma*:

$$\overline{N}=\sum_{k=0}^{\infty}kP_k=\sum_{k=0}^{n-1}kP_k+\sum_{k=n}^{\infty}(k-n)P_k+\sum_{k=n}^{\infty}nP_k=\overline{n}+\overline{Q},$$

ami egyszerű megfontolásokból is adódik, hiszen egy igény vagy várakozik, vagy kiszolgálás alatt van. A kiszolgálás alatt levők száma viszont megegyezik a foglalt kiszolgálóegységek számával. Ha $\overline{S}$-gal jelöljük a szabad szerverek vagy kiszolgálóegységek átlagos számát, akkor

$$\begin{aligned}\overline{n} =& n-\overline{S},\\ \overline{S} =& n-\frac{\lambda}{\mu},\end{aligned}$$

így

$$\overline{N}=n-\overline{S}+\overline{Q},$$

vagyis

$$\overline{N}-n=\overline{Q}-\overline{S}.$$

(IV.) A *várakozási idő* eloszlása:

Egy érkező igénynek akkor kell várakoznia, ha a rendszerben legalább n igény tartózkodik. Mivel ebben az esetben a kiszolgálás $n\mu$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, az igény várakozási ideje, ha $n+j$ igény tartózkodik a rendszerben Erlang-eloszlású $j+1$ és $n\mu$

paraméterekkel. Így a teljes valószínűség tétele alapján a várakozási idő sűrűségfüggvénye:

$$f_W(x) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{n+j} (n\mu)^{j+1} \frac{x^j}{j!} e^{-n\mu x}.$$

Behelyettesítve a stacionárius eloszlást

$$\begin{aligned}
f_W(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} P_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \varrho^j (n\mu)^{j+1} \frac{x^j}{j!} e^{-n\mu x} = \\
&= \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} n\mu e^{-n\mu x} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\varrho n\mu x)^j}{j!} = \\
&= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0 n\mu e^{-(n\mu-\lambda)x} = \\
&= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0 n\mu e^{-n\mu(1-\varrho)x} = \\
&= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0 \frac{1}{1-\varrho} n\mu(1-\varrho) e^{-n\mu(1-\varrho)x} = \\
&= P(\text{sorbanállás}) n\mu(1-\varrho) e^{-n\mu(1-\varrho)x}.
\end{aligned}$$

Vagyis

$$P(W > x) = \int_x^{\infty} f_W(u)du = P(\text{sorbanállás}) e^{-n\mu(1-\varrho)x}.$$

A várakozási idő eloszlásfüggvénye:

$$\begin{aligned}
F_W(x) &= 1 - P(\text{sorbanállás}) + P(\text{sorbanállás}) \left(1 - e^{-n\mu(1-\varrho)x}\right) = \\
&= 1 - P(\text{sorbanállás}) e^{-n\mu(1-\varrho)x}.
\end{aligned}$$

Innen az átlagos várakozási idő:

$$\overline{W} = \int_0^{\infty} x f_W(x)dx = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0 \frac{1}{(1-\varrho)^2 n\mu}.$$

(V.) A *tartózkodási idő* eloszlása:

A kiszolgálás azonnal elkezdődik, ha a rendszerben n-nél kevesebb igény tartózkodik, így stacionárius esetben egy érkező igény rendszerben eltöltött ideje megegyezik a kiszolgálási idővel. Azonban, ha várakoznia kell, akkor a várakozási idő és a kiszolgálási idő összege, vagyis az eloszlás két független eloszlás összege, mely közül az egyik μ paraméterű exponenciális, a másik pedig a rendszertől függő paraméterű Erlang-eloszlás. A tartózkodási idő sűrűségfüggvényét a következő módon határozzuk meg.

$$f_T(x) = P(\text{nincs sorbanállás})\mu e^{-\mu x} + f_{W+S}(x)$$

Tudjuk, hogy

$$f_W(x) = P(\text{sorbanállás})e^{-n\mu(1-\varrho)x} n\mu(1-\varrho).$$

Ekkor

$$f_{W+S}(z) = \int_0^z f_W(x)\mu e^{-\mu(z-x)}dx =$$

$$= P(\text{sorbanállás})n\mu(1-\varrho)\mu \int_0^z e^{-n\mu(1-\varrho)x}e^{-\mu(z-x)}dx =$$

$$= \frac{(n\varrho)^n}{n!}P_0\frac{1}{(1-\varrho)}n\mu(1-\varrho)\mu e^{-z\mu}\int_0^z e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)x}dx =$$

$$= \frac{(n\varrho)^n}{n!}P_0 n\mu\frac{1}{n-1-\lambda/\mu}e^{-\mu z}\left(1-e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)z}\right).$$

Ezért

$$f_T(x) = \left(1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{P_0}{n!(1-\varrho)}\right)\mu e^{-\mu x}+$$

$$+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}n\mu P_0\frac{1}{n-1-\lambda/\mu}e^{-\mu x}\left(1-e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)x}\right) =$$

$$= \mu e^{-\mu x}\left(1 - \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0}{n!(1-\varrho)} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} n P_0 \frac{1}{n-1-\lambda/\mu}\left(1 - e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)x}\right)\right) =$$

$$= \mu e^{-\mu x}\left(1 + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0}{n!(1-\varrho)} \frac{1-(n-\lambda/\mu)e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)x}}{n-1-\lambda/\mu}\right).$$

Így

$$P(T > x) = \int_x^\infty f_T(y)dy =$$

$$= \int_x^\infty \mu e^{-\mu y} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0}{n!(1-\varrho)} \frac{1}{n-1-\lambda/\mu}\left(\mu e^{-\mu y} - \mu(n-\lambda/\mu)e^{-\mu(n-\lambda/\mu)y}\right)dy =$$

$$= e^{-\mu x} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \frac{1}{n!(1-\varrho)(n-1-\lambda/\mu)}\left(e^{-\mu x} - e^{-\mu(n-\lambda/\mu)x}\right) =$$

$$= e^{-\mu x}\left(1 + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0}{n!(1-\varrho)} \frac{1-e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)x}}{n-1-\lambda/\mu}\right).$$

Innen

$$F_T(x) = 1 - P(T > x).$$

Továbbá

$$\overline{T} = \int_0^\infty x f_T(x)dx = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{n\mu}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} P_0 \frac{1}{(1-\varrho)^2} = \frac{1}{\mu} + \overline{W},$$

mint az várható volt.

Stacionárius esetben a távozó igények átlagos számának meg kell egyeznie az érkező igények átlagos számával, így a rendszerben tartózkodók átlagos száma állandó. Tehát annyi igény tartózkodik átlagosan a rendszerben, amennyi érkezik egy igény tartózkodási ideje alatt, vagyis

$$\lambda\overline{T} = \overline{N} = \overline{Q} + \overline{n},$$

továbbá

$$\lambda\overline{W} = \overline{Q}.$$

Ezek az ún. Little-formulák, melyeket számolás útján is könnyen bizonyíthatunk. Ugyanis, mint beláttuk

$$\overline{N} = n\varrho + P_0 \frac{(n\varrho)^n}{n!(1-\varrho)^2}\varrho.$$

Mivel

$$\overline{T} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{n\mu}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}P_0\frac{1}{(1-\varrho)^2},$$

így

$$\lambda\overline{T} = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{(n\varrho)^n}{n!}P_0\frac{\varrho}{(1-\varrho)^2},$$

vagyis

$$\overline{N} = \lambda\overline{T},$$

mivel $\frac{\lambda}{\mu} = n\varrho$. Továbbá

$$\overline{Q} = \lambda\overline{W},$$

mivel

$$\overline{n} = n\varrho.$$

(VI.) A szerverek *összkihasználtsága*:

Egy szerver kihasználtsága nyilvánvalóan

$$U_s = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} P_k + \sum_{k=n}^{\infty} P_k = \frac{\bar{n}}{n} = \varrho.$$

Így az összkihasználtság

$$U_n = nU_s = \bar{n}.$$

(VII.) A *foglaltsági periódushosszak*:

A rendszert akkor nevezzük tétlennek, ha a rendszerben nem tartózkodik igény, minden más esetben foglaltnak nevezzük. Jelölje a $E\delta^{(n)}$ a rendszer átlagos foglaltsági periódushosszát. Ekkor (4) miatt a rendszer kihasználtsága

$$U_r = 1 - P_0 = \frac{E\delta^{(n)}}{\frac{1}{\lambda} + E\delta^{(n)}},$$

melyből

$$E\delta^{(n)} = \frac{1 - P_0}{\lambda P_0}.$$

Ha az egyes kiszolgáló egységeket tekintjük és feltesszük, hogy üres egységnél, szervernél ahhoz érkezik hamarabb igény, amely korábban vált üressé, akkor ha $j < n$ igény tartózkodik a rendszerben, a szabad szerverek száma $n - j$.

Tekintsünk egy konkrét szervert és tegyük fel, hogy a rendszerben j igény tartózkodik a szerver szabaddá válása pillanatában. Ekkor ezen szerver átlagos üresjárati ideje ilyen feltételek mellett

$$\bar{e}_j = \frac{n - j}{\lambda}.$$

Annak a valószínűsége, hogy ebben az állapotban van

$$a_j = \frac{P_j}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} P_i},$$

így egy szerver átlagos szabad periódushossza:

$$\overline{e} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \overline{e}_j = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-j)P_j}{\lambda \sum_{i=0}^{n-1} P_i} = \frac{\overline{S}}{\lambda P(e)},$$

ahol $P(e)$ annak a stacionárius valószínűsége, hogy egy érkező igénynek nem kell várakoznia. Ekkor ismét (4) szerint

$$U_s = \varrho = \frac{E\delta}{\overline{e} + E\delta},$$

melyből

$$\varrho\overline{e} = (1-\varrho)E\delta,$$

ahol ϱ annak stacionárius valószínűsége, ho=gy a szerver nem üres, $E\delta$ pedig az átlagos foglaltsági periódushossza. Így

$$E\delta = \frac{\varrho}{1-\varrho} \frac{\overline{S}}{\lambda P(e)}.$$

$n = 1$ esetben

$$\overline{S} = 1 - \varrho, \qquad P(e) = P_0 = 1 - \varrho, \qquad \varrho = \frac{\lambda}{\mu},$$

így

$$E\delta = \frac{1}{\mu - \lambda},$$

mely a jól ismert képlet.

Példa:

Adott egy 4 csatornás telefonközpont, $\lambda = 6$, $\mu = 2$ intenzitásokkal. Határozzuk meg a rendszer jellemzőit!

Megoldás:

$$P_0 = 0.0377, \quad \overline{Q} = 1.528, \quad \overline{N} = 4.528, \quad \overline{S} = 1, \quad \overline{n} = 3$$

$$P(W > 0) = C(4,3) = 0.509$$

$\overline{W} = 0.255$ időegység, $\overline{T} = 0.755$ időegység, $U_s = \frac{3}{4}$,
$\overline{e} = 0.35$ időegység, $E\delta = 1.05$ időegység,
$E\delta^{(4)} = 4.2$ időegység, $U_r = 0.9623$.

II.4. Az M/M/n/n típusú Erlang-féle veszteséges rendszer

Ezen modellre n csatornás veszteséges rendszerként is szokás hivatkozni az alábbiak miatt. Az n csatornás rendszerbe Poisson-folyamat szerint érkeznek az igények. Ha van üres csatorna vagy szerver az igény kiszolgálása exponenciális időtartamú μ paraméterrel. Ha minden kiszolgáló egység foglalt, akkor az igény elvész, azaz sorbanállás nem megengedett. Ezen probléma a tömegkiszolgálás egyik legrégibb problémája, mellyel a század elején a telefonközpontok kihasználtságával kapcsolatban foglalkozott A. K. Erlang és C. Palm. Hasonló jelenséggel találkozunk a parkolóhelyek esetében is.

A feltételek alapján ez is egy születési-kihalási folyamattal modellezhető, melynek intenzitásai a következők:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & \text{, ha } k < n, \\ 0 & \text{, ha } k \geq n, \end{cases}$$

$$\mu_k = k\mu, \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Azt mondjuk, hogy a folyamat k állapotban van, ha k szerver foglalt, azaz ha k igény tartózkodik a rendszerben.

Nyilvánvalóan az e rgodikus eloszlás létezik, mivel a folyamat véges állapotterű. A folyamat stacionárius eloszlása:

$$P_k = \begin{cases} P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} & \text{, ha } k \leq n, \\ 0 & \text{, ha } k > 0. \end{cases}$$

A normalizáló feltétel miatt:

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} \right)^{-1},$$

így

$$P_k = \frac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{1}{k!}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^i \dfrac{1}{i!}} = \frac{\dfrac{\varrho^k}{k!}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \dfrac{\varrho^i}{i!}}, \qquad k \leq n.$$

A rendszer egyik jellemzője a

$$P_n = \frac{\dfrac{\varrho^n}{n!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{\varrho^k}{k!}}$$

valószínűség, melyet először Erlang vezetett be (1917-ben) és Erlang-féle veszteségformula vagy Erlang-féle B formula néven ismert, általában $B(n, \lambda/\mu)$ szimbólummal jelölik. A P_n valószínűség annak a valószínűsége stacionárius esetben, hogy egy újonnan érkező igényt nem fogad a rendszer, azaz az igény elveszik.

Kis n-re a P_0 valószínűség könnyen kiszámolható. Nagy n-re és kis ϱ-ra $P_0 \approx e^{-\varrho}$, így

$$P_k \approx \frac{\varrho^k}{k!} e^{-\varrho},$$

azaz a Poisson-eloszlás. Nagy n-re és nagy ϱ-ra általában

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\varrho^j}{j!} \neq e^{\varrho}.$$

Ebben az esetben a nevező a ϱ közepű Poisson-eloszlás első $(n+1)$ tagjának összege. Elegendő nagy ϱ-ra ($\varrho > 15$) a Poissson-eloszlást közelítjük ϱ közepű és $\sqrt{\varrho}$ szórású normális eloszlással, így

$$P_n \approx \frac{\dfrac{\varrho^n}{n!} e^{-\varrho}}{\Phi(s)},$$

ahol

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx,$$

és

$$s = \frac{n + \frac{1}{2} - \varrho}{\sqrt{\varrho}}.$$

Az M/M/n/n rendszer jellemzői:

(I.) A rendszerben tartózkodó *igények átlagos száma*, a foglalt *szerverek átlagos száma*:

$$\overline{N} = \overline{n} = \sum_{j=0}^{n} jP_j = \sum_{j=0}^{n} j\frac{\varrho^j}{j!}P_0 = \varrho \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\varrho^i}{i!}P_0 = \varrho(1-P_n),$$

így 1 szerverre jutó átlagos igényszám:

$$\frac{\varrho}{n}(1-P_n).$$

(II.) A *szerverek kihasználtsága*:

Mint már láttuk

$$U_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}P_i = \frac{\bar{n}}{n}.$$

Jelen esetben

$$U_s = \frac{\varrho}{n}(1-P_n).$$

(III.) Az átlagos *tétlenségi idő* (egy konkrét kiszolgáló esetén):

A jól ismert (4) vagy (5) összefüggést alkalmazva:

$$P(\text{az adott kiszolgálóegység foglalt}) = \frac{1/\mu}{\overline{e} + 1/\mu},$$

ahol $\overline{e}$ az átlagos tétlenségi idő. Így

$$\frac{\varrho}{n}(1-P_n)=\frac{1/\mu}{\overline{e}+1/\mu},$$

tehát

$$\overline{e}=\frac{n}{\lambda(1-P_n)}-\frac{1}{\mu}.$$

Ha az üres szerverek olyan sorrendben kezdik kiszolgálni az érkező igényeket, mint amilyen sorrendben megüresedtek, akkor egy szerver működését a következőképpen írhatjuk le. Ha egy üressé vált szerver $(j-1)$ másik üres szervert talál megüresedése pillanatában, akkor csak a j-edik igény kiszolgálásával kezdődik ismét a foglaltsági periódusa.

Jelölje $\overline{e}$ a szerver átlagos üresjárati periódusa hosszát, $\overline{e}_j$ pedig a fenti állapotban az átlagos tétlenségi időt. Nyilvánvalóan $\overline{e}_j=\frac{j}{\lambda}$, $\overline{e}$ pedig a teljes várható érték tétele alapján:

$$\overline{e}=\sum_{j=1}^{n}\frac{P_{n-j}}{1-P_n}\frac{j}{\lambda}=\frac{1}{\lambda(1-P_n)}\overline{S}=\frac{n-\overline{n}}{\lambda(1-P_n)}=$$
$$=\frac{n}{\lambda(1-P_n)}-\frac{\varrho}{\lambda}=\frac{n}{\lambda(1-P_n)}-\frac{1}{\mu},$$

azaz más úton is ugyanarra az eredményre jutunk.

(IV.) A rendszer átlagos *foglaltsági periódushosszap*:

Nyilvánvalóan (4) alapján

$$U_r=1-P_0=\frac{E\delta^{(n)}}{\frac{1}{\lambda}+E\delta^{(n)}},$$

melyből

$$E\delta^{(n)}=\frac{1-P_0}{\lambda P_0}=\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\varrho^i}{i!}}{\lambda\left(1+\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\varrho^i}{i!}\right)}.$$

Példák:

1. Egy parkolóhoz az autók 20 másodpercenként érkeznek, és átlagosan 10 percig maradnak. A beérkezés Poisson, a kiszolgálás exponenciális. Milyen nagynak kell lennie a parkolónak, hogy egy autó legfeljebb 1% eséllyel forduljon vissza, mert a parkoló telített?

   Megoldás:

$$\varrho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{\frac{1}{3}} = 30$$

$$P_n = \frac{\frac{\varrho^n}{n!} e^{-\varrho}}{\sum_{j=0}^{n} \frac{\varrho^j}{j!} e^{-\varrho}} = 0.01$$

   a normális eloszlású közelítést követve

$$P_n = 0.01 = \frac{\frac{\varrho^n}{n!} e^{-\varrho}}{\Phi\left(\frac{n+\frac{1}{2}-\varrho}{\sqrt{\varrho}}\right)} =$$

$$\frac{\Phi\left(\frac{n+\frac{1}{2}-\varrho}{\sqrt{\varrho}}\right) - \Phi\left(\frac{n-\frac{1}{2}-\varrho}{\sqrt{\varrho}}\right)}{\Phi\left(\frac{n+\frac{1}{2}-\varrho}{\sqrt{\varrho}}\right)}.$$

   Ebből

$$0.99\Phi\left(\frac{n+\frac{1}{2}-\varrho}{\sqrt{\varrho}}\right) = \Phi\left(\frac{n-\frac{1}{2}-\varrho}{\sqrt{\varrho}}\right).$$

   A normális eloszlás táblázatából nem nehéz ellenőrizni, hogy $n = 41$.

2. Egy 50 csatornás telefonközpontba átlagosan 10 percenként érkeznek hívások Poisson-eloszlás szerint. A kiszolgálási idő exponenciális, 5 perc átlaggal. Határozzuk meg a rendszer jellemzőit!

Megoldás:

Esetünkben Poisson eloszlással való közelítés használható, $\varrho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.5$ értékkel.

$P_{50} = 0.00000$ a Poisson-eloszlás szerint, sőt, még $n = 6$-nál is $P_6 = 0.00001$. Ez azt jelenti, hogy igény szinte sohasem lesz elutasítva.

A foglalt csatornák átlagos száma:

$$\overline{n} = \varrho(1 - P_n) = \varrho = 0.5 \ ,$$

így az egy csatornára jutó átlagos igényszám:

$$\frac{0.5}{50} = \frac{5 \times 10^{-1}}{5 \times 10} = 10^{-2} \ ,$$

mely egyben a csatornák kihasználtsága.

$U_r = 1 - 0.606 = 0.394$, mely a rendszer kihasználatsága.

A rendszer átlagos foglaltsági periódushossza:

$$E\delta = \frac{(1 - P_0)}{(\lambda P_0)} = \frac{0.394}{2 \times 0.606} = \frac{0.394}{1.212} = 0.32 \text{ perc}$$

A csatornák átlagos tétlenségi ideje:

$$\overline{e} = \frac{n}{\lambda(1 - P_n)} - \frac{\varrho}{\lambda} = \frac{50}{2(1 - 0)} - \frac{0,5}{2} = 25 - \frac{1}{4} = 24.75 \text{ perc.}$$

II.5. Véges forrású rendszerek

Eddig olyan rendszerekkel foglalkoztunk, ahol a beérkezések Poisson-folyamat szerint történnek. Ez más szóval azt is jelenti, hogy a forrásunk végtelen. Azonban a gyakorlatban is találhatók olyan problémák, amelyeknél a *forrás véges*. Tekintsük az ún. *gépkiszolgálási problémát*. Tegyük fel, hogy n darab gép működik egymástól függetlenül. A gépek működési ideje valószínűségi változó. Miután a gép meghibásodik egy vagy több szerelő kijavítja, ahol a javítási idők is valószínűségi változók. Javítás után a gépek ismét dolgozni kezdenek, és az egész folyamat kezdődik előről. Látható, hogy teljesen hasonló problémával találkozunk a terminál-rendszereknél, ahol a gépek szerepét a terminálok, a szerelő szerepét a CPU veszi át. Mivel az utóbbi időben a számítógépek sztochasztikus modellezésében egyre nagyobb szerepet játszanak a sorbanállási rendszerek, jelen fejezetben gyakran használunk számítástechnikai kifejezéseket is.

Jelen problémakör a sorbanállási elmélet egyik legrégibb alkalmazási területe. Nagyon sok cikk foglalkozik vele különböző feltételek esetén. Nagyon jó áttekintést nyújt Stecke – Aronson (1985), Sztrik (1981, 1989), Takagi (1993).

II.5.1. Az $< n/M/M/1 >$ modell

Feltesszük, hogy az igények egy n elemű véges forrásból érkeznek, ahol a forrásban eltöltött idő minden igény esetén egymástól független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A kiszolgálási idők szintén exponenciális eloszlásúak μ paraméterrel és függetlenek az előbbi valószínűségi változóktól. Jelölje $X(t)$ a t időpillanatban a kiszolgáló egységnél tartózkodó igények számát. Az előbbiekhez hasonlóan nem nehéz belátni, hogy $X(t)$ is egy születési-kihalási folyamat

$$\lambda_k = \begin{cases} (n-k)\lambda & , \text{ha } 0 \le k \le n, \\ 0 & , \text{ha } k > n, \end{cases}$$

születési intenzitásokkal, és

$$\mu_k = \mu, \qquad k \geq 1,$$

kihalási intenzitással. Így

$$P_k = \frac{n!}{(n-k)!}\varrho^k P_0 = (n-k+1)\varrho P_{k-1},$$

ahol

$$\varrho = \frac{\lambda}{\mu},$$

és

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\varrho^k} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\varrho^k}.$$

Az ergodikus eloszlás mindig létezik, de ha $\varrho > 1$ akkor az igények torlódnak és több kiszolgálóegységre lenne szükség.

Az előbbi valószínűségekre egy másik kifejezést is megadunk, amely numerikus számításoknál könnyebben alkalmazható. Legyen $P(k;\lambda)$ a λ paraméterű Poisson-eloszlás és $Q(k;\lambda)$ ennek kummulatív eloszlása, azaz

$$P(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad 0 \leq k < \infty;$$

$$Q(k;\lambda) = \sum_{i=0}^{k} P(i;\lambda), \qquad 0 \leq k < \infty.$$

Megmutatjuk, hogy

$$P_k = \frac{P(n-k;R)}{Q(n;R)}, \qquad 0 \leq k \leq n,$$

ahol

$$R = \frac{\mu}{\lambda} = \varrho^{-1}.$$

Ugyanis

$$\frac{P(n-k;R)}{Q(n;R)}=\frac{\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-k}e^{-\frac{\mu}{\lambda}}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{i}e^{-\frac{\mu}{\lambda}}}=\frac{\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-i}}=\frac{\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i}}.$$

Az n/M/M/1 rendszer jellemzői:

(I.) A *szerver kihasználtsága* és a *rendszer átbocsátóképessége*:

A szerver kihasználtsága:

$$U_s=1-P_0.$$

A korábbi rekurzív ös¡szefüggést felhasználva

$$U_s=\frac{Q(n-1;R)}{Q(n;R)}.$$

A rendszer átbocsátóképessége:

$$\lambda_t=\mu U_s.$$

(II.) A rendszerben tartózkodó *igények átlagos száma*:

$$\overline{N}=\sum_{k=0}^{n}kP_k=n-\sum_{k=0}^{n}(n-k)P_k=$$

$$=n-\frac{1}{\varrho}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\varrho P_k=n-\frac{1}{\varrho}\sum_{k=0}^{n-1}P_{k+1}=$$

$$=n-\frac{1}{\varrho}(1-P_0)=n-\frac{U_s}{\varrho}.$$

Másképpen:

$$\overline{N}=n-\frac{RQ(n-1;R)}{Q(n;R)}=n-\frac{U_s}{\varrho}.$$

(III.) Az *átlagos sorhossz*:

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n}(k-1)P_k = \sum_{k=1}^{n} kP_k - \sum_{k=1}^{n} P_k = n - \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0) - (1-P_0) =$$

$$= n - (1-P_0)(1+\frac{\mu}{\lambda}) = n - \left(1+\frac{1}{\varrho}\right)U_s.$$

(IV.) Az igénygenerálásra alkalmas *teminálok átlagos száma*:

$$\overline{m} = \sum_{k=0}^{n}(n-k)P_k = n - \overline{N} = \frac{\mu}{\lambda}(1-P_0) = \frac{U_s}{\varrho}.$$

(V.) A szerver átlagos *foglaltsági periódushossza*:

Mivel

$$U_s = 1 - P_0 = \frac{E\delta}{\frac{1}{n\lambda} + E\delta},$$

ezért

$$E\delta = \frac{1-P_0}{n\lambda P_0} = \frac{U_s}{n\lambda(1-U_s)}.$$

(VI.) A *várakozás valószínűsége*:

$$P(W>0) = \sum_{k=1}^{n} P_k = 1 - P_0 = U_s.$$

Számítógépes alkalmazásoknál gyakran szükségünk van az alábbi jellemzőkre is.

(VII.) A terminálok *kihasználtsága*:

Véges forrás esetén szükségünk van arra az újabb mérőszámra is , amely a gépkiszolgálási probléma esetén is nagyon fontos. Az i indexű terminál *kihasználtságán* az

$$U^{(i)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \chi(\text{a } t \text{ időpillanatban az } i\text{-edik terminál működik})dt$$

határértéket értjük, ha létezik. Ekkor (5) szerint

$$U^{(i)} = P(\text{ az } i\text{-edik terminál működik}) \ ,$$

ahol P a stacionárius valószínűséget jelöli.

Nyilvánvaló, hogy a terminálok (az igénygenerálás forrásai) akkor vannak kihasználva, ha működnek, így az összes terminál kihasználtsága:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) P_k = \overline{m} = \frac{\mu}{\lambda}(1 - P_0).$$

Egy tetszőleges terminál kihasználtsága:

$$U_t = \frac{\mu}{n\lambda}(1 - P_0) = \frac{\overline{m}}{n}.$$

Ezt az összefüggést a következőképpen is megkaphatjuk. Látható, hogy

$$U^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n} P_k = \frac{\overline{m}}{n},$$

mivel a terminálok azonos kihasználtságúak, így

$$U_t = U^{(i)} \ .$$

(VIII.) A terminálok *átlagos várakozási ideje*:

(5) alapján:

$$U_t = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + \overline{W} + 1/\mu} = \frac{\overline{m}}{n}.$$

Ebből

$$\lambda \overline{m} = \frac{n}{1/\lambda + \overline{W} + 1/\mu},$$

és

$$\lambda \overline{m}\,\overline{W} = n - \overline{m}\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) = n - \frac{U_s}{\varrho}(1 + \varrho) = \overline{Q},$$

ami az átlagos sorhosszra vonatkozó Little-formula. Így

$$\overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\lambda \overline{m}}.$$

Az *átlagos válaszolási idő*:

$$\overline{T} = \overline{W} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{n}{1-P_0} - \frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{n}{U_s} - \frac{1}{\varrho}\right).$$

Egyszerű számolással könnyű bebizonyítani, hogy

$$\overline{m}\lambda\overline{T} = \overline{N},$$

ami ismét egy Little-formula. Ugyanis

$$\overline{m}\lambda\left(\overline{W} + \frac{1}{\mu}\right) = \overline{Q} + \overline{m}\varrho =$$

$$= n - \frac{U_s}{\varrho}(1+\varrho) + U_s = n - \frac{U_s}{\varrho} = \overline{N}\ .$$

(IX.) További összefüggések:

$$U_s = 1 - P_0 = n\varrho U_t = \overline{m}\varrho,$$

melyből

$$\overline{m}\lambda = \mu U_s = \lambda_t\ .$$

Példák:

1. Tekintsünk 6 db. gépet 40 óra átlagos élettartammal, javítási idejük 4 óra átlagosan. Határozzuk meg a rendszer jellemzőit!

   Megoldás:

   $\lambda = \frac{1}{40}$ óránként, $\mu = \frac{1}{4}$ óránként, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{40} = 0.1$, $n = 6$, $p_0 = 0.484$

Hibás gépek	0	1	2	3	4	5	6
várakozó g.	0	0	1	2	3	4	5
P_n	0,484	0.290	0.145	0.058	0.017	0.003	0.000

$$\overline{Q} = 0.324$$

$$P(W > 0) = 0.516 = U_s$$

$$\overline{W} = 2.51 \text{ óra}$$

$$\overline{T} = 2.51 + \frac{1}{0.25} = 6.51 \text{ óra}$$

$$U_s = 0.516$$

$$\overline{e} = 40 \text{ óra}$$

$$U_g = 0.86 \qquad \text{(gépkihasználtság)}$$

$$\overline{m} = n \times U_g = 5.16$$

$$\overline{N} = 6 - 5.16 = 0.84$$

$$E\delta = \frac{0.516}{6 \times \frac{1}{40} \times 0.484} = \frac{4 \times 5.16}{6 \times 0.484} \approx \frac{7}{10} \text{ óra}$$

2. Az előző feladatban az átlagos élettartamot változtassuk meg 2 órára. Határozzuk meg a rendszer jellemzőit!

Megoldás:

$\frac{1}{\lambda} = 2$, $\frac{1}{\mu} = 4$, $\frac{\lambda}{\mu} = 2$, $n = 6$, $P_0 = \frac{1}{75973}$ amiből látható, hogy egy szerelő nem elégséges.

Hibás gépek	0	1	2	3	4	5	6
várakozó g.	0	0	1	2	3	4	5
P_k	$\frac{1}{75973}$	$\frac{1}{75973}$	0.001	0.012	0.075	0.303	0.606

$$U_s \approx 0.999$$

$$\overline{Q} \approx 4.5$$

$$P(W > 0) = 0.999$$

$$\overline{W} \approx 22.5 \text{ óra}$$

$$\overline{T} = 26.5 \text{ óra}$$

$$\overline{e} = 2 \text{ óra}$$

$$U_g \approx 0.08 \qquad \text{(gépkihasználtság)}$$

$$\overline{m} \approx 0.5$$

$$\overline{N} \approx 5.5$$

$$E\delta \approx \infty$$

Mivel a karbantartási tényező 1-nél nagyobb, minden adat azt mutatja, amit vártunk. Arra, hogy ezek után mennyi szerelőt kell beállítani, többféle kritérium lehet.

Ezzel a következő fejezetben foglalkozunk. Mindenesetre, hogy ne legyen torlódás, a $\frac{\lambda}{r\mu} < 1$ feltételnek kell teljesülnie, ahol r a szerelők számát jelöli.

II.5.2. Az $< n/M/M/r >$ modell

Az előző modellben adott feltevéseinke¡t most csupán annyiban változtatjuk, hogy az n számú terminált r szerver szolgálja ki ($r < n$). Így $k \leq r$ esetén a k állapot azt jelenti, hogy éppen k db terminál igénye van kiszolgálás alatt, egyetlen várakozó igény sincs és $r - k$ szerver tétlen. A szerverek tevékenységüket egymástól függetlenül végzik. Ekkor is egy születési-halálozási folyamatot kapunk:

$$\lambda_k = (n-k)\lambda, \qquad 0 \leq k \leq n-1,$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & , 1 \leq k \leq r, \\ r\mu & , r < k \leq n, \end{cases}$$

intenzitásokkal.

Az egyensúlyi eloszlás:

$$P_k = \binom{n}{k} \varrho^k P_0, \qquad 0 \leq k \leq r,$$

$$P_k = \frac{k!}{r! r^{k-r}} \binom{n}{k} \varrho^k P_0, \qquad r < k \leq n.$$

Természetesen teljesülnmie kell a

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1$$

összefüggésnek. P_0 meghatározására ez a képlet túlságosan bonyolult, így egy egyszerűbb rekurzív formulát használunk.

Jelöljük a_k-val a következő hányadost:

$$a_k = \frac{P_k}{P_0}.$$

Ekkor a következő összefüggés alapján számolhatunk

$$a_0 = 1,$$

$$a_k = \frac{n-k+1}{k} \varrho a_{k-1}, \qquad 0 \le k \le r-1,$$

$$a_k = \frac{n-k+1}{r} \varrho a_{k-1}, \qquad r \le k \le n.$$

Mivel a

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = 1$$

összefüggésnek teljesülnie kell, ezért

$$P_0 = 1 - \sum_{k=1}^{n} P_k.$$

Mindkét oldalt P_0-al elosztva:

$$1 = \frac{1}{P_0} - \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{P_0} = \frac{1}{P_0} - \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

így

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k}.$$

Majd

$$P_k = a_k P_0.$$

Az n/M/M/r rendszer jellemzői:

(I.) A rendszerben tartózkodó *igények átlagos száma*:

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{n} k P_k.$$

(II.) A várakozási sor *átlagos hossza*:

$$\overline{Q} = \sum_{k=r+1}^{n} (k-r) P_k = \frac{r^r P_0}{r!} \sum_{k=r+1}^{n} \frac{(k-r)k!}{r^k} \binom{n}{k} \varrho^k.$$

(III.) Az igénygenerálásra alkalmas *terminálok átlagos száma*:

$$\overline{m} = n - \overline{N}.$$

(IV.) A *rendszer kihasználtsága*:

$$U_r = 1 - P_0.$$

(V.) A rendszer *átlagos foglaltsági periódushossza*:

$$E\delta^{(n)} = \frac{1 - P_0}{n\lambda P_0} = \frac{U_r}{n\lambda P_0}.$$

(VI.) A *várakozás valószínűsége*:

$$P(W > 0) = \sum_{k=r}^{n} P_k.$$

(VII.) A *foglalt kiszolgálóegységek átlagos száma*:

$$\overline{r} = \sum_{k=1}^{r} kP_k + \sum_{k=r+1}^{n} rP_k = \sum_{k=1}^{r-1} kP_k + r\sum_{k=r}^{n} P_k = \sum_{k=1}^{r-1} kP_k + rP(W > 0).$$

Továbbá

$$U_s = \frac{\sum_{k=1}^{r} kP_k + r\sum_{k=r+1}^{n} P_k}{r} = \frac{\overline{r}}{r}.$$

(VIII.) A *tétlen kiszolgálóegységek átlagos száma*:

$$\overline{S} = r - \overline{r}.$$

További összefüggés:

$$\overline{N} = \sum_{k=1}^{r} kP_k + \sum_{k=r+1}^{n} (k-r)P_k + r\sum_{k=r+1}^{n} P_k = \overline{Q} + \overline{r} = \overline{Q} + r - \overline{S} = n - \overline{m}.$$

(IX.) A *terminálok kihasználtsága*:

$$U_t = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n} P_k = \frac{\overline{m}}{n}.$$

(X.) A terminálok *átlagos várakozási ideje*:

(5) és (IX) alapján

$$U_t = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \overline{W} + \frac{1}{\mu}} = \frac{\overline{m}}{n},$$

amiből

$$\overline{W} = \frac{\overline{N}}{\overline{m}} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\overline{N}}{\overline{m}\varrho} - 1\right).$$

Az átlagos válaszolási idő:

$$\overline{T} = \overline{W} + \frac{1}{\mu} = \frac{\overline{N}}{\overline{m}\lambda},$$

innen

$$\overline{m}\lambda\overline{T} = \overline{N},$$

ami a jól ismert Little-formula, azaz az átlagos beérkezési intenzitás és a rendszerben töltött átlagos idő szorzata a rendszerben tartózkodó igények átlagos számával egyenlő. Ebből

$$\overline{m} < mbda \left(\overline{W} + \frac{1}{\mu}\right) = \overline{Q} + \overline{r},$$

vagyis

$$\overline{m}\lambda\overline{W} + \overline{m}\varrho = \overline{Q} + \overline{r}.$$

Mutassuk meg, hogy

$$\overline{r} = \overline{m}\varrho,$$

mert ebből

$$\overline{m}\lambda\overline{W} = \overline{Q}$$

következik, ami szintén egy Little-formula.

Tudjuk, hogy

$$P_{k+1} = \frac{(n-k)\lambda}{\mu_{k+1}} P_k,$$

ahol

$$\mu_j = \begin{cases} j\mu & , j \le r, \\ r\mu & , j > r. \end{cases}$$

Jól ismert továbbá, hogy

$$\overline{r} = \sum_{k=1}^{r-1} kP_k + r\sum_{k=r}^{n} P_k.$$

Ekkor

$$\varrho\overline{m} = \sum_{k=0}^{n} \varrho(n-k)P_k = \sum_{k=0}^{r-1} \varrho(n-k)P_k + \sum_{k=r}^{n-1} \varrho(n-k)P_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\lambda(n-k)(k+1)}{(k+1)\mu} P_k + r\sum_{k=r}^{n-1} \frac{\lambda(n-k)}{r\mu} P_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1}(k+1)P_{k+1} + r\sum_{k=r}^{n-1} P_{k+1} = \sum_{j=1}^{r} jP_j + r\sum_{j=r+1}^{n} P_j = \sum_{j=1}^{r-1} jP_j + r\sum_{j=r}^{n} P_j = \overline{r}.$$

Vagyis

$$\varrho\overline{m} = \overline{r},$$

más alakban

$$\lambda\overline{m} = \mu\overline{r},$$

azaz

az átlagos beérkezési intenzitás = az átlagos kiáramlási intenzitással, ami várható volt, mivel a rendszer egyensúlyi állapotban van. Ezért

$$\overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\overline{m}\lambda} = \frac{\overline{Q}}{\overline{r}\lambda\varrho} = \frac{\overline{Q}}{\mu\overline{r}}.$$

(XI.) A kiszolgálók átlagos *tétlenségi periódushossza*:

Ha a tétlen kiszolgálók olyan sorrendben kezdik kiszolgálni az igényeket, mint amilyen sorrendben előzőleg befejezték a foglaltsági periódusokat, akkor egy szerver tevékenységét a következőképpen írhatjuk le. Ha egy tétlenné vált szerver $j-1$ másik tétlen szervert talál a munkabefejeződés pillanatában, akkor csak a j-edik igény kiszolgálásával kezdődik ismét a foglaltsági periódusa.

Jelölje $\overline{e}$ a szerver átlagos üresjárati periódusa hosszát, $\overline{e}_j$ pedig a fenti állapotban az átlagos tétlenségi időt. Nyilvánvalóan

$$\overline{e}_j = \frac{j}{\lambda},$$

$\overline{e}$ pedig a teljes várható érték tétele alapján

$$\overline{e} = \sum_{j=1}^{r} \frac{P_{r-j}}{P(e)} \frac{j}{\lambda} = \frac{\overline{S}}{P(e)\lambda},$$

ahol

$$P(e) = \sum_{j=0}^{r-1} P_j = 1 - P(W > 0),$$

azaz annak valószínűsége, hogy van tétlen szerver.

(XII.) A szerverek *átlagos foglaltsági periódushossza*:

Mivel

$$U_s = \frac{E\delta}{\overline{e} + E\delta},$$

így

$$E\delta = \frac{U_s}{1-U_s}\overline{e} = \frac{\frac{\overline{r}}{r}}{1-\frac{\overline{r}}{r}}\overline{e} = \frac{\frac{\overline{r}}{r}}{\frac{r-\overline{r}}{r}} \frac{\overline{S}}{P(e)\lambda} = \frac{\overline{r}}{\overline{S}} \frac{\overline{S}}{P(e)\lambda} = \frac{\overline{r}}{P(e)\lambda} = \frac{\overline{m}}{\mu P(e)}.$$

Vagyis

$$E\delta = \frac{\overline{m}}{\mu P(e)}.$$

Példák:

1. Egy üzemben 20 db gép üzemel, egyenként 50 óra átlagos élettartammal. A gép javításának várható értéke 5 óra. A szereléseket 3 fős szerelőgárda végzi. Adjuk meg a rendszer jellemzőit, és hasonlítsuk össze őket a II.5.1.1. Példában szereplő jellemzőkkel!

   Megoldás:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} = 0.1.$$

   A rekurzív összefüggéseket használva, $a_0 = 1$-ről indítva a rekurziót, könnyen meghatározhatjuk az a_k értékeket, pl

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= \frac{20-0}{0+1} \times 0.1 \times 1 = 2 \\ a_2 &= \frac{20-1}{1+1} \times 0.1 \times 2 = 1.9 \\ a_3 &= \frac{20-2}{2+1} \times 0.1 \times 1.9 = 1.14 \\ a_4 &= \frac{20-3}{3} \times 0.1 \times 1.14 = 0.646 \\ &\vdots \end{aligned}$$

   és így tovább.

   Tudjuk, hogy

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k} = \frac{1}{1 + 6.3394} = 0.13625.$$

   Innen

$$P_1 = a_1 \times P_0 = 2 \times 0.13625 = 0.2775$$

$$P_2 = a_2 \times P_0 = 1.9 \times 0.13625 = 0.2588 \text{ stb.}$$

A következő táblázat megadja a különböző állapotok valószínűségét.

$n = 20,\ r = 3,\ \rho = 0.1$

K	Javítás alatt álló gépek száma	Javításra várakozó gépek száma (Q)	Tétlen karbantartók száma (S)	Stac. eloszlás (P_k)
0	0	0	3	0.13625
1	1	0	2	0.27250
2	2	0	1	0.25888
3	3	0	0	0.15533
4	3	1	0	0.08802
5	3	2	0	0.04694
6	3	3	0	0.02347
7	3	4	0	0.01095
8	3	5	0	0.00475
9	3	6	0	0.00190
10	3	7	0	0.00070
11	3	8	0	0.00023
12	3	9	0	0.00007

$$\overline{Q} = 0.339$$

$$\overline{S} = 1.213$$

$$\overline{N} = \overline{Q} + r - \overline{S} = 2.126$$

$$P(W > 0) = 0.3323$$

$$P(e) = 0.6677$$

$$\overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\lambda(n - \overline{N})} = 0.918 \text{ óra, kb. } 59 \text{ perc}$$

$$\overline{m} = 20 - 2.126 = 17.874$$

$$U_r = 0.844$$

$$E\delta^{(n)} = \frac{U_r}{n\lambda P_0} = \frac{5}{2} \times \frac{0.844}{0.136} \approx 15.5 \text{ óra}$$

$$\overline{r} = 1.787$$

$$s = 1.213$$

$$U_s = \frac{\overline{r}}{r} = \frac{1.787}{3} = 0.595$$

$$\overline{e} = \frac{\overline{s}}{P(e)\lambda} = \frac{1.213}{0.667 \times \frac{1}{50}} = \frac{50 \times 1.213}{0.667} \approx 90.8 \text{ óra}$$

$$E\delta = \frac{\overline{r}}{P(e)\lambda} = \frac{1.787}{0.667 \times \frac{1}{50}} = \frac{50 \times 1.787}{0.667} \approx 132.1 \text{ óra}$$

$$U_g = \frac{\overline{m}}{n} = \frac{17.874}{20} \approx 0.893$$

$$\overline{T} = \overline{W} + \frac{1}{\mu} = 0.981 + 5 = 5.981 \text{ óra}$$

$$K_1 = \frac{\text{várakozó gépek átlagos száma}}{\text{összes gépek száma}} = \frac{\overline{Q}}{n} = \frac{0.339}{20} = 0.0169$$

$$K_2 = \frac{\text{tétlen kezelők száma}}{\text{összes kezelők száma}} = \frac{\overline{S}}{r} = \frac{1.213}{3} = 0.404$$

Összehasonlítva a II.5.1 1. Példában szereplő jellemzőkkel, láthatjuk, hogy az egy szerelőre jutó gépek majdnem egyforma száma mellett (6 ill. $6\frac{2}{3}$) a helyzet sokkal jobb 20 gép és 3 szerelő esetében, ugyanis a hatékon¡ysági vizsgálatok az alábbi adatokat szolgáltatták:

gépek száma	6	20
szerelők száma	1	3
Az egy szerelőre jutó gépek száma	6	$6\frac{2}{3}$
A szerelőkre vonatkozó várakozási együttható K_2	0.4845	0.4042
A gépekre vonatkozó várakozási együttható K_1	0.0549	0.01694

2. Az előző példában $\rho = 0.1$, $n = 20$ volt. Tételezzük fel, hogy az időegység az óra, a gépállás óránkénti költsége 18 000 Ft, míg a szerelők óránkénti költsége 600 Ft. Mi lesz ebben ez esetben a szerelők optimális száma, ha az átlagos veszteség minimalizálására törekszünk?

Megoldás:

Látható, hogy az óránkénti átlagos költség r függvénye.

A következő táblázat megadja a stacionárius eloszlást $r = 3, 4, 5, 6, 7$ esetén (tapasztalatból tudjuk, hogy az r számra $3 \leq r \leq 7$).

r	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
3	0.136	0.272	0.258	0.155	0.088	0.047	0.023	0.011	0.005
4	0.146	0.292	0.278	0.166	0.071	0.028	0.010	0.003	0.001
5	0.148	0.296	0.281	0.168	0.071	0.022	0.006	0.001	0.000
6	0.148	0.297	0.282	0.169	0.072	0.023	0.006	0.001	$\cdots$
7	0.148	0.297	0.282	0.169	0.072	0.023	0.006	$\cdots$	$\cdots$

A következő táblázat az időegységre jutó átlagos költségeket adja meg:

r	$\overline{Q}$	$\overline{S}$	$E(K)$ Ft
3	0.32	1.20	6480
4	0.06	2.18	2388
5	0.01	3.17	2082
6	elhanya-	4.17	2502
7	-golható	5.16	3096

Látható, hogy az optimális szerelőszám ilyen költségtényezők mellett $r = 5$.

Ez a példa is mutatja, hogy rendszerek összehasonlítása többféleképpen értelmezhető.

Az 1. és 2. példa jól szemlélteti ezen problémakört.

II.6. Inhomogén modellek

A most ismertetett három inhomogén modell leírása megtalálható Csige László és Tomkó József (1982) cikkében. Adott, n számú, gép meghibásodásainak javítását végezze egyetlen szerelő. Feltesszük, hogy a gépek működési időtartama exponenciális eloszlású, a k- adik gépre $\lambda_k > 0$ paraméterrel, és a javítási idő is exponenciális eloszlású a $\mu_k > 0$ paraméterrel. Mind a működési, mind a javítási idők teljesen függetlenek egymástól.

Tetszőleges $t \geq 0$ pillanatban az n gép közül néhány működhet, és a többi vagy javítás alatt van, vagy javításra várakozik. Jelölje $v(t)$, $(t \geq 0)$ a t pillanatban nem működő gépek számát. Ez még nem jellemzi kimerítően a rendszert. Meg kell mondanunk azt is, hogy melyek a nem működő gépek, és ezek közül melyiket javítja a szerelő. Tetszőleges $t \geq 0$-ra egy $v(t)$-dimenziójú $\left(x_1(t), \ldots, x_{v(t)}(t)\right)$ vektort vezetünk be, melynek a komponensei a nem működő gépek indexeit jelölik. Ha a javítás a meghibásodás sorrendjében történik, azaz FIFO elv követése esetén a nem működő gépek felsorolása a meghibásodásuk sorrendjének felel meg. Így $v(t) > 0$-ra $x_1(t)$ a javítás alatt lévő gép indexét adja. A Processor Sharing (PS) elv követésekor, amikor az összes hibás gép javítás alatt van, és $v(t) = k$ esetén e javítások mindegyike $1/k$ intenzitással folyik, az $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ vektor elrendezése tetszőleges lehet. Ilyenkor a nagyság szerinti $\left(x_1(t) < x_2(t) < \ldots < x_{v(t)}(t)\right)$ rendezésben állapodunk meg. Prioritásos kiszolgálás (PR) esetén a hibás gépeket indexük nagyságrendje szerint soroljuk fel, mivel az alacsonyabb indexű gép elsőbbséggel rendelkezik a magasabb indexű gépekkel szemben.

A gépkiszolgálás Markov-lánca alatt a

$$\xi(t) = \left(v(t); x_1(t), \ldots, x_{v(t)}(t)\right), \qquad (t \geq 0),$$

vektorfolyamatot értjük, ahol $x_1(t), \ldots, x_{v(t)}(t)$ rendezését a különböző kiszolgálási elvek esetén az előbb elmondottak szerint kell érteni.

A $\xi(t)$ folyamat folytonos idejű, véges állapotterű Markov- lánc. Ha a λ_k, μ_k, $(1 \leq k \leq n)$ paraméterek mind pozitívak, akkor a lánc ergodikus.

II.6.1. Az $< n/\vec{M}/\vec{M}/1/PS >$ rendszer

A gépkiszolgálási probléma esetén ez a diszciplina azt jelenti, hogy a gépek javítása meghibásodásuk után rögtön megkezdődik, melynek intenzitása függ a mindenkori hibás gépek számától, és azzal fordítottan arányos. Ha egy gép javítás alatt van egy olyan δt idő alatt, amikor rajta kívül még $k-1$ más gép is hibás, akkor ezen δt idő alatt egy gép javítási ideje csak $\delta t/k$ mennyiséggel halad előre.

Ekkor a $\xi(t)$ folyamat állapotterét az $1, 2, \ldots, n$ számok $(i_1, \ldots, i_k)$ $(1 \leq k \leq n)$ kombinációi alkotják, és ezekhez még hozzá kell venni a 0 pontot (minden gép működik). Legyenek $P_{i_1,\ldots,i_k}(t)$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n)$ a $\xi(t)$ lánc t pillanatbeli eloszlását leíró függvények. Ekkor a Kolgomorov-egyenletek a következők:

$$P_0'(t) = -\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right] P_0(t) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i P_i(t),$$

$$P_{i_1\ldots i_k}'(t) = \sum_{r=1}^{k} \lambda_{i_r} P_{i_< 1\ldots i_{r-1} i_{r+1}\ldots i_k}(t) -$$

$$-\left[\nu_{i_1\ldots i_k} + \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k} \mu_{i_r}\right] P_{i_1,\ldots,i_k}(t) + \sum_{r \neq i_1\ldots i_k} \frac{\mu_r}{k+1} P_{i_1' i_2' \ldots i_{k+1}'}(t)$$

ahol $i_1', \ldots, i_{k+1}'$ az $i_1, \ldots, i_k, r$ egészeknek a nagyság szerinti rendezése, és

$\nu_{i_1\ldots i_k} = \sum\limits_{r\neq i_1\ldots i_k} \lambda_r, \quad k = 1,\ldots,n-1.$

$$P'_{1,\ldots,n}(t) = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r P_{1,\ldots,r-1,r+1,]\ldots,n}(t) -$$

$$-\left[\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\mu_r\right] P_{1,\ldots,n}(t),$$

ahol a megfelelő indexek értelemszerű értékeket vesznek fel.

A stacionárius eloszlás, amely azonos a

$$P_0 = \lim_{t\to\infty} P_o\left(t\right),$$

$$P_{i_1\ldots i_k} = \lim_{t\to\infty} P_{i_1\ldots i_k}\left(t\right)$$

$(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n, \quad 1 \leq k \leq n)$, ergodikus eloszlással, a

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right] P_0 = \sum_{i=1}^{n}\mu_i P_i,$$

$$\left[\nu_{i_1\ldots i_k} + \frac{1}{k}\sum_{r=1}^{k}\mu_{i_r}\right] P_{i_1\ldots i_k} = \sum_{r=1}^{k}\lambda_{i_r} P_{i_1\ldots i_{r-1} i_{r+1}\ldots i_k} +$$

$$+\sum_{r\neq i_1\ldots i_k}\frac{\mu_r}{k+1} P_{i'_1 i'_2\ldots i'_{k+1}},$$

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\mu_r\right] P_{1,\ldots,n} = \sum_{r=1}^{n}\lambda_r P_{1\ldots,r-1,r+1,\ldots,n}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek a $P_0 + \sum P_{i_1\ldots i_k} = 1$ feltételt kielégítő egyértelmű megoldása, ahol az összegzés n elem összes kombinációira terjed ki. Egyszerű helyettesítéssel belátható, hogy ennek az egyenletrendszernek a megoldása a $P_{i_1\ldots i_k} = Ck! \prod\limits_{r=1}^{k}\frac{\lambda_{i_r}}{\mu_{i_r}}$, ahol C a normalizáló feltételből határozható meg.

II.6.2. Az $< n/\vec{M}/\vec{M}/1/FIFO >$ rendszer

A gépek javításai történjenek a meghibásodás sorrendjében. Ekkor a $\xi(t)$ folyamat állapotterét n elem összes $1 \leq k \leq n$ rendű ismétlés nélküli variációi alkotják, amelyekhez még a 0 pontot is csatolni kell (a 0 pont annak az esetnek a megfelelője, amikor mindegyik gép működik).

A $\xi(t)$ lánc t $(t \geq 0)$ pillanatbeli eloszlására vezessük be az alábbi függvényeket.

Ha $v(t)$ jelöli a t időpontban nem működő gépek számát, $x_i(t)$ a nem működő gépek indexét $(i = 1, \ldots, v\,(t))$ meghibásodásuk sorrendjében, akkor a lánc t pillanatbeli eloszlását leíró függvények:

$$P_0\,(t) = P\,(v\,(t) = 0)\,,$$

$$P_{i_1 \ldots i_k}\,(t) = P\,(v\,(t) = k,\ x_1\,(t) = i_1, \ldots, x_k\,(t) = i_k)\,,$$

ahol $(1 \leq k \leq n)$, $(1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n)$. Ezek a függvények kielégítik a következő differenciálegyenlet-rendszert

$$\begin{aligned}
P_0^{'}\,(t) &= -\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right] P_0\,(t) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i P_i\,(t)\,,\\
P_{i_1 \ldots i_k}^{'}\,(t) =& \lambda_{i_k} P_{i_1 \ldots i_{k-1}}\,(t) - \\
&- \left[\nu_{i_1 \ldots i_k} + \mu_{i_1}\right] P_{i_1 \ldots i_k}\,(t) + \sum_{r \neq i_1 \ldots i_k} \mu_r P_{r i_1 \ldots i_k}\,(t)\,,\\
P_{i_1, \ldots, i_n}^{'}(t) =& \lambda_{i_n} P_{i_1, \ldots, i_{n-1}}(t) - \mu_{i_1} P_{i_1, \ldots, i_n}(t).
\end{aligned}$$

A stacionárius eloszlás, mely azonos a

$$P_0 = \lim_{t \to \infty} P_0\,(t)\,,$$

$$P_{i_1 \ldots i_k} = \lim_{t \to \infty} P_{i_1 \ldots i_k}\,(t)$$

$(1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n, \quad 1 \leq k \leq n)$ ergodikus eloszlással, a

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right] P_0 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i P_i,$$

$$[\nu_{i_1 \ldots i_k} + \mu_{i_1}]\, P_{i_1 \ldots i_k} = \lambda_{i_k} P_{i_1 \ldots i_{k-1}} + \sum_{r \neq i_1 \ldots i_k} \mu_r P_{r i_1 i_2 \ldots i_k},$$

$$\mu_{i_1} P_{i_1, \ldots, i_n} = \lambda_{i_n} P_{i_1, \ldots, i_{n-1}}$$

homogén lineáris egyenletrendszerneik a $P_0 + \sum P_{i_1 \ldots i_k} = 1$ feltételt kielégítő egyértelmű megoldása, ahol az összegzés n elem összes variációjára terjed ki.

Az egyenletrendszer könnyebben kezelhetővé válik, ha bevezetjük a következő vektorváltozókat. Legyen $Z^{(k)}$ $(1 \leq k \leq n)$ $V_k^n = \binom{n}{k} k!$ dimenziós vektor, amelynek a komponensei az $1, 2, ...n$ számok k-ad osztályú, lexikografikusan rendezett $i_1, \ldots, i_k$ variációihoz tartozó $P_{i_1 \ldots i_k}$ valószínűségek. Ekkor az egyenletrendszer az alábbi differenciaegyenlet-rendszerbe megy át:

$$\begin{aligned} P_0 &= B_0 Z^{(1)}, \\ Z^{(1)} &= A_1 P_0 + B_1 Z^{(2)}, \\ &\vdots \\ Z^{(k)} &= A_k Z^{(k-1)} + B_k Z^{(k+1)}, \\ &\vdots \\ Z^{(n)} &= A_n Z^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Itt most $1 \leq k \leq n$-re A_k $V_k^n \times V_{k-1}^n$-es mátrix, $0 \leq k < n$-re B_k $V_k^n \times V_{k+1}^n$-es mátrix, és elemeik az egyenletrendszerből könnyen meghatározhatók.

Legyen $F_n = A_n$ és tetszőleges $1 \leq k < n$ esetén $F_k = (I - B_k F_{k+1})^{-1} A_k$. Ekkor $Z^{(k)} = F_k Z^{(k-1)}$ $(1 \leq k \leq n)$, ahol $Z^{(0)} = P_0$. Egy tetszőleges P_0 értékből a $Z^{(k)}$ $(1 \leq k \leq n)$ vektorok rendre meghatározhatók. A $P_{i_1 \ldots i_k}$ valószínűségeket a normalizáló feltétel figyelembe vétele után e vektorok komponensei szolgáltatják.

II.6.3. Az $< n/\vec{M}/\vec{M}/1/PR >$ rendszer

Abszolút prioritásos kiszolgálási elv esetén a $\xi(t)$ folyamat állapotterét az $1, 2, \ldots, n$ számok $(i_1, \ldots, i_k)$ $(1 \leq k \leq n)$ kombinációi alkotják, és ezekhez még hozzá kell venni a 0 pontot (minden gép működik). Legyenek $P_{i_1,\ldots,i_k}(t)$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n)$ a $\xi(t)$ lánc t pillanatbeli eloszlását leíró függvények. Ekkor a Kolgomorov-egyenletek a következők:

$$P_0^{'}(t) = -\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right] P_0(t) + \sum_{i=1}^{n} \mu_i P_i(t),$$

$$P_{i_1\ldots i_k}^{'}(t) = \sum_{r=1}^{k} \lambda_{i_r} P_{i_1\ldots i_{r-1} i_{r+1}\ldots i_k}(t) -$$

$$-\left[\nu_{i_1\ldots i_k} + \mu_{i_1}\right] P_{i_1\ldots i_k}(t) + \sum_{r=1}^{i_1-1} \mu_r P_{r i_1\ldots i_k}(t),$$

$$P_{1,\ldots,n}^{'}(t) = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r P_{1,\ldots,r-1,r+1,\ldots,n}(t) - \mu_1 P_{1,\ldots,n}(t).$$

A stacionárius eloszlás, amely azonos a

$$P_0 = \lim_{t\to\infty} P_0(t),$$

$$P_{i_1\ldots i_k} = \lim_{t\to\infty} P_{i_1\ldots i_k}(t),$$

$(1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_k \leq n, \quad 1 \leq k \leq n)$, ergodikus eloszlással, a

$$\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right] P_0 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i P_i,$$

$$\left[\nu_{i_1\ldots i_k} + \mu_{i_1}\right] P_{i_1\ldots i_k} = \sum_{r=1}^{k} \lambda_{i_r} P_{i_1\ldots i_{r-1} i_{r+1}\ldots i_k} +$$

$$+\sum_{r=1}^{i_1-1} \mu_r P_{ri_1\dots i_k},$$

$$\mu_1 P_{1,\dots,n} = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r P_{1,\dots,r-1,r+1,\dots,n}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek a $P_0 + \sum P_{i_1\dots i_k} = 1$ feltételt kielégítő egyértelmű megoldása, ahol az összegzés n elem összes kombinációra terjed ki.

Az egyenletrendszer megoldásához, hasonlóan a meghibásodás sorrendjében történő kiszolgálás esetéhez, vezessük be a következő vektorváltozókat.

Legyen $Y^{(k)}$ $(1 \le k \le n)$ $C_k^n = \binom{n}{k}$ dimenziós vektor, amelynek a komponensei az $1, 2, \dots, n$ számok k-ad osztályú, lexikografikusan rendezett $i_1, \dots, i_k$ kombinációhoz tartozó $P_{i_1\dots i_k}$ valószínűségek. Ekkor az egyenletrendszer az alábbi differencia egyenletrendszerbe megy át.

$$\begin{aligned} P_0 =& B_0 Y^{(1)}, \\ Y^{(1)} =& A_1 P_0 + B_1 Y^{(2)}, \\ &\vdots \\ Y^{(k} =& A_k Y^{(k-1)} + B_k Y^{(k+1)}, \\ &\vdots \\ Y^{(n)} =& A_n Y^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Itt most $1 \le k \le n$-re A_k $C_k^n \times C_{k-1}^n$-es mátrix, $0 \le k < n$-re B_k $C_k^n \times C_{k+1}^n$-es mátrix, és elemeik egyenletrendszerből kiolvashatók. Ezt a differencia egyenletrendszert ugyanúgy oldhatjuk meg, mint a FIFO kiszolgálás esetén.

II.6.4. Rendszerjellemzők

Könnyű látni, hogy stacionárius esetben

I. *A szerelő kihasználtsága* (4) alapján, mint eddig is láttuk

$$U_s = \frac{E\delta}{E\delta + \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right]^{-1}} = 1 - P_0.$$

II. *A gépek kihasználtsága*

Jelölje $U^{(i)}$ az i-edik gép kihasználtságát. Ekkor (5) szerint

$$U^{(i)} = \frac{\frac{1}{\lambda_i}}{\frac{1}{\lambda_i} + \overline{T}_i} = 1 - P^{(i)},$$

ahol $\overline{T}_i$ az i-edik gép hibás állapotban való tartózkodásának várható értékét jelöli,

$$P^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i \in (i_1,\ldots,i_k)} P_{i_1,\ldots,i_k},$$

aannak stacionárius valószínűsége, hogy a gép rossz. Így

$$\overline{T}_i = \frac{P^{(i)}}{\lambda_i \left(1 - P^{(i)}\right)},$$

valamint FIFO esetben az átlagos várakozási idő

$$\overline{W}_i = \overline{T}_i - \frac{1}{\mu_i}.$$

Könnyű látni, hogy a hibás gépek várható száma

$$\sum_{i=1}^{n} P^{(i)}.$$

Fennáll továbbá a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(1 - P^{(i)}\right) \overline{T}_i = \sum_{i=1}^{n} P^{(i)}$$

reláció, amely a Little-tétel egy speciális alakja. Homogén esetben ez nyilvánvalóan az

$$\bar{n}\lambda\bar{T} = n - \bar{n}$$

alakot ölti, ahol $\bar{n}$ a működő gépek átlagos számát jelöli.

Az inhomogén modellek további általánosításával foglalkozik Pósafalvi – Sztrik (1987, 1989a, 1989b), Sztrik (1987), valamint számítógépes környezetben előforduló problémákra ad matematikai modellt Almási – Sztrik (1993).

II.7. Homogén forrású modellek összehasonlítása

Az alábbiakban ismertetett eredmények Asztalos Domonkos (1979) cikkében találhatók meg, és olyan véges forrású tömegkiszolgálási rendszerekre vonatkoznak, ahol egy kiszolgáló egység n fogyasztót szolgál ki. A forrásnál eltöltött idő minden fogyasztóra nézve azonos λ paraméterű exponenciális eloszlású változó, és az i-edik fogyasztó kiszolgálási ideje μ_i paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Ennél a modellnél vizsgáljuk a kiszolgáló egység foglaltsági periódusait.

PS kiszolgálási elv mellett a kiszolgáló egység foglaltsági periódusának várható értéke:

$$E\delta_{PS}^{(n)} = \frac{1}{n\lambda}\sum_{j=1}^{n} j!C_j,$$

ahol $C_j = \sum\limits_{i_1,\dots,i_j} \prod\limits_{k=1}^{j} \frac{\lambda}{\mu_{i_k}}$.

1. Tétel.

Exponenciális struktúrájú, véges, homogén forrású rendszerben abszolút prioritásos kiszolgálási diszciplina esetén tetszőleges n-re $(1, 2, \dots)$ a kiszolgáló egység foglaltsági periódusainak várható értéke $E\delta_{PR}^{(n)}$, stacionárius esetben független a prioritások kiosztásától.

1. Következmény.

$$E\delta_{PR}^{(n)} = E\delta_{FIFO}^{(n)} = E\delta_{LIFO}^{(n)}$$

A FIFO kiszolgálási diszciplina megfelel a érkezési sorrendben való kiszolgálásnak, a LIFO esetén egy érkezés kiszolgálása rögtön megkezdődik, és az esetleg megszakított fogyasztó kiszolgálása a megszakítás helyétől folytatódik a megszakítást okozó fogyasztó kiszolgálása után.

A Következmény *Bizonyítása.* Prioritásos kiszolgálás esetén $E\delta_{PR}^{(n)}$ független a prioritások kiosztásától. A FIFO diszciplinával azonos kiszolgálást kapunk, ha egy érkezéskor az éppen beérkező fogyasztóhoz rendelt prioritás értéke megegyezik azzal a számmal, hogy hányadiknak érkezett a kiszolgáló egységhez, és a korábban már a kiszolgáló egységben lévő fogyasztók prioritását nem változtatjuk meg. Ha egy fogyasztó távozik a kiszolgáló egységből, akkor a kiszolgáló egységnél maradt fogyasztók mindegyikének a prioritását eggyel csökkentjük. A forrásnál tartózkodó fogyasztók között a fennmaradt prioritásértékek tetszőlegesen kioszthatók. A LIFO diszciplinával azonos kiszolgálást kapunk, ha egy érkezéskor az éppen beérkező fogyasztó prioritása egy lesz, és a korábban már a kiszolgáló egységnél tartózkodó fogyasztók prioritását eggyel növeljük, egyébként a prioritások kiosztása megegyezik a FIFO-nál leírtakkal.

2. Tétel.

Exponenciális struktúrájú, véges, homogén forrású tömegkiszogálási rendszerekben $E\delta_{PR}^{(n)} = E\delta_{PS}^{(n)}$.

A kiszolgálási diszciplinákat két csoportra oszthatjuk. Az első csoportba azok tartoznak, amelyeknél bármely véges τ intervallum felosztható véges számú diszjunkt intervallumok olyan sorozatára, hogy mindegyik intervallumban csak egy adott fogyasztó részesül kiszolgálásban. Ezeket a kiszolgálási diszciplinákat *osztatlan kiszolgálású* diszciplináknak nevezzük. Ilyenek a FIFO, a LIFO, az RR és PR diszciplinák. A másik csoportba tartozik az összes többi. Ilyen például a PS elv. Egy kiszolgálási diszciplina ë*konzervatív*, ha a kiszolgáló egységnél nem vész el, és nem keletkezik kiszolgálási igény.

3. Tétel.

Exponenciális struktúrájú, véges, homogén forrású tömegkiszolgálási rendszerben, amely n gépet tartalmaz λ és μ_i paraméterekkel, a foglaltsági periódus várható értéke stacionárius esetben azonos minden konzervatív osztatlan kiszolgálású diszciplinára és

$$E\delta^{(n)} = E\delta^{(n)}_{PS}.$$

Bizonyítás. Könnyen belátható, hogy a prioritásos kiszolgálási diszciplina konzervatív és osztatlan kiszolgálójú, és a tételünk szerint $E\delta_{PR}$ értéke független a prioritások szétosztásától, és attól is, ha a prioritások szétosztása tetszőleges időpontban megváltozik. Az osztatlan kiszolgálású diszciplinák definíciója szerint bármely véges τ intervallumban véges azoknak az eseteknek a száma, amikor a kiszolgálás átvált egyik fogyasztóról a másikra. Így az a konzervatív osztatlan kiszolgálású rendszer, amelyben az eredeti diszciplina döntésének megfelelően megváltoztatjuk a prioritások eloszlását, ugyanúgy viselkedik, mint az eredeti rendszer.

Véges forrású rendszerek optimalizálási problémáival foglalkozik pl. Asztalos (1980).

Feladatok

1. Egy számolóközpontba Poisson-folyamat szerint naponta (8 óra) 10 program érkezik. Egy program a CPU-t exponenciális ideig foglalja le 30 perc átlaggal.
   Határozzuk meg a CPU kihasználtságát, a szokásos karakterisztikákat!

   Megoldás: $U = 0.625$, $\bar{N} = 1.667$, $\bar{T} = 80$ perc, $\bar{W} = 50$ perc, $E\delta = 80$ perc, $P(W > 60) = 0.295$, $P(T > 90) = 0.325$.

2. Egy kikötőbe átlagosan 3 óránként érkeznek a hajók Poisson-folyamat szerint. A hajó a kirakodóhelyet exponenciális ideig foglalja le, átlagosan 12 óráig.
   Mennyi legyen a kirakodóhelyek száma, hogy egy hajónak a várakozási ideje átlagosan 6 óránál kevesebb legyen?

   Megoldás: 6 .

3. Egy áruház igazgatósága parkolót tervez a vevők számára. gy tervezik, hogy a vásárlók 1 százalékának kell majd átlagban más helyet keresnie a parkoló foglaltsága miatt. A parkolási idő exponenciális eloszlású 30 perc átlaggal. A vásárlók érkezési intenzitása átlagosan 10 személy percenként. Az érkezési folyamat Poisson típusú.
   Mennyi legyen a parkoló kapacitása?

   Megoldás: 1 .

4. Egy javítóműhelybe a hibás gépeket véletlen folyamat (Poisson) szerint hozzák. A beérkezések közötti időtartam átlagértéke 20 perc. A javítás exponenciális eloszlású 40 perc várható értékkel.
   Mennyi javítót kell alkalmazni, hogy egy szerelő átlagos foglaltsági ideje ne haladja meg az 1 órát és a tétlenségi idő várható értéke legalább 10 perc legyen?

Megoldás: $n = 4$.

5. 6 egyforma gépet 3 szerelő lát el. A gépek működési ideje exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\frac{1}{2}$ óra átlaggal. A javítási idejük szintén exponenciális 45 perc várható értékkel.

   Melyik állapot a legvalószínűbb? Mennyi a működő gépek átlagos száma? Adjuk meg a rendszer jellemzőit!

   Megoldás: Egy vagy két gép működik, $\bar{m} = 1.9$, $\varrho = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}$, mely mutatja, hogy több szerelőt kell alkalmazni.

   $\bar{N} = 4.1$, $U_r = 0.9973$, $E\delta^{(n)} = \frac{0.9973}{12 \cdot 0.0027}$, $U_g = \frac{1.9}{6} = 0.31$, $\bar{n} = 2.85$, $\bar{S} = 0.15$, $\bar{Q} = 1.25$, $\bar{W} = 0.2$ óra, $\bar{T} = 0.95$ óra, $\bar{e} = \frac{5}{8}$ óra, $U = \frac{2.85}{3} = 0.95$, $E\delta = 11.9$ óra.

6. Egy szerelő 7 gépet lát el, melyek működési és javítási ideje exponenciális eloszlású 1 óra és $\frac{1}{2}$ óra átlaggal.

   Hány százalékkal csökken a működő gépek átlagos száma, ha egy gépet kivesznek a termelésből?

   Megoldás: 3.64-ról csökken 3.38-ra a működő gépek száma, ez $\approx 7\%$.

7. Egy szerelőműhelyben 10 azonos tulajdonságú gép működik. 1 hónap átlagos élettartammal és $\frac{1}{5}$ hónap átlagos javitási idővel jellemezhetjük mindegyiket. Mindkét idő exponenciális eloszlású.

   Ha 3 szerelő dolgozik ebben a műhelyben, határozzuk meg az üzemszünetelési és kihasználtsági együtthatókat!

   Megoldás: $K_1 = 1.6\%$, $K_2 = 46\%$.

8. Egy benzinkúthoz az autók Poisson-folyamat szerint érkeznek, átlagosan óránként 10 darab. Két autót egyszerre nem tudnak kiszolgálni, a kiszolgálás exponenciális eloszlású, óránként átlagosan 20 darab kocsival.

a, Mennyi kocsi áll átlagosan sorban, mennyi az egy kocsira jutó átlagos várakozási idő? Mennyi ideig kell egy kocsinak átlagosan a benzinkútnál tartózkodnia?

b, Mennyi kocsit kell átlagosan kiszolgálni óránként, hogy egy kocsi a kútnál legfeljebb 5 percig tartózkodjon?

Megoldás:

a, $\bar{Q} = \frac{1\neg}{2}$, $\bar{W} = \frac{1}{20}$ óra, $\bar{T} = \frac{1}{10}$ óra

b, legalább 22-t.

Problémák

1. Tekintsünk egy tiszta Markov-féle sorbanállási rendszert, amelyben

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda, & \text{ha } 0 \le k \le K \\ 2\lambda, & \text{ha } K < k; \end{cases}$$

$$\mu_k = \mu, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

a, Keressük meg a rendszerben tartózkodó igények számának $\{P_k\}$ stacionárius eloszlását!

b, Milyen összefüggésnek kell fennállnia a paraméterek között ahhoz, hogy a rendszer stabilis legyen, vagyis az egyensúlyi helyzetet valóban el lehessen érni?

Interpretáljuk a választ a rendszer dinamikájának fogalmaival!

2. Tekintsünk egy Markov-típusú sorbanállási rendszert, amelyben

$$\lambda_k = \alpha^k \lambda, \qquad k \ge 0, \qquad 0 \le \alpha < 1;$$

$$\mu_k = \mu, \qquad k \ge 1.$$

a, Fejezzük ki P_0 segítségével annak $\{P_k\}$ stacionárius valószínűségeloszlását, hogy k igény van a rendszerben!

b, Adjunk formulát a P_0 valószínűségre!

3. Tekintsünk egy $M/M/2$ sorbanállási rendszert, amelyben a beérkezések intenzitása λ igény másodpercenként, az átlagos kiszolgálási idő $1/\mu$ másodperc, ahol $\lambda < 2\mu$.

a, Határozzuk meg azt a differenciálegyenletet, amelyet a $P_k(t)$ időfüggő valószínűségek kielégítenek!

b, Számítsuk ki a $P_k = \lim_{t \to \infty} P_k(t)$ valószínűségekből álló stacionárius eloszlást!

4. Tekintsünk egy születési-halálozási folyamatot a következő intenzitásokkal:

$$\lambda_k = (k+2)\lambda, \qquad \text{ha} \quad k = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$\mu_k = k\mu, \qquad \text{ha} \quad k = 1, 2, 3, \ldots.$$

a, Keressük meg a P_k mennyiségeket. λ, k, és μ segítségével fejezzük ki őket!

b, Határozzuk meg a rendszerbeli igények számának várható értékét!

5. Felhasználva, hogy

$$B\left(m, \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!}}{\sum\limits_{k=0}^{m} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}}$$

és

$$C\left(m, \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\left(\frac{(m\varrho)^m}{m!}\right)\left(\frac{1}{1-\varrho}\right)}{\left[\sum\limits_{k=0}^{m-1} \frac{(m\varrho)^k}{k!} + \left(\frac{(m\varrho)^m}{m!}\right)\left(\frac{1}{1-\varrho}\right)\right]}$$

bizonyítsuk be, hogy ha $\lambda/\mu > 0, \quad m = 1, 2, \ldots$ akkor

$$(a) \qquad B\left(m, \frac{\lambda}{\mu}\right) < \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}} < C\left(m, \frac{\lambda}{\mu}\right),$$

$$(b) \qquad C\left(m, \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{B\left(m, \frac{\lambda}{\mu}\right)}{1 - \frac{\lambda}{\mu}\left[1 - B\left(m, \frac{\lambda}{\mu}\right)\right]},$$

$$(c) \qquad B\left(m+1, \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\frac{\mu}{\lambda} B\left(m, \frac{\lambda}{\mu}\right)}{m + 1 + \frac{\lambda}{\mu} B\left(m, \frac{\lambda}{\mu}\right)}.$$

6. Az $< n/M/M/1 >$ rendszernél határozzuk meg az érkezési pillanatokban a stacionárius eloszlást, majd ennek felhasználásával az igények várakozási és tartózkodási idejének sűrűség- ill. eloszlásfüggvényét!

7. Bizonyítsuk be, hogy ha az $< n/M/M/1 >$ rendszernél $n \to \infty$, $\lambda \to 0$, úgy, hogy $n\lambda \to \lambda^{'}$, akkor a rendszerjellemzők az $M/M/1$ modell megfelelő jellemzőihez tartanak!

8. Mutassuk meg, hogy az $M/M/1$ rendszerben ϱ kihasználtságnál és s átlagos kiszolgálási időnél a rendszerben való tartózkodási idő várható értéke mindig kisebb, mint az $M/M/2$ rendszerben ϱ kihasználtsággal és $2s$ átlagos kiszolgálási idővel!

III. Középfokú sorbanállási elmélet

III.1. Az M/G/1 rendszer

A sorbanállási elmélet elemeinek megismerését megkönnyíti az állapot leírás egyszerűsége, különösen az, hogy a rendszer teljes múltját összefoglalja a pillanatnyilag jelen lévő igények száma. A Markov-típusú rendszer jövőbeli viselkedése szempontjából minden más múltbeli információ lényegtelen.

A jól ismert $M/M/1$ rendszerben mind a beérkezési, mind a kiszolgálási folyamat Markov típusú (exponenciális eloszlású). Az $M/G/1$ rendszernél viszont a kiszolgálás általános eloszlású, következésképpen új problémákba ütközünk, és ezekre más megoldási módszereket kell találnunk. A jegyzetben a Palm-tól, Takácstól és Kendall-tól származó, úgynevezett *beágyazott Markov-láncok módszerét* fogjuk alkalmazni.

Az $M/G/1$ rendszerben egyetlen kiszolgálóegység van, a beérkezési folyamat λ paraméterű Poisson-folyamat, azaz a beérkezési időközök λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. A kiszolgálási idő eloszlása tetszőleges lehet, eloszlásfüggvényét $B(x)$, sűrűségfüggvényét $b(x)$, k-adik momentumát

$$b_k := \overline{x^k} := \int_0^\infty x^k b(x)\, dx$$

jelöli.

Próbáljuk meg leírni az $M/G/1$ rendszer állapotait! Ha egy bizonyos t időpontban a rendszer egész múltját akarjuk összefoglalni, akkor először is meg kell adnunk a t pillanatban a rendszerben tartózkodó igények $N(t)$

számát, valamint azt, hogy a kiszolgálócsatornában lévő igény kiszolgálása már mennyi időt vett igénybe a t pillanatig; jelölhetjük ezt $X_0(t)$-vel. Ez utóbbi amiatt szükséges, mert a kiszolgálási idő eloszlása nem feltétlenül emlékezetnélküli. (Viszont a beérkezési folyamat emlékezetnélküli, ezért az utolsó beérkezéstől eltelt időt nem kell megadnunk.) Így az $N(t)$ nem Markov-folyamat. Azonban az $[N(t), X_0(t)]$ vektor már az, és ezt tekinthetjük az $M/G/1$ rendszer állapotvektorának, hiszen tartalmazza a múltnak a folyamat jövőbeli alakulása szempontjából lényeges részét.

Az $M/M/1$ rendszer esetén elég $N(t)$-t megadni, és így egy diszkrét állapotterű Markov-láncunk van, ahol az állapotok száma megszámlálható. Jelen esetben a kétdimenziós állapotleírás esetén az $N(t)$ megszámlálható ugyan, de az $X_0(t)$ folytonos, és ez megnehezíti a vizsgálatot.

III.1.1. A hátralévő élettartam paradoxona

Mielőtt nekilátnánk a *beágyazott Markov-láncok* ismertetésének, meg kell értenünk a még hátralévő kiszolgálási idő néhány tulajdonságát. Azzal az esettel foglalkozunk, amikor a beérkező igény egy részben kiszolgált igényt talál a kiszolgáló csatornában. Egy látszólagos paradoxonnal kezdjük.

Tegyük fel, hogy valaki egy tetszőleges pillanatban egy villamosmegállóhoz ér és aztán villamosra vár. Tegyük fel még, hogy ehhez a megállóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek a villamosok, átlagosan percenként λ villamos. Átlagosan menny időt kell várnunk a következő villamos érkezésére? Két, egyaránt logikusnak tűnő választ is adhatunk:

• Mivel a villamosok beérkezése közötti idő átlagosan $\frac{1}{\lambda}$ perc, és mivel egy véletlen időpontban érkeztünk, ezért átlagosan $\frac{1}{2\lambda}$ percet kell várnunk.

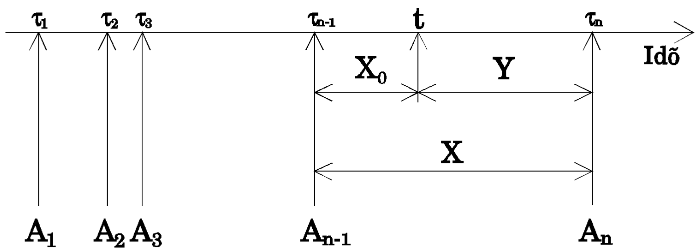
• A Poisson-folyamat emlékezetnélkülisége miatt a következő beérkezésig eltelt idő független az előző beérkezés óta eltelt időtől, tehát átlagosan $\frac{1}{\lambda}$

percet kell várnunk. Ezért az utolsó beérkezéstől addig az időpontig eltelt idő, mikor várni kezdtünk a villamosra, szintén $\frac{1}{\lambda}$ perc. Így az utolsó és a következő villamos beérkezése közötti idő átlagosan $\frac{2}{\lambda}$ perc, ami 2-szer olyan hosszú, mint amilyennek a Poisson folyamat esetében lennie kellene.

Tehát látszólag paradoxonnal állunk szemben. A következőkben belátjuk, hogy a második válasz a helyes. Ehhez tetszőleges eloszlású beérkezési időközöket veszünk, és az egyszerűség kedvéért felújításelméleti terminológiát használunk, és felújításelméleti eredményekre is hivatkozunk. Ezekről bővebben olvasható Karlin – Taylor (1985)-ben.

Tekintsük az 1. ábrát. A_k jelentse a k-adik villamost, τ_k az érkezési időpontját. Tegyük fel, hogy a $\tau_{k+1}-\tau_k$ időközök független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyek eloszlása és sűrűségfüggvénye:

$$F(x) := P(\tau_{k+1} - \tau_k \leq x) \quad \text{és} \quad f(x) := \frac{dF(x)}{dx}.$$



1. ábra

Legyen T egy elég nagy konstans és a $[0, T]$ szakaszon válasszunk ki egy véletlen t időpontot, ekkor érkezünk a megállóba. Az ábrán A_{n-1} a t időpont előtt utoljára érkezett villamos, és A_n az első amely t után érkezik. Ezt az $A_{n-1}A_n$ beérkezési időközt jelölje x, és legyen Y az az idő, amit a következő beérkezésig várnunk kell. A felújításelmélet nyelvén a $\{\tau_k\}$ pontok egy felújítási folyamatot alkotnak, azaz $\{\tau_k\}$ azon felújítási pillanatok sorozata, mikor egy régi alkatrész tönkremegy és azonnal egy újjal pótolják. X az alkatrész *élettartama*, Y a t időponthoz képest még *hátralévő élettartama*, $X_0 = X - Y$ az alkatrész *kora*. Keressük az X és Y sűrűségfüggvényét. Feltehetjük, hogy a folyamat régóta tart, mivel csak a határeloszlásokra vagyunk kíváncsiak. A hátralévő élettartam eloszlását jelölje

$$\hat{F}(x) := P(Y \leq x),$$

sűrűségfüggvényét

$$\hat{f}(x) := \frac{d\hat{F}(x)}{dx}.$$

A kiválasztott X élettartam sűrűségfüggvénye legyen $f_X(x)$, eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) := P(X \leq x).$$

Vegyük észre, hogy ha két felújí¡ tási pont között hosszú idő telik el, akkor az az időtengely hosszabb szakaszát foglalja el, mint egy rövidebb időtartam, és nagyobb valószínűséggel esik a t véletlen időpillanat a hosszú intervallumba, mint a rövidbe. Ennek szellemében el kell fogadnunk azt is, hogy annak a valószínűségnek, hogy egy x hosszúságú intervallumot választunk ki, arányosnak kell lennie az x hosszal, és az ilyen hosszúságú intervallumok relatív gyakoriságával, amit $f(x)\,dx$ ad meg. Így a kiválasztott intervallumra felírhatjuk, hogy

$$f_X(x)\,dx = Kxf(x)\,dx,$$

ahol a bal oldal $P(x < X < x + dx)$, a jobb oldal pedig tazt jelenti, hogy ez arányos az intervallum hosszával. A K konstanst úgy választjuk, hogy helyesen normalizálja a sűrűségfüggvényt. Mindkét oldalt integrálva $K = \frac{1}{m_1}$-et kapunk, ahol

$$m_1 := E\left(\tau_k - \tau_{k-1}\right),$$

a felújítások közötti idő várható értéke. Tehát

$$f_X\left(x\right) = \frac{xf\left(x\right)}{m_1}.$$

Ez azt jelenti, hogy az X nem $F\left(x\right)$ eloszlású! A korábbi példa szavaival élve ez azt jelenti, hogy az az intervallum, amit azáltal választunk ki, hogy a villamosmegállóhoz érünk, nem egy tipikus intervallum! Itt rejlik a paradoxon megoldása: valószínűbb, hogy egy hosszabb intervallumot fogunk ki, mint egy rövidebbet. Látni fogjuk, hogy Poisson-folyamat esetében ez azt jelenti, hogy a kiválasztott intervallum kétszer olyan hosszú, mint egy tipikus intervallum.

Keressük most meg a hátralévő idő $\hat{f}\left(x\right)$ sűrűségfüggvényét. Ha feltesszük, hogy $X = x$, akkor annak a valószínűsége, hogy az Y hátralévő élettartam nem haladja meg az y értéket,

$$P\left(Y \leq y \mid X = x\right) = \frac{y}{x},$$

ha $0 \leq y \leq x$. Ez azért igaz, mert az y pontot egyenletes eloszlás szerint választottuk. Felírhatjuk tehát az X és Y együttes eloszlásfüggvényét:

$$P\left(y < Y \leq y + dy, x < X \leq x + dx\right) = \left(\frac{dy}{x}\right)\left(\frac{xf\left(x\right)dx}{m_1}\right) = \frac{f\left(x\right)dydx}{m_1},$$

ahol $0 \leq y \leq x$. x szerint integrálva kapjuk az $\hat{f}\left(y\right)$ sűrűségfüggvényt, amely Y feltétel nélküli sűrűségfüggvénye, azaz

$$\hat{f}\left(y\right)dy = \int\limits_{x=y}^{\infty} \frac{f\left(x\right)dydx}{m_1},$$

innen

$$\hat{f}\,(y) = \frac{1 - F\,(y)}{m_1}. \tag{1}$$

Ez megadja a hátralévő élettartam sűrűségfüggvényét a beérkezési időközök eloszlásfüggvénye és várható értéke segítségével.

Jelölje $F^*\,(s)$ ill. $\hat{F}^*\,(s)$ az $f(x)$ ill. $\hat{f}(x)$ Laplace-transzformáltját.

Mivel nemnegatív valószínűségi változókkal dolgozunk, az (1)-et egyszerűen transzformálhatjuk a függelékbeli táblázataink segítségével. Látható, hogy az

$$\hat{f}\,(x) = \frac{1 - F\,(x)}{m_1} = \frac{1 - \int\limits_{-\infty}^{x} f\,(x)\,dx}{m_1}$$

Laplace-transzformáltja

$$\frac{\frac{1}{s} - \frac{F^*(s)}{s}}{m_1} = \frac{1 - F^*\,(s)}{sm_1} = \hat{F}^*\,(s)\,.$$

Ezek után könnyen kifejezhetjük a hátralévő élettartam momentumait az élettartam momentumaival. Legyen m_n az élettartam n-edik momentuma, r_n pedig a hátralévő élettartam n-edik momentuma, azaz $m_n := E\left((\tau_k - \tau_{k-1})^n\right), r_n := E\,(Y^n)$. Alakítsuk az m_n-et.

$$\int\limits_0^\infty x^n dF\,(x) = \int\limits_0^y x^n dF\,(x) + \int\limits_y^\infty x^n dF\,(x)\,,$$

így

$$\int\limits_y^\infty x^n dF\,(x) = \int\limits_0^\infty x^n dF\,(x) - \int\limits_0^y x^n dF\,(x)\,.$$

Mivel

$$\int_y^\infty x^n dF(x) \geq y^n \int_y^\infty dF(x) = y^n (1 - F(y)),$$

ezért

$$0 \leq y^n (1 - F(y)) \leq \int_0^\infty x^n dF(x) - \int_0^y x^n dF(x),$$

melyből

$$0 \leq \lim_{y\to\infty} y^n (1 - F(y)) \leq \int_0^\infty x^n dF(x) - \lim_{y\to\infty} \int_0^y x^n dF(x),$$

azaz

$$\lim_{y\to\infty} y^n (1 - F(y)) = 0.$$

Ezek után parciális integrálással

$$\int_0^\infty x^n dF(x) = -\int_0^\infty x^n d(1 - F(x)) = -\int_0^\infty x^n \frac{d(1 - F(x))}{dx} dx =$$

$$= [-x^n (1 - F(x))]_0^\infty + \int_0^\infty (1 - F(x)) \frac{dx^n}{dx} dx =$$

$$= -\lim_{y\to\infty} y^n (1 - F(y)) + \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx^n =$$

$$= \int_0^\infty n x^{an-1} (1 - F(x))\, dx.$$

Tehát

$$m_n = n \int_0^\infty x^{n-1} (1 - F(x))\, dx.$$

$$r_n = \int_0^\infty y^n \hat{f}(y)\, dy = \int_0^\infty \frac{y^n (1 - F(y))}{m_1} dy =$$

$$= \frac{(n+1)}{m_1} \int_0^\infty \frac{y^n (1 - F(y))}{(n+1)} dy = \frac{m_{n+1}}{m_1 (n+1)},$$

azaz

$$r_n = \frac{m_{n+1}}{m_1 (n+1)}.$$

Speciális esetként kapjuk a várható értéket:

$$r_1 = \frac{m_2}{2m_1} = \frac{m_1}{2} + \frac{\sigma^2}{2m_1},$$

ahol $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$. Emiatt nyilvánvaló, hogy a korábbi paradoxonra a helyes válasz csak akkor $\frac{m_1}{2}$, azaz a beérkezési időköz várható értékének a fele, ha $\sigma^2 = 0$, vagyis állandó beérkezési időközök esetén. Poisson-típusú beérkezési folyamatnál $m_1 = \frac{1}{\lambda}, \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$, így $r_1 = \frac{1}{\lambda} = m_1$, azaz korábban valóban jó megoldást adtunk a paradoxonra.

Jegyezzük még meg, hogy $\frac{m_1}{2} \leq r_1$, és $r_1 \to \infty$, ha $\sigma^2 \to \infty$!

III.1.2. A beágyazott Markov-láncok

Most már lehetőségünk van a *beágyazott Markov-láncok* módszerének az $M/G/1$ sorra való alkalmazásához. A módszer alapgondolata az, hogy az $[N(t), X_0(t)]$ kétdimenziós állapotleírást leegyszerűsítsük az $N(t)$ egydimenziós leírássá. Ha ki akarjuk számolni az állapotváltozás jövőbeli értékeit, akkor a rendszerbeli igényeknek ezzel az egydimenziós leírásával együtt meg kell adnunk impliciten azt az időt is, amelyet az igény már a kiszolgálócsatornában töltött. Ennek az egyszerűsítésnek az az ára, hogy nem minden időpontot tudunk figyelni, csak bizonyos kiválasztott időpontokat. Ezeknek olyanoknak kell lenniük, hogy ha meghatározzuk az egyik ilyen időpontban a rendszerbeli igények számát, és figyelembe vesszük az elkövetkezendő beérkezéseket, akkor a legközelebbi alkalmas időpontban újra ki kell tudnunk számolni a rendszerbeli igények számának eloszlását, azaz valahogy le kell írnunk a kiszolgálócsatornában tartózkodó igény már eltelt kiszolgálási idejét. Sok ilyen ponthalmaz van, de legcélszerűbb a kiszolgálócsatornából való *távozási pillanatok*ból állókat tekintenünk. Ha megadjuk egy igény távozásakor a rendszerben maradt igények számát, akkor bármely jövőbeli pontban ismét ki tudjuk számolni ezt, hiszen a további beérkezések adottak. Ezekben a pillanatokban nulla a kiszolgálócsatornában tartózkodó igényre vonatkozó, már eltelt kiszolgálási idő, hiszen ez az igény (ha van ilyen) éppen az adott pillanatban lépett be a csatornába.

Leírásunk nem más, mint egy *szemi-Markov folyamat**, melyben az állapotváltozások az igények távozási pillanataiban következnek be. Ezekben a pillanatokban egy beágyazott Markov-láncot definiálunk, ami a rendszerben tartózkodó igények száma közvetlenül a távozás után. Állapotváltozások csak a beágyazott pontokban jöhetnek létre, és diszkrét állapotteret alkotnak. Két állapotátmenet közötti idő eloszlása a kiszolgálási idő $B(x)$ eloszlásával egyezik meg, ha a távozás legalább egy igényt hagy még a rendszerben, és az exponenciális eloszlású beérkezési időközöknek és $B(x)$-nek a konvolúciójával egyenlő, ha a távozás üres rendszert hagy maga mögött, hiszen ekkor meg kell várnia a következő beérkezést is, annak eloszlása pedig emlékezetnélküli. Ezekben a beágyazott pontokban a lánc viselkedését Markov-folyamatként lehet leírni.

---

* A szemi-Markov folyamat esetében az egy helyben maradás ideje tetszőleges eloszlású lehet, míg Markov folyamatnál exponenciális eloszlást követelünk meg. Lásd Karlin – Taylor: Sztochasztikus folyamatok, 210. oldal.

Tehát a kiszolgálócsatornából való távozások időpontjait figyeljük, és állapotváltozónak a *távozó igények által hátrahagyott igények számát* vesszük. Mint majd látni fogjuk, ezen beágyazott Markov-pontokra adódó megoldás az összes időpontra szolgáltatja a megoldást! Ez a szerencsés körülmény annak köszönhető, hogy a beérkezési folyamat Poisson-típusú, és ezáltal a beérkező igények mintegy véletlen pillantást vetnek a rendszerre.

A rendszer állapotát a rendszerben tartózkodó igények számaként - $N(t)$ - értelmezve megfigyelhetjük a rendszer állapotváltozásait az idő függvényében. Ezek a változások közvetlen szomszéd típusúak, azaz ha k igény van éppen a rendszerben, akkor a következő állapotában $k+1$ vagy $k-1$ lesz. A $k \to k+1$ típusú átlépések száma legfeljebb eggyel különbözhet a $k+1 \to k$ típusú átlépések számától, ezért ha a rendszer elég sokáig működik, akkor a felfelé irányuló átlépések relatív gyakoriságának meg kell egyeznie a lefelé irányuló átmenetek relatív gyakoriságával. Így arra következtethetünk, hogy a beérkezések időpontjában észlelt rendszerállapot eloszlása (R_k) meg kell, hogy egyezzen a távozások időpontjában észlelt rendszerállapot határeloszlásával (D_k). Igazak a következő megállapítások:

1. Poisson-folyamatú beérkezések esetén

$$P\left(N\left(t\right)=k\right)=P\left(\text{egy } t \text{ pillanatbeli beérkezés } k \text{ igényt talál a rendszerben}\right).$$

2. Ha egy általános rendszerben $N\left(t\right)$ az értékeit mindig csak eggyel változtatja és létezik a következő határeloszlások egyike, akkor a másik is létezik, és ezen határeloszlások egyenlőek:

$$R_k := \lim_{t\to\infty} P\left(t \text{ pillanatbeli beérkezés } k \text{ igényt talál a rendszerben}\right),$$

$$D_k := \lim_{t\to\infty} P\left(t \text{ pillanatbeli távozás } k \text{ igényt hagy maga mögött}\right),$$

$$R_k = D_k.$$

Így az $M/G/1$ rendszerre

$$R_k = P_k = D_k,$$

azaz a beérkezések, a távozások és a véletlenszerű megfigyelések egyensúlyi állapotban a rendszerbeli igények számának ugyanazt az eloszlását figyelik meg.

A teljesség kedvéért mind a két állítást bebizonyítjuk. Bizonyítsuk be először az 1-et. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$P_k(t) := P\left(N\left(t\right) = k\right),$$

$$R_k(t) := P\left(\text{egy } t \text{ pillanatbeli beérkezés } k \text{ igényt talál a rendszerben}\right).$$

Legyen $A(t, t+\Delta t)$ az az esemény, hogy egy beérkezés történik a $(t, t+\Delta t)$ intervallumban. Ekkor

$$R_k(t) = \lim_{\Delta t \to 0} P\left(N\left(t\right) = k \mid A(t, t+\Delta t)\right).$$

Felhasználva a feltételes valószínűség definícióját,

$$R_k(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(N\left(t\right) = k, A(t, t+\Delta t)\right)}{P\left(A(t, t+\Delta t)\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(A(t, t+\Delta t) \mid N\left(t\right) = k\right) P\left(N(t) = k\right)}{P\left(A(t, t+\Delta t)\right)}.$$

Az emlékezetnélküliség miatt az $A(t, t+\Delta t)$ esemény nem függ a t pillanatban a rendszerben tartózkodó igények számától, ezért

$$P\left(A(t, t+\Delta t) \mid N\left(t\right) = k\right) = P\left(A(t, t+\Delta t)\right),$$

így

$$R_k(t) = \lim_{\Delta t \to 0} P\left(N(t) = k\right),$$

azaz

$$R_k(t) = P_k(t).$$

Ez természetesen a stacionárius valószínűségekre is igaz, azaz

$$R_k = \lim_{t\to\infty} R_k(t) = \lim_{t\to\infty} P_k(t) = P_k.$$

A 2-t is bebizonyítjuk, az 1. felhasználásával. Jelölje $\hat{R}_k(t)$ a k állapotban lévő rendszerbe történő beérkezések számát a $(0,t)$ intervallumban, és $\hat{D}_k(t)$ a $(0,t)$ intervallumban azon távozások számát, melyek után a rendszer az k állapotba kerül. Feltételünkből következik, hogy

$$|\hat{R}_k(t) - \hat{D}_k(t)| \leq 1. \tag{2}$$

Továbbá, ha az összes távozások számát $D(t)$, az összes beérkezésekét pedig $R(t)$ jelöli, akkor

$$D(t) = R(t) + N(0) - N(t).$$

A távozási pontokban észlelt határeloszlás felírható a következőképpen

$$D_k = \lim_{t\to\infty} \frac{\hat{D}_k(t)}{D(t)}.$$

Ha a számlálóhoz hozzáadunk és le is vonunk belőle $\hat{R}_k(t)$-t, és a nevezőt felírjuk a fenti alakban, akkor

$$\frac{\hat{D}_k(t)}{D(t)} = \frac{\hat{R}_k(t) + \hat{D}_k(t) - \hat{R}_k(t)}{R(t) + N(0) - N(t)}.$$

Mivel $N(0)$ véges és $N(t)$-nek is annak kell lennie a stacionaritás feltétele miatt, (2)-ből és abból, hogy $\hat{R}(t) \to \infty$, egy valószínűséggel következik

$$D_k = \lim_{t\to\infty} \frac{\hat{D}_k(t)}{D(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\hat{R}_k(t)}{R(t)} = R_k.$$

Innen, az 1. pontot is felhasználva kapjuk az állításunkat.

III.1.3. Az átmeneti valószínűségek és a sorhossz várható értéke

A következő fejezetekben a rendszerre jellemző mennyiségeket számoljuk ki. Először is bevezetünk néhány jelölést, amelyekre a későbbiekben szükségünk lesz.

C_n – a rendszerbe belépő n-edik igény;

τ_n – a C_n igény beérkezési ideje;

t_n – $\tau_n - \tau_{n-1}$, a C_{n-1} és C_n igények beérkezése közötti időtartam;

x_n – a C_n igény kiszolgálási ideje;

q_n – a C_n igény távozásakor hátrahagyott igények száma;

v_n – a C_n igény kiszolgálása alatt a rendszerbe érkező új igények száma.

$(q_n, n \geq 1)$ az ú.n. beágyazott Markov-lánc, amelynek egylépéses átmenetvalószínűségei:

$$p_{ij} := P\left(q_{n+1} = j \mid q_n = i\right).$$

Elsősorban a q_n eloszlását vizsgáljuk, vagyis a $P\left(q_n = k\right)$ valószínűségeket. Ezek függenek az időtől, határeloszlásukat (ha $n \to \infty$), D_k-val jelöljük.

A $\mathbf{P} = \left(p_{ij}\right)_{i,j=0,1,\ldots}$ átmenetvalószínűségi mátrix a következő alakú lesz:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

ahol $\alpha_k := P(v_{n+1} = k)$.

Az i-edik sor j-edik eleme annak a valószínűségét adja meg, hogy ha C_n távozásakor i igényt hagyott maga után a rendszerben, akkor C_{n+1} távozásakor éppen j igény maradt a rendszerben. Ez éppen azt jelenti, hogy pontosan $j - i + 1$ új igény érkezett, amíg a C_{n+1} igény kiszolgálása tartott.

Az α_k kiszámolásához vegyük figyelembe, hogy a beérkezési folyamat független a rendszer állapotától. A C_n igény, ($B(x)$ eloszlású), x_n kiszolgálási ideje pedig független az n-től, ezért v_n szintén független az n értékétől. Hagyjuk el tehát az n-et a jelölésünkből és vezessük be az $\tilde{x}$ és $\tilde{v}$ valószínűségi változókat. $P(x_n \le x) = P(\tilde{x} \le x) = B(x)$ és $P(v_n = k) = P(\tilde{v} = k) = \alpha_k$. A teljes valószínűség tétele alapján

$$\alpha_k = P(\tilde{v} = k) = \int_0^\infty P(\tilde{v} = k, x < \tilde{x} \le x + dx)\, dx,$$

melyet a feltételes valószínűségekkel kifejezve

$$\alpha_k = \int_0^\infty P(\tilde{v} = k \mid \tilde{x} = x)\, b(x)\, dx,$$

ahol $b(x) = \frac{dB(x)}{dx}$, a kiszolgálási idő sűrűségfüggvénye. Mivel a beérkezési folyamat λ paraméterű Poisson-folyamat, ahol $x = \tilde{x}$ az időváltozó, a következő átmenetvalószínűségeket (P elemeit) kapjuk:

$$\alpha_k = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} b(x)\, dx. \tag{3}$$

Figyelembe véve, hogy $\alpha_k > 0$ minden $k \ge 0$-ra, a $\mathbf{P}$ mátrix alakjából következik, hogy bármely adott állapotból az összes többi elérhető, azaz a

Markov-lánc irreducibilis (és aperiodikus). A sorbanállási elmélet alapjainál használt szokásos jelöléssel

$$\varrho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{x},$$

ahol $\bar{x}$ a kiszolgálási idő hosszának várható értéke. A Markov-lánc ergodikus, ha $\varrho < 1$. (A továbbiakban ezt feltételezzük.)

Most vizsgáljuk a q_{n+1} és q_n valószínűségi változók kapcsolatát két speciális esetben.

Az első annak felel meg, amikor C_n nem üres rendszert hagy maga után (azaz $q_n > 0$). Ez azt jelenti, hogy a C_n távozásakor a C_{n+1} már a rendszerben van. Ekkor q_{n+1} nyilván megkapható, ha q_n-ből levonunk egyet (mivel YC_{n+1} eltávozik) és hozzáadjuk azon igények számát, melyek az x_{n+1} kiszolgálási időtartam alatt érkeztek be, azaz v_{n+1}-et.

A második eset az, amikor $q_n = 0$, azaz a távozó C_n igény üres rendszert hagy maga után, azaz C_{n+1} nem érkezett meg a C_n távozási időpontjáig. Így q_{n+1} éppen a C_{n+1} kiszolgálási ideje alatt a rendszerbe érkezett igények számával egyenlő.

Végeredményben azt kaptuk, hogy

$$q_{n+1} = \begin{cases} q_n - 1 + v_{n+1} & \text{, ha } q_n > 0 \\ v_{n+1} & \text{, ha } q_n = 0. \end{cases}$$

Vezessük be a

$$\Delta_k = \begin{cases} 1 & \text{, ha } k = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{, ha } k \le 0 \end{cases}$$

mennyiségeket. Ennek segítségével

$$q_{n+1} = q_n - \Delta_{q_n} + v_{n+1}. \tag{4}$$

Ebből az egyenletből határozzuk meg a q_n várható értékét. Először nem az időtől függő viselkedéssel foglalkozunk, hanem a határeloszlással (feltéve a létezését), azaz $\tilde{q}$-mal. Tegyük fel, hogy léteznek a j-edik momentumok is és

$$\lim_{n\to\infty} E\left(q_n^j\right) = E\left(\tilde{q}^j\right).$$

(Ismét az ergodikusságot használva.) Formális számolással vegyük (4) mindkét oldalának várható értékét és végezzük el az $n \to \infty$ határátmenetet.

$$E\left(\tilde{q}\right) = E\left(\tilde{q}\right) - E\left(\Delta_{\tilde{q}}\right) + E\left(\tilde{v}\right).$$

Ebből

$$E\left(\Delta_{\tilde{q}}\right) = E\left(\tilde{v}\right). \tag{5}$$

Tudjuk, hogy $E\left(\tilde{v}\right)$ a beérkezések átlagos száma egy igény kiszolgálási ideje alatt. (5) bal oldala definíció szerint

$$E\left(\Delta_{\tilde{q}}\right) = 0 \cdot P\left(\tilde{q} = 0\right) + 1 \cdot P\left(\tilde{q} > 0\right) = P\left(\tilde{q} > 0\right).$$

Mivel egyetlen kiszolgáló csatornánk van,

$$E\left(\Delta_{\tilde{q}}\right) = P(\tilde{q} > 0) = P\left(\text{ a rendszer foglalt }\right).$$

A ϱ kihasználtsági tényező pedig éppen a rendszer foglaltságának valószínűségét adja meg, ezért

$$P\left(\text{ a rendszer foglalt }\right) = \varrho.$$

Így (5) alapján

$$E\left(\tilde{v}\right) = \varrho. \tag{6}$$

Tehát az egy igény kiszolgálási ideje alatti beérkezések számának várható értéke $\varrho(= \lambda\bar{x})$. A stabilitáshoz megkövetelt $\varrho < 1$ miatt a (6) egyenlethez szükséges, hogy az igényeknek lassabban kell érkezniük, mint ahogyan a kiszolgálás történik.

(4) négyzetre emelésével

$$q_{n+1}^2 = q_n^2 + \Delta_{q_n}^2 + v_{n+1}^2 - 2q_n\Delta_{q_n} + 2q_nv_{n+1} - 2\Delta_{q_n}v_{n+1}.$$

Nyilvánvaló, hogy $(\Delta_{q_n})^2 = \Delta_{q_n}$ és $q_n\Delta_{q_n} = q_n$, így

$$\begin{aligned} E\left(q_{n+1}^2\right) =& E\left(q_n^2\right) + E\left(\Delta_{q_n}\right) + E\left(v_{n+1}^2\right) - 2E\left(q_n\right) + \\ &+ 2E\left(q_nv_{n+1}\right) - 2E\left(\Delta_{q_n}v_{n+1}\right). \end{aligned}$$

Mivel v_{n+1} független q_n-től, a két utolsó tag várható értékét mint várható értékek szorzatát lehet felírni. $n \to \infty$ határátmenetet véve

$$0 = E\left(\Delta_{\tilde{q}}\right) + E\left(\tilde{v}^2\right) - 2E\left(\tilde{q}\right) + 2E\left(\tilde{q}\right)E\left(\tilde{v}\right) - 2E\left(_{\tilde{q}}\right)E\left(\tilde{v}\right).$$

(5)-öt és (6)-ot kihasználva kifejezhetjük $E\left(\tilde{q}\right)$-ot.

$$0 = 2E\left(\tilde{q}\right)E\left(\tilde{v}\right) + E\left(\tilde{v}^2\right) - 2E\left(\tilde{q}\right) - 2E\left(\Delta_{\tilde{q}}\right)E\left(\tilde{v}\right) + 2E\left(\tilde{v}\right) - E\left(\tilde{v}\right)$$

$$2E\left(\tilde{q}\right) - 2\varrho E\left(\tilde{q}\right) = 2\varrho\left(1-\varrho\right) + E\left(\tilde{v}^2\right) - E\left(\tilde{v}\right),$$

ahonnan

$$E\left(\tilde{q}\right) = \varrho + \frac{E\left(\tilde{v}^2\right) - E\left(\tilde{v}\right)}{2\left(1-\varrho\right)}. \tag{7}$$

(7)-ben már csak $E\left(\tilde{v}^2\right)$ ismeretlen. Ennek meghatározásához egy általános módszert, a generátorfüggvények módszerét használjuk. Legyen a $\tilde{v}$ változó *generátorfüggvénye.*

$$V\left(z\right) := E\left(tz^{\tilde{v}}\right) := \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\tilde{v}=k\right)z^k.$$

Innen (3) felhasználásával

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} b(x)\, dx z^k =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x z)^k}{k!} \right) b(x)\, dx = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} e^{\lambda x z} b(x)\, dx =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda z)x} b(x)\, dx.$$

Legyen $B^*(s)$ a kiszolgálási idő sűrűségfüggvényének *Laplace-transzformáltja*, vagyis

$$B^*(s) := \int_0^{\infty} e^{-sx} b(x)\, dx.$$

A következő hasznos összefüggést vehetjük észre az előző két egyenlet között:

$$V(z) = B^*(\lambda - \lambda z). \tag{8}$$

Mint ismert, a generátorfüggvény deriváltjainak a $z = 1$ helyen vett helyettesítési értékei, valamint a Laplace-transzformált $s = 0$ helyen vett helyettesítési értékei a vizsgált valószínűségi változó megfelelő momentumait adják meg.

A valószínűségi változó várható értékére a felülvonással való jelölést használva, a következőket írhatjuk:

$$B^{*^{(k)}}(0) := (-1)^k E\left(\tilde{x}^k\right) = (-1)^k \overline{x^k}; \tag{9}$$

$$V^{'}(1) := \left. \frac{dV(z)}{dz} \right|_{z=1} = E(\tilde{v}) = \bar{v}; \tag{10}$$

$$V^{(2)}(1) := \left.\frac{d^2V(z)}{dz^2}\right|_{z=1} = E\left(\tilde{v}^2\right) - E(\tilde{v}) = \overline{v^2} - \bar{v}. \tag{11}$$

$$B^*(0) = V(1) = 1.$$

(8)-ból láthatóan

$$\frac{dV(z)}{dz} = \frac{dB^*(\lambda - \lambda z)}{dz} = \tag{12}$$

$$= \frac{dB^*(\lambda - \lambda z)}{dz} = \left(\frac{dB^*(\lambda - \lambda z)}{d(\lambda - \lambda z)}\right)\left(\frac{d(\lambda - \lambda z)}{dz}\right) = -\lambda\frac{dB^*(y)}{dy},$$

ahol $y = \lambda - \lambda z$. Végezzük el a $z = 1$ helyettesítést. Ekkor

$$V^{'}(1) = -\lambda \left.\frac{dB^*(y)}{dy}\right|_{z=1} = -\lambda B^{*^{'}}(0).$$

mivel $z = 1$-nél $y = 0$ adódik. Ebből (9)-et és (10)-et felhasználva

$$\bar{v} = \lambda\bar{x} = \varrho,$$

amit már az előzőekből ismerünk. Most differenciáljuk még egyszer (12)-t:

$$\frac{d^2V(z)}{dz^2} = \frac{d^2B^*(\lambda - \lambda z)}{dz^2}.$$

B^* első deriváltját felhasználva a másodikra az alábbi összefüggés adódik:

$$\frac{d^2B^*(\lambda - \lambda z)}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left(-\lambda\frac{dB^*(y)}{dy}\right) = -\lambda\left(\frac{d^2B^*(y)}{dy^2}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right) = \lambda^2\frac{d^2B^*(y)}{dy^2}.$$

f $z = 1$-et helyettesítve

$$V^{(2)}(1) = \lambda^2 B^{*^{(2)}}(0).$$

A korábbiakból

$$\overline{v^2} - \bar{v} = \lambda^2\overline{x^2}.$$

A további momentumok is hasonlóan határozhatók meg.

Térjünk vissza (7)-hez és alkalmazzuk az előző összefüggést, adódik

$$\bar{q} = \varrho + \frac{\lambda^2 \overline{x^2}}{2(1-\varrho)}. \tag{13}$$

Mivel $\lambda^2 \overline{x^2} = \lambda^2 \left(\sigma_b^2 + \bar{x}^2\right) = \lambda^2 \sigma_b^2 + \varrho^2$, ahol σ_b^2 a kiszolgálási idő szórásnégyzete, (13) más alakban:

$$\bar{q} = \varrho + \frac{\varrho^2 + \lambda^2 \sigma_b^2}{2(1-\varrho)}. \tag{13a}$$

Ez a keresett formula, ami az átlagos sorhosszat, azaz az $M/G/1$ rendszerben tartózkodó igények számának várható értékét adja meg ismert mennyiségek segítségével. Ezt *Pollaczek-Hincsin-féle (P-H) várható érték–formulá*nak nevezzük.

A P-H várható érték-formula a $\bar{q}$ mennyiségekre, a távozási pillanatokban a rendszerben tartózkodó igények számának várható értékére ad egy kifejezést. De tudjuk, hogy aérkezési pillanatokban, sőt bármelyik pillanatban is ez a várható érték. Az általában használt jelölés szerint $\bar{N}$ jelenti ezt a mennyiséget. Vezessük be most $\bar{N}_q$-t a sorbanálló igények számának várható értékeként (ez nem tartalmazza a kiszolgálócsatornában lévő igényt).

$$\bar{N} := \sum_{k=0}^{\infty} kP(\tilde{q} = k);$$

$$\bar{N}_q = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) P(\tilde{q} = k).$$

Innen

$$\bar{N}_q = \sum_{k=0}^{\infty} kP(\tilde{q} = k) - \sum_{k=1}^{\infty} P(\tilde{q} = k) = \bar{N} - \varrho,$$

$$\bar{N}_q = \frac{\varrho^2 + \lambda^2 \sigma_b^2}{2(1-\varrho)}.$$

Bebizonyítunk egy általános eredményt, az első Little-formulát, ami a beérkezési intenzitás, a rendszerben tartózkodó igények számának várható értéke és az igények rendszerbeli idejének várható értéke között ad meg egy egyszerű összefüggést. Legyen $\alpha(t)$ a $(0,t)$ intervallum alatt beérkezett igények száma, $\delta(t)$ a $(0,t)$ intervallum alatt a rendszerből kilépett igények száma. $N(0) = 0$-t feltéve nyilvánvalóan $N(t) = \alpha(t) - \delta(t)$.
Jelölje a $(0,t)$ intervallumban a beérkezési intenzitást

$$\bar{\lambda}_t := \frac{\alpha(t)}{t}.$$

$\gamma(t)$ legyen a t pillanatig felgyűlt összes igényidő, pontosabban az az idő, amit a $(0,t)$ időtartam során az igények összesen eltöltöttek a rendszerben. A $\overline{T}_t$ mennyiség legyen az egy igényre eső rendszerbeli idő átlaga, a $(0,t)$ intervallum összes igényét figyelembe véve. Ezekből nyilván

$$\overline{T}_t = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}.$$

Végül legyen $\bar{N}_t$ a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma a $(0,t)$ intervallumban:

$$\bar{N}_t = \frac{\gamma(t)}{t}.$$

Az utolsó három egyenletből

$$\bar{N}_t = \bar{\lambda}_t \bar{T}_t.$$

Sorbanállási rendszerünkben (ergodikusság esetén) léteznek az alábbi határértékek

$$\bar{\lambda} = \lim_{t\to\infty} \bar{\lambda}_t, \qquad \bar{T} = \lim_{t\to\infty} \bar{T}_t.$$

Így (Little-formula)

$$\bar{N} = \bar{\lambda}\bar{T}.$$

Most levezetünk egy eredményt a rendszerben eltöltött átlagos időre. Ha felhasználjuk a fenti Little-formulát, $\bar{N} = \bar{\lambda}\bar{T}$-t, valamint (13)-at, és tudjuk, hogy $\bar{q}$ egy találomra választott időpontra is megadja a rendszerben található igények számának várható értékét, azaz $\bar{q} = \bar{N}$, akkor

$$\bar{N} = \check{(}arrho + \frac{\varrho^2 + \lambda^2\sigma_b^2}{2\,(1-\varrho)} = \bar{\lambda}\bar{T}.$$

Innen

$$\bar{T} = \bar{x} + \frac{\varrho\bar{x} + \lambda\sigma_b^2}{2\,(1-\varrho)}.$$

Ez egy igény rendszerben eltöltött összidejének átlaga, ami egyenlő az átlagos kiszolgálási időnek, valamint a sorbanállási idő átlagának összegével, amit $\bar{W}$-vel jelölünk. Így

$$\bar{W} = \frac{\varrho\bar{x} + \lambda\sigma_b^2}{2\,(1-\varrho)},$$

vagy

$$\bar{W} = \frac{\bar{W}_0}{1-\varrho}, \tag{14}$$

ahol $\bar{W}_0 := \frac{\lambda\overline{x^2}}{2}$, az új igény érkezésekor a kiszolgálócsatornában található igény átlagos hátralévő kiszolgálási ideje. Ezt megkaphatjuk a hátralévő élettartamra vonatkozó képletünkből, ami

$$r_1 = \frac{m_2}{2m_1} = \frac{m_1}{2} + \frac{\sigma^2}{2m_1} = \frac{\lambda\overline{x^2}}{2\varrho},$$

mivel itt $m_1 = \bar{x}$, $m_2 = \overline{x^2}$. Viszont ez hátralévő élettartam esetén teljesül, hiszen élettartamról akkor beszélhetünk, ha ,,létezik" az a bizonyos dolog, tehát már ,,él". ,,Kiszolgálási terminológiánk" alapján ezt meg kell még szoroznunk annak a valószínűségével, hogy van igény a kiszolgálócsatornában, azaz van értelme hátralévő kiszolgálási időről beszélnünk. Jelen esetben a rendszer foglaltságának valószínűsége ϱ, tehát

$$\bar{W}_0 = r_1 \cdot \varrho = \frac{\lambda \overline{x^2}}{2\varrho} \cdot \varrho = \frac{\lambda \overline{x^2}}{2}.$$

Ha tekintjük a $\frac{\bar{T}}{\bar{x}}$ hányadost, ami azt fejezi ki, hogy milyen ,,kényelmetlenséget" okoz a rendszer az igényeknek azzal, hogy más igényekkel is osztozniuk kell a kiszolgálóegységeken, a következőt kapjuk:

$$\frac{\bar{T}}{\bar{x}} = 1 + \frac{\varrho + \frac{\lambda}{\bar{x}}\sigma_b^2}{2\,(1-\varrho)}, \tag{15}$$

és hasonlóan

$$\frac{\bar{W}}{\bar{x}} = \frac{\varrho + \frac{\lambda}{\bar{x}}\sigma_b^2}{2\,(1-\varrho)}; \tag{16}$$

(14)-et valamint (15)-öt és (16)-ot szintén P-H várható érték–formulának nevezzük.

III.1.4. A rendszerbeli igények számának eloszlása

Ebben a szakaszban a $q_{n+1} = q_n - \Delta_{q_n} + v_{n+1}$ egyenlet további hatványozása és így a magasabb momentumok meghatározása helyett a q_n határeloszlását keressük meg. Pontosabban az eloszlás generátorfüggvényét fogjuk meghatározni. Hátránya ugyan, hogy ebből néha nehéz meghatározni magát az eloszlást, viszont igen egyszerűen megkaphatjuk a $\tilde{q}$ eloszlásának összes momentumát, ha felhasználjuk a transzformáltak és deriváltjaik általános tulajdonságait. Elsőként számoljuk ki annak a valószínűségeloszlásnak a generátorfüggvényét, hogy hány igény található a rendszerben közvetlenül egy igény távozása után. Legyen

$$Q_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} P(q_n = k) z^k.$$

A $\tilde{q}$ generátorfüggvénye:

$$Q(z) = \lim_{n\to\infty} Q_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\tilde{q} = k) z^k = E\left(z^{\tilde{q}}\right).$$

(4)-ből adódik, hogy

$$z^{q_{n+1}} = z^{q_n - \Delta_{q_n} + v_{n+1}}.$$

Vegyük ennek a várható értékét,

$$E\left(z^{q_{n+1}}\right) = E\left(z^{q_n - \Delta_{q_n} + v_{n+1}}\right).$$

A bal oldal éppen $Q_{n+1}(z)$, a jobb oldal pedig felírható két tényező szorzatának várható értékeként, ugyanis v_{n+1} és q_n függetlenek:

$$Q_{n+1}(z) = E\left(z^{q_n - \Delta_{q_n}}\right) E\left(z^{v_{n+1}}\right).$$

A második várható érték nem függ az $n+1$ indextől, így ezt elhagyhatjuk, legyen $V(z) = E\left(z^{\tilde{v}}\right)$, ekkor

$$Q_{n+1}(z) = V(z) E\left(z^{q_n - \Delta_{q_n}}\right). \tag{17}$$

Definíció szerint

$$\begin{aligned} E\left(z^{q_n - \Delta_{q_n}}\right) =& \sum_{k=0}^{\infty} P(q_n = k) z^{k-\Delta_k} = \\ =& P(q_n = 0) z^{0-0} + \sum_{k=1}^{\infty} P(q_n = k) z^{k-1} = \\ =& P(q_n = 0) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} P(q_n = k) z^k - \frac{1}{z} P(q_n = 0) z^0 = \\ =& \frac{1}{z} Q_n(z) - \frac{1}{z} P(q_n = 0) = \\ =& P(q_n = 0) + \frac{Q_n(z) - P(q_n = 0)}{z}, \end{aligned} \tag{18}$$

(17)-be helyettesítve:

$$Q_{n+1}(z) = V(z)\left(P(q_n = 0) + \frac{Q_n(z) - P(q_n = 0)}{z}\right).$$

Korábbi feltételezésünkkel összhangban elvégezhetjük az $n \to \infty$ határátmenetet. Ezért

$$Q(z) = V(z)\left(P(\tilde{q} = 0) + \frac{Q(z) - P(\tilde{q} = 0)}{z}\right).$$

Vegyük figyelembe, hogy $P(\tilde{q} = 0) = 1 - \varrho$, és oldjuk meg $Q(z)$-re az egyenletet! Mivel

$$zQ(z) = zV(z)(1-\varrho) + Q(z)V(z) - V(z)(1-\varrho),$$

ebből

$$Q(z) = \frac{V(z)(1-\varrho)(z-1)}{z - V(z)}.$$

Szorozzuk meg a számlálót és a nevezőt is -1-vel és használjuk fel, hogy $V(z) = B^*(\lambda - \lambda z)$. Így

$$Q(z) = B^*(\lambda - \lambda z)\frac{(1-\varrho)(1-z)}{B^*(\lambda - \lambda z) - z}.$$

Ezt az egyenletet az *első Pollaczek-Hincsin-féle transzformált-egyenlet*nek nevezzük.

III.1.5. A várakozási idő eloszlása

Ebben a fejezetben a rendszerben és a sorban eltöltött idő eloszlását számoljuk ki a P-H transzformált-egyenletek segítségével, figyelembe véve azt is, hogy a kiszolgálási elv FIFO.

Idézzük fel a (8) egyenletet:

$$V(z) = B^*(\lambda - \lambda z),$$

ahol $V(z)$ egy bizonyos kiszolgálási intervallum — C_n kiszolgálási ideje — alatt a rendszerbe érkező igények számának generátorfüggvénye, ahol a beérkezési folyamat λ paraméterű Poisson-folyamat. Ez az intervallum $B(x)$ eloszlású, Laplace-transzformáltja $B^*(s)$. Az ezek közti összefüggést éppen az előbb mutattuk meg.

Tekintsük most a C_n igénynek a rendszerben eltöltött idejét. Ekkor w_n a sorba beállástól a sor elhagyásáig terjedő időtartam, a C_n várakozási ideje, x_n pedig a kiszolgálási idő. Jelentse s_n a C_n igény rendszerben eltöltött teljes idejét. $s_n = w_n + x_n$.

q_n azon igények számát jelenti, amelyek a rendszerben maradnak a C_n távozásakor. Ha a kiszolgálási elv FIFO, akkor a C_n érkezésekor a rendszerben lévő igények C_n előtt távoznak, és C_n pontosan a rendszerben való tartózkodása alatt érkezett q_n számú igényt hagyja hátra távozásakor. Így az s_n időtartam alatt érkezett igények száma q_n valószínűségi változó.

Az első esetben tehát egy x_n hosszúságú kiszolgálási intervallum alatt érkező v_n igényszám, a második esetben egy s_n hosszúságú tartózkodási intervallum alatt beérkező igények q_n száma érdekel minket.

A C_n teljes rendszerbeli tartózkodási idejének eloszlásfüggvénye

$$S_n(y) := P(s_n \leq y).$$

Mivel feltettük az ergodicitást, létezik ennek n-től független határeloszlása, ha $n \to \infty$. Jelöljük ezt $S(y)$-nal és legyen $\tilde{s}$ egy olyan valószínűségi változó, melyre

$$S(y) := P(\tilde{s} \leq y).$$

A teljes rendszerbeli tartózkodási idő eloszlásfüggvényének Laplace-Stieltjes transzformáltja

$$S^*(s) := \int_0^\infty e^{-sy} dS(y) = E\left(e^{-s\tilde{s}}\right).$$

Mindkét esetben λ intenzitású Poisson-féle beérkezési folyamatunk van. A két eset között analógiát fedezhetünk fel. Mivel v_n a q_n megfelelője, ezért $V(z)$ lesz a $Q(z)$ megfelelője. Ugyanígy, mivel x_n az s_n-nel analóg, a $B^*(s)$ megfelelője $S^*(s)$ kell legyen. Ez alapján (8)-ból közvetlenül adódik, hogy

$$Q(z) = S^*(\lambda - \lambda z).$$

Felhasználva a P-H transzformált-egyenletet

$$S^*(\lambda - \lambda z) = B^*(\lambda - \lambda z) \frac{(1-\varrho)(1-z)}{B^*(\lambda - \lambda z) - z}$$

adódik. Hajtsuk végre az $s = \lambda - \lambda z$ változó transzformációt, amiből $z = 1 - \frac{s}{\lambda}$. Így

$$S^*(s) = B^*(s) \frac{s(1-\varrho)}{s - \lambda + \lambda B^*(s)}. \tag{19}$$

Ez, az $M/G/1$-beli teljes tartózkodási idő Laplace-transzformáltjára adott explicit kifejezés a *második P-H transzformáltegyenlet.*

Ebből könnyen levezethetjük a várakozási idő eloszlásának Laplace-Stieltjes transzformáltját, $W^*(s)$-et. Legyen C_n várakozási idejének eloszlásfüggvénye

$$W_n(y) := P(w_n \leq y),$$

és legyen

$$\lim_{n\to\infty} W_n(y) = W(y),$$

továbbá a $\tilde{w}$ valószínűségi válttozóra álljon fenn

$$W(y) := P(\tilde{w} \leq y).$$

A Laplace-Stieltjes transzformált

$$W^*(s) := \int_0^\infty e^{-sy} dW(y) = E\left(e^{-s\tilde{w}}\right).$$

A várakozási és a kiszolgálási idők egymástól függetlenek, így $\tilde{s}$ felírható két független valószínűségi változó összegeként:

$$\tilde{s} = \tilde{w} + \tilde{x}.$$

Kihasználva a Laplace-Stieltjes transzformált konvolúcióffis tulajdonságát

$$S^*(s) = W^*(s)\, B^*(s).$$

(19)-ből rögtön adódik, hogy

$$W^*(s) = \frac{s(1-\varrho)}{s - \lambda + \lambda B^*(s)}. \tag{20}$$

Ez a várakozási idő Laplace-transzformáltjára vonatkozó kifejezés a *harmadik P-H transzformált-egyenlet.*

Irjuk fel ezt a következőképpen

$$W^*(s) = \frac{1-\varrho}{1 - \varrho\left(\frac{1-B^*(s)}{s\bar{x}}\right)} = \frac{1-\varrho}{1-\varrho\hat{B}^*(s)},$$

ahol a korábbi jelöléseinkkel összhangban

$$\hat{B}^*(s) := \frac{1-B^*(s)}{s\bar{x}},$$

a hátralévő kiszolgálási idő sűrűségfüggvényéhez tartozó Laplace-transzformált. Fejtsük hatványsorba $W^*(s)$-et:*

$$W^*(s) = (1-\varrho)\sum_{k=0}^{\infty} \varrho^k \left(\hat{B}^*(s)\right)^k. \tag{21}$$

* Ehhez az szükséges, hogy $\varrho\hat{B}^*(s) < 1$ legyen, ami igaz, ha $\varrho < 1$, hiszen $1 - B^*(s) = 1 - \int\limits_0^\infty e^{-st} dB(t) \le 1 - \int\limits_0^\infty (1 - st)\, dB(t) = \frac{s}{\mu} = \frac{s\varrho}{\lambda} < \frac{s}{\lambda}$, így $\frac{\lambda}{s}(1 - B^*(s)) < 1$, azaz $\varrho\hat{B}^*(s) < 1$.

A Laplace-transzformált k-adik hatványa az inverz transzformált önmagával vett k-szoros konvolúciójának felel meg. Jelöljük ezt a k-szoros konvolúciót $f_{(k)}(x) := \underbrace{f(x) * \cdots * f(x)}_{k-\text{szor}}$ – szel. Ennek segítségével invertálhatjuk (21)-et, így megkapjuk a várakozási idő sűrűségfüggvényét:

$$w(y) = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\varrho)\,\varrho^k \hat{b}_{(k)}(y)\,.$$

Tehát a várakozási idő sűrűségfüggvénye a hátralévő kiszolgálási idő sűrűségfüggvénye konvolúcióinak súlyozott összege, ahol az $(1-\varrho)\,\varrho^k$ súlyok az $M/M/1$ rendszerbeli igények számának eloszlásával egyenlők.

A (20) P-H transzformátoregyenlet segítségével levezetünk egy összefüggést a várakozási idő k-adik momentumára, $\overline{w^k}$-ra.

$$W^*(s) = \frac{s(1-\varrho)}{s-\lambda+\lambda B^*(s)},$$

$$W^*(s)\,(s-\lambda+\lambda B^*(s)) = s(1-\varrho)\,.$$

l-edik deriváltat véve

$$\frac{d^l W^*(s)\,(s-\lambda+\lambda B^*(s))}{ds^l} = \frac{d^l s(1-\varrho)}{ds^l}.$$

Végezzük el a műveletet a Leibniz-formula segítségével:

$$\sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} \frac{d^{l-j} W^*(s)}{ds^{l-j}} \frac{d^j\,(s-\lambda+\lambda B^*(s))}{ds^j} = \frac{d^l s(1-\varrho)}{ds^l}.$$

Tegyük fel, hogy $l > 1$, mert a magasabb momentumok érdekelnek, így a jobb oldal nullával egyenlő.

$$\frac{d^l W^*(s)}{ds^l}(s-\lambda+\lambda B^*(s)) + l\frac{d^{l-1}W^*(s)}{ds^{l-1}}\left(1-\lambda B^{*'}(s)\right) +$$

$$+\sum_{j=2}^{l}\binom{l}{j}\frac{d^{l-1}W^*(s)}{ds^{l-1}}\lambda\frac{d^jB^*(s)}{ds^j}=0.$$

Tudjuk, hogy $W^{*^{(l)}}(0) := (-1)^l\overline{w^l}$, így

$$l(-1)^{l-1}\overline{w^{l-1}}(1-\varrho)+\lambda\sum_{j=2}^{l}\binom{l}{j}(-1)^{l-j}\overline{w^{l-j}}(-1)^jb_j=0,$$

azaz

$$\overline{w^{l-1}}=\frac{\lambda}{l(1-\varrho)}\sum_{j=2}^{l}\binom{l}{j}\overline{w^{l-j}}b_j.$$

Írjunk most $k=l-1$ és $i=j-1$-et:

$$\overline{w^k}=\frac{\lambda}{1-\varrho}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\overline{w^{k-i}}\frac{b_{i+1}}{i+1}, \tag{22}$$

ahol $\overline{w^0} := 1$. Ezt a formulát *Takács-féle rekurziós képletnek nevezzük.* Ennek segítségével felírhatjuk a várakozási idő első néhány momentumát:

$$\bar{w}=\frac{\lambda b_2}{2(1-\varrho)};$$

$$\overline{w^2}=2(\bar{w}^2+\frac{\lambda b_3}{3(1-\varrho)}.$$

Hogy a rendszerbeli teljes tartózkodási idő hasonló momentumait megkaphassuk, csak az $\tilde{s}=\tilde{w}+\tilde{x}$ összefüggést kell kihasználnunk, hiszen ebből

$$\overline{s^k}=\overline{(\tilde{w}+\tilde{x})^k},$$

amire a binomiális sorfejtést alkalmazva, és felhasználva a várakozási és kiszolgálási idők függetlenségét

$$\overline{s^k}=\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\overline{w^{k-i}}b_i.$$

Tehát a várakozási idő momentumaiból megkaphatjuk a teljes tartózkodási idő momentumait.

Most az $M/G/1$ rendszerbeli teljes tartózkodási idő sűrűségfüggvényének Laplace-transzformáltját azon feltételezés alapján adjuk meg, hogy egy új igény beérkezésekor hány igényt talál a rendszerben. A feltételes eloszlás

$$S\left(y \mid k\right) = P\left(\text{az igény teljes rendszerbeli tartózkodási ideje} \leq y \mid\right.$$

$$\left.\mid k \text{ igényt talál a rendszerben beérkezéskor}\right).$$

Ennek Laplace-Stieltjes transzformáltja

$$S^*\left(s \mid k\right) := \int_0^\infty e^{-sy} dS\left(y \mid k\right).$$

Ha $k = 0$, azaz egyetlen igényt sem talál a rendszerben, akkor csak saját kiszolgálási idejét tölti el, így

$$S^*\left(s \mid 0\right) = B^*\left(s\right).$$

Ha egy igényt talál maga előtt, akkor ezen előző igény hátralévő kiszolgálási idejét és a saját kiszolgálási idejét tölti a rendszerben. Mivel ezek függetlenek, így összegük sűrűségfüggvényének Laplace-transzformáltja az egyes sűrűségfüggvények Laplace-transzformáltjainak szorzatával egyenlő, azaz

$$S^*\left(s \mid 1\right) = \hat{B}^*\left(s\right) B^*\left(s\right).$$

Ha k igényt talál maga előtt a beérkező igény, akkor $k-1$ igény kiszolgálási idejét, a saját kiszolgálási idejét és a beérkezésekor éppen kiszolgálás alatt lévő igény hátralévő kiszolgálási idejét tölti a rendszerben. Ez $k+1$ független valószínűségi változó összege, így

$$S^*\left(s \mid k\right) = \left(B^*\left(s\right)\right)^k \hat{B}^*\left(s\right).$$

Az $S^*(s)$ megadásához csak az $S^*(s \mid k)$-knak azon P_k valószínűségekkel vett súlyozott összegét kell vennünk, hogy beérkezéskor éppen k igény van a rendszerben:

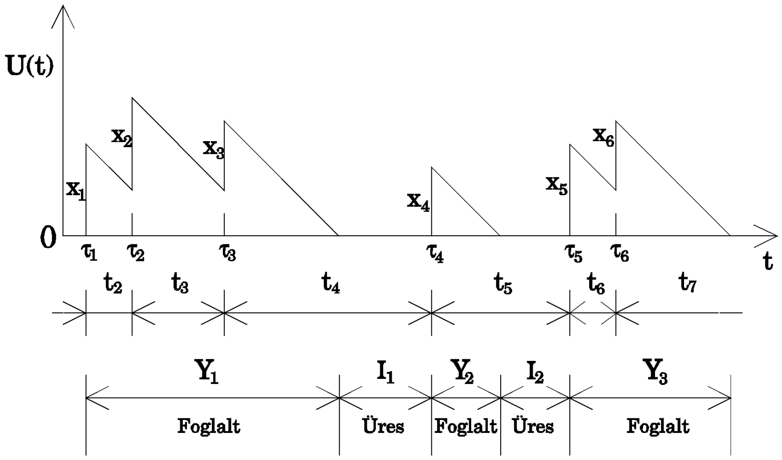
$$S^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} S^*(s \mid k) P_k.$$

Ez az összefüggés azért érdekes, mert néhány rendszerre így könnyebben kaphatjuk meg az $S^*(s)$-et.

III.1.6. A foglaltsági periódusok vizsgálata

Ebben a pontban a sorbanállási rendszereket egy újabb nézőpontból elemezzük. Vezessük be azt az $U(t)$ sztochasztikus folyamatot, amely megadja a t pillanatban a munkahátralékot (restanciát), azaz azt az időtartamot, amely ahhoz szükséges, hogy a rendszer üressé váljon, ha a t pillanat után új igényt nem engedünk be. Ezt néha *"virtuális" várakozási idő*nek is nevezzük, mert érkezési sorrendben történő (FIFO) kiszolgálás esetén megmutatja, mennyi időt kellene várnia a sorban egy (virtuális) igénynek, ha a t pillanatban lépne be. Mi azonban az általánosabb, munkahátralék terminológiát fogjuk használni, mivel az bármilyen kiszolgálási elv esetén érvényes, míg a "virtuális várakozás" kifejezés csak FIFO elv esetén megfelelő. Ha $U(t) > 0$, akkor *foglaltnak* nevezzük a rendszert, ha $U(t) = 0$, akkor *üresnek*.

A 2. ábrát tanulmányozva észrevehetjük, hogy a rendszerben váltakozva jönnek létre foglalt és szabad időszakok, azaz foglaltsági és üresjárati intervallumok. A foglaltsági intervallumok hosszát $Y_1, Y_2, \ldots$, az üresjárati intervallumokét $I_1, I_2, \ldots$ jelöli. Az ábrán a C_1 igény a τ_1 pillanatban lép be a rendszerbe, és x_1 a kiszolgálási ideje. Mivel beérkezése előtt a rendszer üres volt, 0 volt a munkahátralék, de a beérkezéssel egy foglaltsági intervallum kezdődik, és a munkahátralék ezzel x_1-re ugrik, mivel ennyi ideig tartana, amíg a rendszer újra üressé válna, ha új beérkezéseket nem engednénk meg. A τ_1 időpont után a munkahátralék egyenletesen — 1 intenzitással — fogy. A $\tau_2 = \tau_1 + t_2$ időpontban érkezik a C_2 igény a rendszerbe, ezzel a munkahátralék x_2-vel, C_2 kiszolgálási idejével, függőlegesen felugrik. Ezután folytatódik a csökkenés, mivel a kiszolgálás zavartalanul tart. A C_3 igény τ_3 pillanatban érkezik, ez x_3-mal való ugrást eredményez, majd $U(t)$ csökkenése folytatódik egészen a $\tau_1 + Y_1$ időpillanatig, mikor is az összes rendszerben lévő igény kiszolgálása befejeződik. Ezzel véget ér a foglaltsági intervallum és elkezdődik egy új üresjárati intervallum.



2. ábra

Az üresjárat a τ_4 pillanatban ér véget, a C_4 igény beérkezésével. Az általa kezdett foglaltsági intervallum csak egy igényt tartalmaz. Összefoglalva az eddigieket, tehát az $U(t)$ függvénynek függőleges (pozitív) ugrása van minden igénybeérkezéskor, aminek nagysága éppen az adott igény kiszolgálási ideje. Ezután lineárisan (-1 iránytangenssel) csökken, egészen addig, míg $U(t)$ pozitív. Ha elérte a nulla értéket, akkor nulla marad a következő igény beérkezéséig. Ez a sztochasztikus folyamat folytonos állapotterű, diszkrét ugrásokat tartalmazó Markov folyamat, hiszen a hátralévő munkát jelenti, ami a múlttal a jelenen keresztül van csak kapcsolatban.

Vegyük még észre, hogy ha a *kiszolgálási elv* FIFO, akkor az ábrán a távozási pillanatokat az $U(t)$ függvénygörbe csökkenő szakaszainak a vízszintes tengelyig történő meghosszabbításával kaphatjuk meg. Az $U(t)$ *függény értéke független a kiszolgálási elvtől*, csak azt használjuk fel, hogy a kiszolgálóegység foglalt, amíg igény van a rendszerben, és minden igény csak a teljes kiszolgálása után távozzon a rendszerből. Az ilyen rendszert *munkamegőrzëëő rendszernek* nevezzük.

Nézzük most meg közelebbről az üresjárati és foglaltsági intervallumok eloszlását. Feltevésünk szerint ($M/G/1$ rendszerben)

$$A(t) = P(t_n \le t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad t \ge 0,$$

$$B(x) = P(x_n \le x),$$

ahol $A(t)$ és $B(x)$ is független n-től. A minket érdeklő eloszlások

$$F(y) := P(I_n \le y),$$

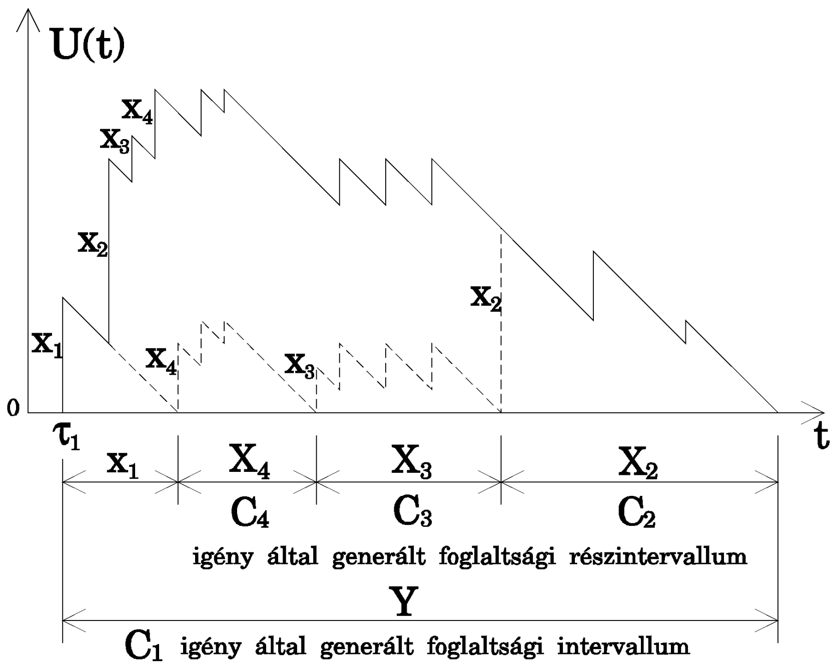
$$G(y) := P(Y_n \le y),$$

az üresjárati és a foglaltsági intervallum eloszülásai.

Kezdjük az üresjárati intervallumok eloszlásával, amit az $M/G/1$ rendszer esetén elég egyszerű meghatározni. Amikor egy foglaltsági intervallum véget ér, akkor ezzel együtt elkezdődik egy üresjárati intervallum, és ez befejeződik, amint egy új igény érkezik. A Markovitás miatt az új igény beérkezéséig tartó idő $A(t)$ eloszlású, így

$$F(y) = 1 - e^{-\lambda y}, \qquad y \geq 0.$$

A foglaltsági intervallumok eloszlását már kissé bonyolultabb meghatározni. A 3. ábra az $U(t)$ munkahátralékot ábrázolja. A $\tau_1$pillanatban érkezik az addig üres rendszerbe a C_1 igény, melynek kiszolgálási ideje x_1, így $\tau_1 + x_1$ a távozási időpontja. C_1 kiszolgálása alatt új igények léphetnek be a rendszerbe, melyekkel folytatódik a foglaltsági intervallum. A könnyebb kezelhetőség érdekében részekre bontjuk a C_1 által generált foglaltsági intervallumot. A Takács Lajos által használt módszert alkalmazzuk, nevezetesen a FIFO kiszolgálási elv helyett LIFO-t használunk, azaz az utolsónak érkezett igényt szolgáljuk ki először. Ezt megtehetjük, hiszen tudjuk, hogy a *foglaltsági intervallum hosszának eloszlása független az igények kiszolgálási sorrendjétől.* Így tehát C_1 távozásakor a C_4 kerül a kiszolgálócsatornába, C_2-t és C_3-at időlegesen úgy tekintjük, mintha nem lennének a rendszerben. Emiatt a C_4 kiszolgálásának kezdőpillanatát úgy tekinthetjük, mintha *új foglaltsági intervallum* — tulajdonképpen *foglaltsági részintervallum* — kezdődne. Ennek a részintervallumnak a hossza X_4, az az idő, amíg a C_4-nek és a C_4 kiszolgálása alatt beérkezett igényeknek a kiszolgálása tart. Példánkban az X_4 intervallum alatt a C_4, C_6, C_5 igényeket szolgálják ki. X_4 végén, a $\tau + x_1 + X_4$ pillanatban a LIFO elv szerint — folytatva a rekurziót — a C_3 igény kiszolgálása kezdődik el. Az általa generált foglaltsági részintervallum hosszúsága X_3, ami alatt a C_3, C_7, C_8, C_9 igények kerülnek kiszolgálásra. Ennek végeztével a C_2 igény kerül sorra az előzőekhez hasonlóan, és utána véget is ér a C_1 által generált foglaltsági intervallum.



3. ábra

A foglaltsági intervallum felbontása

A 3. ábrán látszik, hogy egy foglaltsági részintervallum grafikonja megegyezik a foglaltsági intervallum grafikonjával, egy konstanssal eltolva, ami éppen azon igények kiszolgálási idejének összegével egyezik meg, amelyek C_1 kiszolgálása alatt érkeztek, és még nem volt lehetőségük a saját foglaltsági részintervallumuk generálására.

Vegyük észre, hogy a foglaltsági részintervallumok statisztikusan éppen úgy viselkednek, mint a teljes foglaltsági intervallum, hiszen az összes részintervallumot is egy-egy igény nyitja meg, ezek kiszolgálási ideje azonos eloszlású és egymástól függetlenek, valamint minden részintervallum addig tart, amíg a rendszer be nem pótol¡ja az elmaradt munkát, azaz az $U(t)$ nullává nem válik. Tehát az X_k valószínűségi változók független, azonos eloszlásúak és eloszlásuk megegyezik Y eloszlásával. Ezek miatt felírhatjuk, hogy az Y hosszúságú foglaltsági intervallum $1 + \tilde{v}$ számú valószínűségi változó összegével egyenlő, ahol a $\tilde{v}$ valószínűségi változó a C_1 kiszolgálása alatt beérkezett igények számával egyenlő. Az első a C_1 kiszolgálási ideje, a többi a foglaltsági részintervallumok hossza, melyek eloszlása azonos Y eloszlásával. Így

$$Y = x_1 + X_{\tilde{v}+1} + X_{\tilde{v}} + \cdots + X_3 + X_2.$$

Tudjuk, hogy x_1 $B(x)$ eloszlású és X_k $G(y)$ eloszlású. Intuitíven érezhető, hogy a foglaltsági intervallumok eloszlása és a kiszolgálási idő eloszlása kapcsolatban állnak egymással. Hogy többet megtudjunk erről, számoljuk ki a következő feltételes transzformáltakat:

$$E\left(e^{-sY} \mid x_1 = x, \tilde{v} = k\right) = E\left(e^{-s(x+X_{k+1}+\cdots+X_2)}\right) =$$

$$= E\left(e^{8-sx} e^{-sX_{k+1}} \cdots e^{-sX_2}\right).$$

A foglaltsági részintervallumok időtartamai egymástól függetlenek, ezért

$$E\left(e^{-sY} \mid x_1 = x, \tilde{v} = k\right) = E\left(e^{-sx}\right) E\left(e^{-sX_{k+1}}\right) \cdots E\left(e^{-sX_2}\right).$$

Mivel x állandó, így $E\left(e^{-sx}\right) = e^{-sx}$, és mert a foglaltsági részintervallumok azonos eloszlásúak, melynek Laplace-Stieltjes transzformáltja $G^*(s)$, ezért

$$E\left(e^{-sY} \mid x_1 = x, \tilde{v} = k\right) = e^{-sx}(G^*(s))^k.$$

Mivel $\tilde{v}$ az x hosszúságú intervallum alatti beérkezések számát jelenti, ezért $\tilde{v}$ Poisson-eloszlású, várható értéke λx. Tüntessük el a $\tilde{v}$ szerinti feltételt:

$$E\left(e^{-sY} \mid x_1 = x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} E\left(e^{-sY} \mid x_1 = x, \tilde{v} = k\right) P\left(\tilde{v} = k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sx} \left(G^*\left(s\right)\right)^k \frac{\left(\lambda x\right)^k}{k!} e^{-\lambda x} = e^{-x\left(s+\lambda-\lambda G^*\left(s\right)\right)}.$$

Az x_1 szerinti feltételt $B\left(x\right)$ szerinti integrálással küszöböljük ki, így azt kapjuk, hogy

$$G^*\left(s\right) = \int_0^{\infty} e^{-x\left(s+\lambda-\lambda G^*\left(s\right)\right)} dB\left(x\right).$$

Ez éppen a kiszolgálási idő sűrűségfüggvényének Laplace-transzformáltja az $s + \lambda - \lambda G^*\left(s\right)$ helyen, azaz

$$G^*\left(s\right) = B^*\left(s + \lambda - \lambda G^*\left(s\right)\right).$$

Ezt a függvényegyenletet általában nem lehet invertálni, viszont numerikusan megoldható tetszőleges s értékre a következő iterációval:

$$G^*_{n+1}\left(s\right) = B^*\left(s + \lambda - \lambda G^*_n\left(s\right)\right), \tag{23}$$

ha $0 \le G^*_0\left(s\right) \le 1$. Ha $\varrho = \lambda \bar{x} < 1$, akkor az eljárással a $G^*\left(s\right)$-et kapjuk meg, így megkísérelhetjük a kapott értékek numerikus inverzióját. (Lásd Kleinrock (1979))

(23) alapján a foglaltsági intervallumok eloszlásának momentumait is meg tudjuk határozni. Legyen

$$g_k := E\left(Y^k\right),$$

akkor $g_k = (-1)^k G^{*^{(k)}}(0)$ és $\overline{x^k} = (-1)^k B^{*^{(k)}}(0)$,

$$g_1 = -G^{*^{(1)}}(0) = -B^{*^{(1)}}(0)\frac{d}{ds}\left(s+\lambda-\lambda G^*(s)\right)\bigg|_{s=0} =$$

$$= -B^{*^{(1)}}(0)\left(1-\lambda G^{*^{(1)}}(0)\right),$$

ahol felhasználtuk, hogy ha $s=0$, akkor $s+\lambda-\lambda G^*(s)=0$. Így

$$g_1 = \bar{x}\left(1+\lambda g_1\right).$$

Mivel $\varrho = \lambda\bar{x}$, a következőt kapjuk:

$$g_1 = \frac{\bar{x}}{1-\varrho}.$$

Két dolgot vegyünk észre. Egyrészt, hogy ez csak λ és $\bar{x}$ függvénye, másrészt, összehasonlítva ezt az ismert $M/M/1$ rendszer paramétereivel, azt tapasztaljuk, hogy az *$M/G/1$-beli foglaltsági intervallumok hosszának várható értéke azonosan számolható az $M/M/1$-ben az igények rendszerben eltöltött átlagos tartózkodási idejével.*

A második momentumhoz használjuk fel az ismert összefüggéseket.

$$\begin{aligned}
g_2 =&G^{*^{(2)}}(s) = \frac{d}{ds}\left(B^{*^{(1)}}\left(s+\lambda-\lambda G^*(s)\right)\right)\left(1-\lambda G^{*^{(1)}}(s)\right)\bigg|_{s=0} =\\
=&B^{*^{(2)}}(0)\left(1-\lambda G^{*^{(1)}}(0)\right)^2 + B^{*^{(1)}}(0)\left(-\lambda G^{*^{(2)}}(0)\right) =\\
=&\overline{x^2}\left(1-\lambda g_1\right)^2 + \bar{x}\lambda g_2.
\end{aligned}$$

Innen

$$g_2 = \frac{\overline{x^2}\left(1-\lambda g_1\right)^2}{1-\lambda\bar{x}} = \frac{\overline{x^2}\left(1+\frac{\lambda\bar{x}}{1-\varrho}\right)^2}{1-\varrho},$$

azaz

$$g_2 = \frac{\overline{x^2}}{(1-\varrho)^3}.$$

Ha tovább számolunk, megfigyelhetjük, hogy a magasabb momentumok nevezőjében az $(1-\varrho)$ kitevője nő, és ez a meghatározó a momentumok viselkedésében, ha $\varrho \to 1$.

Számoljuk ki még a foglaltsági intervallum hosszának szórásnégyzetét:

$$\sigma_g^2 = g_2 - g_1^2 = \frac{\overline{x^2}}{(1-\varrho)^3} - \frac{(\bar{x})^2}{(1-\varrho)^2} = \frac{\sigma_b^2 + \varrho(\bar{x})^2}{(1-\varrho)^3},$$

adódik, ahol σ_b^2 a kiszolgálási idő eloszlásának szórásnégyzete.

Legyen N_{fi} a foglaltsági intervallum alatt kiszolgált igények száma. Vizsgáljuk meg most ennek az eloszlását,

$$f_n := P\left(N_{fi} = n\right).$$

Ezen diszkrét eloszlás generátorfüggvénye legyen

$$H(z) := E\left(z^{N_{fi}}\right) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n z^n.$$

Az $n = 0$ tag azért hiányzik, mert egy foglaltsági intervallum alatt legalább egy igényt ki kell szolgálni. Láttuk, hogy a $\tilde{v}$ valószínűségi változó jelenti az egy igény kiszolgálási ideje alatt a rendszerbe érkező igények számát, és ennek $V(z)$ generátorfüggvényére levezettük a (8) relációt, azaz

$$V(z) = B^*(\lambda - \lambda z)$$

egyenletet. A foglaltsági intervallum hossza meghatározásához hasonlóan most képezzük a $\tilde{v} = k$ feltételek melletti feltételes valószínűségeket. Ezek mindegyike egy foglaltsági részintervallumot generál, és az ezekben kiszolgált igények számának eloszlása szintén $\{f_n\}$. Jelölje N_i az i-edik foglaltsági részintervallum alatt kiszolgált igények számát. Ebből

$$E\left(z^{N_{f_i}} \mid \tilde{v} = k\right) = E\left(z^{1+N_1+\cdots+N_k}\right) = z \prod_{i=1}^{k} E\left(z^{N_i}\right).$$

mivel az N_i-k független, azonos eloszlásúak. Mivel minden N_i eloszlása ugyanaz, mint N_{f_i} eloszlása, ezért

$$E\left(z^{N_{f_i}} \mid \tilde{v}=k\right)=z(H(z))^k.$$

Ennek a felhasználásával a feltételes várható érték tétele alapján

$$H(z)=\sum_{k=0}^{\infty} E\left(z^{N_{f_i}} \mid \tilde{v}=k\right) P(\tilde{v}=k)=z\sum_{k=0}^{\infty} P(\tilde{v}=k)(H(z))^k= \\ =zV(H(z)).$$

Végül (8)¡ szerint felírhatjuk, hogy

$$H(z)=zB^*(\lambda-\lambda H(z)).$$

Ez meglehetősen hasonlít a foglaltsági intervallum hosszának eloszlásánál kapott eredményre. Könnyen kiszámolhatjuk belőle a foglaltsági intervallumok alatt kiszolgált igények számának h_k momentumait. A Laplace-transzformált és a generátorfüggvény tulajdonságai miatt

$$h_1=H^{(1)}(1)=\left. zB^{*^{(1)}}(\lambda-\lambda H(z))\left(-\lambda H^{(1)}(z)\right)+B^*(\lambda-\lambda H(z))\right|_{z=1}=$$

$$=B^{*^{(1)}}(0)\left(-\lambda H^{(1)}\right)+B^*(0),$$

mivel $H(1)=1$. Tehát

$$h_1=\lambda\bar{x}h_1+1,$$

azaz

$$h_1=\frac{1}{1-\varrho}.$$

Továbbá

$$H^{(2)}(1)=h_2-h_1,$$

$$H^{(2)}(1) = \left(B^{*^{(1)}}(\lambda - \lambda H(z)) + zB^{*^{(2)}}(\lambda - \lambda H(z))\left(-\lambda H^{(1)}(z)\right)\right) \times$$

$$\times \left(-\lambda H^{(1)}(z)\right) + zB^{*^{(1)}}(\lambda - \lambda H(z))\left(-\lambda H^{(2)}(z)\right) +$$

$$+ B^{*^{(1)}}(\lambda - \lambda H(z))\left(-\lambda H^{(1)}(z)\right)\Big|_{z=1} =$$

$$= \left(B^{*^{(1)}}(0) + B^{*^{(2)}}(0)\left(-\lambda H^{(1)}(1)\right)\right)\left(-\lambda H^{(1)l}(1)\right) +$$

$$+ B^{*^{(1)}}(0)\left(-\lambda H^{(2)}(1)\right) + B^{*^{(1)}}(0)\left(-\lambda H^{(1)}(1)\right) =$$

$$= \left(-\bar{x} - \frac{\overline{x^2}\lambda}{1-\varrho}\right)\frac{-\lambda}{1-\varrho} + \lambda\bar{x}H^{(2)}(1) + \frac{\lambda\bar{x}}{1-\varrho} =$$

$$= \frac{2\lambda\bar{x}}{1-\varrho} + \frac{\lambda^2\overline{x^2}}{(1-\varrho)^2} + \lambda\bar{x}H^{(2)}(1),$$

azaz

$$h_2 - h_1 = \frac{2\varrho(1-\varrho) + \lambda^2\overline{x^2}}{(1-\varrho)^2} + \varrho(h_2 - h_1),$$

$$h_2(1-\varrho) = \frac{2\varrho(1-\varrho) + \lambda^2\overline{x^2}}{(1-\varrho)^2} + 1,$$

$$h_2 = \frac{2\varrho(1-\varrho) + \lambda^2\overline{x^2}}{(1-\varrho)^3} + \frac{1}{1-\varrho}.$$

A kiszolgált igények szórásnégyzete:

$$\sigma_h^2 = h_2 - h_1^2 = \frac{2\varrho(1-\varrho) + \lambda^2\overline{x^2}}{(1-\varrho)^3} + \frac{1}{1-\varrho} - \frac{1}{(1-\varrho)^2} =$$

$$= \frac{\lambda^2 \overline{x^2}}{(1-\varrho)^3} + \frac{2\varrho\,(1-\varrho) + (1-\varrho)^2 - (1-\varrho)}{(1-\varrho)^3},$$

azaz

$$\sigma_h^2 = \frac{\varrho\,(1-\varrho) + \lambda^2 \overline{x^2}}{(1-\varrho)^3}.$$

III.1.7. A Takács-féle integrodifferenciál-egyenlet

Ebben a fejezetben az $U(t)$ munkahátralékot vizsgáljuk meg kissé közelebbről. Korábban megállapítottuk, hogy az $U(t)$ folytonos idejű, folytonos állapotterű, az igények beérkezési pillanataiban diszkrét ugrásokat tartalmazó Markov-folyamat. Most az $U(t)$ eloszlásfüggvényére vezetünk le egy összefüggést, a $t = 0$ pillanatban adott kezdeti érték mellett. Legyen

$$F(w,t) = P\left(U(t) \leq w \mid U(0) = w_0\right),$$

azaz annak a valószínűsége, hogy a t időpontban érkező „virtuális” igény $U(t) \leq w$ ideig tartózkodik a rendszerben, ha tudjuk, hogy $U(0) = w_0$. $F(w, t + \Delta t)$-re szeretnénk egy kifejezést kapni $F(w,t)$ és $F(w + \Delta t, t)$ segítségével.
Az $U(t + \Delta t) \leq w$ esemény a t pillanatbeli állapotból úgy valósulhat meg, ha

- vagy a t pillanatban a munkahátralék nem nagyobb $(w + \Delta t)$-nél és nem érkezik igény a Δt időközben, aminek a valószínűsége az elemi sorbanállási elméletből jól ismert: $1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$;
- vagy egyetlen beérkezés fordul elő a Δt intervallumban — ennek valószínűsége $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ — úgy, hogy az ez által hozott munka és a t pillanatbeli munkahátralék összege nem haladja meg w-t. Az $x < U(t) \leq x + dx$ valószínűségét így írhatjuk fel:

$$P\left(x < U(t) \leq x + dx\right) = \left(\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\right) dx := f(x,t)\, dx.$$

Annak a valószínűsége pedig, hogy a kiszolgálási idő nem nagyobb, mint x, éppen $B(x)$. Mivel egy igény kiszolgálási ideje független a munkahátraléktól, annak a valószínűsége, hogy az új igény munkaszükségletével együtt sem haladja meg az $U(t)$ a w-t, szorzatként írható

$$\left(\frac{\partial F(x,t)}{\partial x}\right) dx B(w-x)$$

alakban. A teljes valószínűség tétele alapján felírhatjuk, hogy
(24)

$$F(w,t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t) F(w+\Delta t,t) + \lambda\Delta t \int_0^w B(w-x) \frac{\partial F(x,t)}{\partial x} dx + \\ + o(\Delta t).$$

Az eloszlásfüggvényt az első változója szerint sorbafejtve (csak a lineáris tagot véve)

$$F(w+\Delta t,t) = F(w,t) + \frac{\partial F(w,t)}{\partial w}\Delta t + o(\Delta t).$$

Használjuk ezt fel (24)-ben:

$$F(w,t+\Delta t) = F(w,t) + \frac{\partial F(w,t)}{\partial w}\Delta t - \lambda\Delta t \left(F(w,t) + \frac{\partial F(w,t)}{\partial w}\Delta t\right) + \\ + \lambda\Delta t \int_0^w B(w-x)\, d_x F(x,t) + o(\Delta t).$$

Ezen egyenletnek ki kell elégítenie a következő feltételeket:

$$F(w,0) = 1,\ \forall w\text{-re és } F(\infty,t) = 1,\ \forall t\text{-re.}$$

Most mindkét oldalból vonjunk ki $F(w,t)$-t, osszunk Δt-vel és képezzük a $\Delta t \to 0$ határátmenetet. Így kapjuk az $U(t)$ eloszlásfüggvényére vonatkozó *Takács-féle integrodifferenciál-egyenletet*:

$$(25) \qquad \frac{\partial F(w,t)}{\partial t} = \frac{\partial F(w,t)}{\partial w} - \lambda F(w,t) + \lambda \int_0^w B(w-x)\, d_x F(x,t).$$

Takács ezt az összefüggést inhomogén Poisson-folyamatra ($< a = \lambda(t)$) is levezette. Ekkor majdnem minden $w \geq 0$ és $t \geq 0$-ra fennáll az egyenlet.*

A Takács-féle integrodifferenciál-egyenletből több információt is levezethetünk. Vegyük a (25)-nek az első változóX, w szerinti Laplace- Stieltjes transzformáltját:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F^* (r,t)}{\partial t} = F^* (r,t) - F\left(0^+, t\right) - \frac{\lambda F^* (r,t)}{r} + \lambda \frac{F^* (r,t)\, B^* (r)}{r}.$$

A Függelék alapján

$$\int_0^\infty F(w,t)\, e^{-rw} dw = \frac{F^* (r,t) + F(0^-, t)}{r},$$

és hasonlóan

$$\int_0^\infty B(w)\, e^{-rw} dw = \frac{B^* (r) + B(0^-)}{r}.$$

Mivel a munkahátralék és a kiszolgálási idő nemnegatív valószínűségi változók, $F(0^-, t) = B(0^-) = 0$. Az integrodifferenciál-egyenlet integrált tartalmazó tagjában a $B(w)$ és $\frac{\partial F(w,t)}{\partial w}$ konvolúciója szerepel, ennek a transzformáltja pedig a transzformáltak szorzata.

Még a $-F(0^+, t)$ tag szorul magyarázatra. A $\frac{\partial F(w,t)}{\partial w}$ transzformáltja $F^* (r,t)$, de ez magában foglalja az $F(0^+, t)$ tagot is, viszont a Takács-féle integrodifferenciál-egyenlet ezt nem tartalmazza ($w = 0$-ra nincs értelme), ezért kivonjuk $F^* (r,t)$-ből.

Ezek alapján kaptuk tehát a (26)-ot.

---

* Csak azon w és t értékekre nem áll fenn, melyekre $\frac{\partial F(w,t)}{\partial w}$ nem létezik, például $w = 0$-ban.

Ha az $F^*(r,t)$-t a második változó szerint is transzformáljuk, a következőképpen számolunk. Az

$$F^{**}(r,s) := \int\limits_0^\infty e^{-st} F^*(r,t)\,dt$$

definíciót felhasználva a (26)-ból és a derivált Laplace-transzformáltjára vonatkozó összefüggésből

$$\int\limits_0^\infty e^{-st}\frac{\partial F^*(r,t)}{\partial t}dt = \int\limits_0^\infty e^{-st}\left(r-\lambda+\lambda B^*(r)\right)F^*(r,t)\,dt-$$

$$-\int\limits_0^\infty e^{-st} rF\left(0^+,t\right)dt,$$

$$sF^{**}(r,s) - F^*\left(r,0^-\right) = \left(r-\lambda+\lambda B^*(r)\right)F^{**}(r,s) - rF_0^*(s)\,,$$

ha az

$$F_0^*(s) := \int\limits_0^\infty e^{-st} F\left(0^+,t\right)dt$$

definíciót használjuk az utolsó tagban. Innen

$$F^{**}(r,s) = \frac{F^*(r,0^-) - rF_0^*(s)}{s-r+\lambda-\lambda B^*(r)}.$$

Ezen függvények stacionárius megoldását is megvizsgáljuk. Meg lehet mutatni, hogy az $F(w,t)$-nek $t\to\infty$ esetén létezik az $F(w,0)$ kezdeti értéktől független határfüggvénye, ha $\varrho<1$, legyen $F(w)=\lim\limits_{t\to\infty}F(w,t)$. A Takács-féle integrodifferenciál-egyenletből a bal oldal $t\to\infty$ esetén nullához tart, így

$$\frac{dF(w)}{dw} = \lambda F(w) - \lambda\int\limits_0^w B(w-x)\,dF(x)\,. \tag{27}$$

Továbbá ha $\varrho < 1$, akkor $F^*(r) := \lim_{t\to\infty} F^*(r,t)$ is létezik és független a kezdeti eloszlástól. Tekintsük a (27) Laplace-Stieltjes transzformáltját, és a (26) levezetéséhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$F^*(r) - F\left(0^+\right) = \frac{\lambda F^*(r)}{r} - \frac{\lambda B^*(r)\, F^*(r)}{r},$$

ahol $F\left(0^+\right) = \lim_{t\to\infty} F\left(0^+, t\right)$, azaz annak a valószínűsége, hogy a munkahátralék mennyisége nulla. Ezután

$$F^*(r) = \frac{rF\left(0^+\right)}{r - \lambda + b\lambda B^*(r)}.$$

Tudjuk, hogy $F^*(0) = \lim_{t\to\infty} F^*(0,t) = 1$, ebből a L'Hospital szabályt használva

$$1 = \lim_{r\to 0} \frac{rF\left(0^+\right)}{r - \lambda + \lambda B^*(r)} = \lim_{r\to 0} \frac{F\left(0^+\right)}{1 + \lambda \frac{dB^*(r)}{dr}} = \frac{F\left(0^+\right)}{1 - \lambda \bar{x}},$$

azaz $F\left(0^+\right) = 1 - \varrho$, annak a valószínűsége, hogy a rendszer szabad, ami összhangban van az $F\left(0^+\right)$-ra tett korábbi megállapításainkkal.

Végül adódik, hogy

$$F^*(r) = \frac{r(1-\varrho)}{r - +\lambda B^*(r)}.$$

Emlékezzünk vissza a várakozási időre vonatkozó P-H transzformált egyenletre

$$W^*(r) = \frac{r(1-\varrho)}{r - \lambda + \lambda B^*(r)}.$$

Így $F^*(r) = W^*(r)$, azaz stacionárius esetben a hátralévő kiszolgálási idő sűrűségfüggvényének és a várakozási idő sűrűségfüggvényének Laplace-transzformáltja megegyezik.

III.2. Az $< m/M/G/1 >$ rendszer

Ebben a részben Takács Lajos (1957, 1962) nevezetes modelljét ismertetjük, amikor a gépek működési idejei egymástól független μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók, az egyes javítási idők pedig egymástól független, ugyanazon $F(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változók, α várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel.

$\varphi(s)$ jelölje az F Laplace-Stieltjes transzformáltját. Az $\eta(t)$ valószínűségi változó jelölje a t időpontban egyidejűleg működő gépek számát. Ha $\eta(t) = k$, $(k = 0, 1, \ldots, m)$ akkor azt mondjuk, hogy a rendszer k állapotban van. Jelölje rendre $\tau_1, \tau_2 \ldots$ azokat az időpontokat, amikor a „szerelő" befejez egy javítást, és legyen $\eta(\tau_n - 0) = \eta_n$. Legyen továbbá

$$\lim_{t\to\infty} P\{\eta(t) = k\} = \tilde{P}_k, \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

és

$$\lim_{t\to\infty} P\{\eta_n = k\} = P_k, \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Jelölje a $\chi(t)$ valószínűségi változó a t időpontban (esetleg) folyamatban lévő javításnál a t időponttól a javítás befejezéséig tartó időtartamok hosszát. Legyen

$$\lim_{t\to\infty} P\{\chi(t) \le x \mid \eta(t) = k\} = \tilde{F}_k(x), \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Az $\{\eta(t), \chi(t)\}$ változópár Markov-folyamat. Látni fogjuk, hogy a kezdeti eloszlásoktól függetlenül léteznek az $\{\eta(t), \chi(t)\}$ változók $t \to \infty$-re vett eloszlásai. Ezek szerint definiálhatjuk a stacionárius folyamat fogalmát a következőképpen: feltesszük, hogy $\eta(0)$ eloszlása $\tilde{P}_k$ és $\chi(0)$ eloszlásfüggvénye $\eta(0) = k$, $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ feltétel mellett $\tilde{F}_k(x)$.

A következőkben megadjuk a $\{P_k\}$ és $\left\{\tilde{P}_k\right\}$ valószínűségeloszlás explicit alakját, továbbá stacionárius esetre a várakozási idő eloszlásfüggvényét és várható értékét.

III.2.1. A határeloszlások meghatározása

III.2.1.1. A $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás meghatározása

1. Tétel.

Az $\eta(0)$ változó kezdeti eloszlásától függetlenül létezik a $\{P_k\}$ határeloszlás és fennáll

$$P_k = \sum_{r=k}^{m-1} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r, \tag{1}$$

ahol

$$B_r = C_r \frac{\sum\limits_{j=r}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}{\sum\limits_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}, \tag{2}$$

ahol $C_0 = 1$ és $r = 1, 2, \ldots, m-1$ -re

$$C_r = \prod_{i=1}^{r} \frac{\varphi(i\mu)}{1 - \varphi(i\mu)}. \tag{3}$$

Bizonyítás. Látható, hogy az $\{\eta_n\}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ valószínűségi változók sorozata Markov-láncot alkot

$$P\{\eta_{n+1} = k \mid \eta_n = j\} = p_{jk}$$

átmenetvalószínűségekkel, ahol $j = 0, 1, \ldots, m-2$ -re

$$p_{jk} = \binom{j+1}{k} \int\limits_{o}^{\infty} e^{-k\mu x} \left(1 - e^{-\mu x}\right)^{j+1-k} dF(x),$$

és

$$p_{m-1,k} = p_{m-2,k} \ .$$

Ezt a következőkkel indokolhatjuk: az $\{\eta_n = j\}$ esemény azt jelenti, hogy τ_n-ben befejeződik egy javítás, így τ_n-ben a rendszer $j+1$ állapotban van, feltéve, hogy a τ_n pillanatban nem romlott el gép. Ahhoz, hogy a rendszer k állapotba kerüljön az szükséges, hogy a $[\tau_n, \tau_{n+1}]$ időintervallumban pontosan $(j+1-k)$ gép álljon le. A leálló gépek kiválasztása $\binom{j+1}{k}$-féleképpen történhet.

Az $\{\eta_n\}$ Markov-lánc ergodikus, mert az állapottér elemeinek száma véges. Emiatt az η_1 valószínűségi változó kezdeti eloszlásától függetlenül léteznek a

$$\lim_{n\to\infty} P\{\eta_n = k\} = P_k, \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

határvalószínűségek, melyek a

$$P_k = \sum_{j=k-1}^{m-1} p_{jk} P_j, \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1) \tag{4}$$

egyenletrendszer

$$\sum_{k=0}^{m-1} P_k = 1 \tag{5}$$

feltételnek eleget tevő megoldásai.

A (4) és (5) egyenletrendszer megoldására vezessük be az

$$U(z) = \sum_{k=0}^{m-1} P_k z^k \tag{6}$$

generátorfüggvényt. Ekkor $U(z)$ a következő alakra hozható:

$$U(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=k-1}^{m-2} p_{jk} P_j z^k + \sum_{k=0}^{m-1} p_{m-1,k} P_{m-1} z^k = \tag{7}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=k-1}^{m-2} \binom{j+1}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x} \left(1-e^{-\mu x}\right)^{j+1-k} dF(x) \cdot P_j z^k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x} \left(1-e^{-\mu x}\right)^{m-1-k} dF(x) \cdot P_{m-1} z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-2} P_k \int_0^\infty \left(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x}\right)^{k+1} dF(x) +$$

$$+ P_{m-1} \int_0^\infty \left(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x}\right)^{m-1} dF(x) =$$

$$= \int_0^\infty \sum_{k=0}^{m-2} \left(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x}\right) P_k \left(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x}\right)^k dF(x) +$$

$$+ \int_0^\infty \Big\{ \left(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x}\right) P_{m-1} \left(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x}\right)^{m-1} +$$

$$+ \left(e^{-\mu x}-ze^{-\mu x}\right) P_{m-1} \left(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x}\right)^{m-1} \Big\} dF(x) =$$

$$= \int_0^\infty \left(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x}\right) U\left(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x}\right) dF(x) +$$

$$+ (1-z) P_{m-1} \int_0^\infty e^{-\mu x} \left(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x}\right)^{m-1} dF(x).$$

Vezessük be most a $\{P_k\}$ határeloszlás

$$(8) \qquad B_r = \sum_{k=r}^{m-1} \binom{k}{r} P_k$$

binomiális momentumait. Definíció szerint

$$(9) \qquad B_r = \frac{1}{r!}\left(\frac{d^r U(z)}{dz^r}\right)_{z=1}.$$

(5) miatt $B_0 = 1$ és (7)-ből r-szeres differenciálással kapjuk, hogy

$$(10) \qquad B_r = \left[B_r + B_{r-1} - \binom{m-1}{r-1} P_{m-1}\right] \int_0^\infty e^{-r\mu x} dF(x),$$

$$(r = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Legyen

$$\varepsilon_r = \varphi(r\mu) = \int_0^\infty e^{-r\mu x} dF(x).$$

Ekkor (10) a következő alakban írható:

$$(11) \qquad B_r = \frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r} B_{r-1} - \binom{m-1}{r-1} \frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r} B_{m-1}, \quad r = 1, \ldots, m-1$$

ugyanis

$$P_{m-1} = B_{m-1}.$$

A (11)-es egyenletrendszer a $\{B_r\}$ ismeretlenekre nézve egy változó együtthatós lineáris differenciaegyenletrendszer. Az

$$f(r+1) = B_r,$$

$$p(r) = \frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r},$$

$$V_r = \binom{m-1}{r-1} \frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r} B_{m-1}$$

jelölések segítségével az egyenletrendszer

$$f(r+1) - p(r) f(r) = V(r) \qquad (r \geq 0 \text{ egész szám})$$

alakba írható át.

Legyen $u(r) = \frac{f(r)}{y(r)}$, ahol $y(0) = 1$ és $y(r) = p(0) \cdot p(1) \cdots p(r-1)$.
A $\Delta u(r) = u(r+1) - u(r)$ jelölés mellett

$$\Delta u(r) = \frac{f(r+1)}{p(0) \cdot p(1) \cdots p(r)} - \frac{f(r)}{p(0) \cdot p(1) \cdots p(r-1)} \cdot \frac{p(r)}{p(r)} = \frac{V(r)}{y(r+1)}.$$

Ez alapján $u(r)$-re a következő összefüggés írható fel:

$$u(r) = u(0) + \sum_{j=1}^{r} \frac{V(j)}{y(r+1)}.$$

Ekkor

$$f(r) = y(r) \left[f(0) + \sum_{j=0}^{r} \frac{V(j)}{y(r+1)} \right].$$

A (11) egyenletrendszer megoldása tehát

$$B_r = C_r \left[1 - B_{m-1} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j} \right],$$

ahol $C_0 = 1$ és

$$C_r = \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2} \cdots \frac{\varepsilon_r}{1-\varepsilon_r}.$$

Ha $r = m-1$, akkor

$$B_{m-1} = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}},$$

ennek felhasználásával

$$B_r = C_r \frac{\sum\limits_{j=r}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}{\sum\limits_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}.$$

A P_k valószínűségek kifejezhetők a B_r binomiális momentumokkal a (8)-as képlet segítségével. Szorozzuk meg a (8)-as egyenletek mindkét oldalát $(-1)^{r-k}\binom{r}{k}$-val, és az így kapott egyenleteket adjuk össze. Azt kapjuk, hogy

$$P_k = \sum_{r=k}^{m-1} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r,$$

ezzel az állítást bebizonyítottuk.

III.2.1.2. A $\left\{\tilde{P}_k\right\}$ valószínűségeloszlás meghatározása

2. Tétel.

Ha $\alpha < \infty$, akkor az $\eta(0)$ valószínűségi változó kezdeti eloszlásától függetlenül létezik a $\left\{\tilde{P}_k\right\}$ határeloszlás és fennáll:

$$\tilde{P}_k = \sum_{r=k}^{m} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \tilde{B}_r, \tag{12}$$

ahol $\tilde{B}_r$ a $\left\{\tilde{P}_k\right\}$ valószínűségeloszlás r-edik binomiális momentuma, melyre teljesül $\tilde{B}_0 = 1$ és $r = 1, 2, \ldots, m$-re

$$\tilde{B}_r = \frac{mC_{r-1}}{r} \frac{\sum\limits_{j=r-1}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}{1 + m\alpha\mu \sum\limits_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}, \tag{13}$$

ahol C_j jelentése változatlan.

Néhány segédtételre lesz szükségünk a bizonyításhoz.

1. Segédtétel.

Jelölje $\tilde{M}(t)$ a $(0,t)$ időközben előforduló $m-1 \to m$ átmenetek várható számát. Tetszőleges $h>0$-re fennáll:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{M}(t+h)-\tilde{M}(t)}{h} = \frac{m\mu}{1+m\alpha\mu \sum\limits_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}. \tag{14}$$

A segédtétel a következőképpen igazolható. Tekintsük az $\{\eta_n\}$ Markov-láncnál az $m-1$ állapotot. Az $m-1$ visszatérő állapot és a visszatérésig megtett lépések számának várható értéke $1/p_{m-1}$. Két egymást követő $m-1 \to m$ átmenet között eltelt időtartam a „szerelő” szempontjából egy szünetből és egy javítási periódusból tevődik össze. A szünet hosszának várható értéke $1/m\mu$, a javítási periódus hosszának várható értéke α/P_{m-1}, ahol α egy javítás átlagos időtartama, az egy javítási periódusban végzett javítások várható száma $1/P_{m-1}$. Az egymást követő $m-1 \to m$ átmenetek között eltelt időtartamok egyforma eloszlású független valószínűségi változók, közös várható értékük a fentiek szerint a $P_{m-1}=B_{m-1}$ egyenlőség figyelembe vételével

$$\frac{1}{m\mu}+\frac{\alpha}{P_{m-1}} = \frac{1}{m\mu}\left[1+m\alpha\mu\sum_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}\right].$$

(14) bal oldala viszont egyenlő ennek a várható értéknek a reciprok értékével. D. Blackwell tétele – az I. fejezetbben említett 6. Tétel – alapján létezik a következő határérték, és fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{M}(t+h)-\tilde{M}(t)}{h} = \frac{m\mu P_{m-1}}{m\alpha\mu+P_{m-1}},$$

ami megegyezik (14)-gyel.

2. Segédtétel.

Jelölje $M(t)$ a $(0,t)$ időközben előforduló τ_n időpontok várható számát, azaz a $(0,t)$ időközben befejeződő javítások várható számát. Tetszőleges $h>0$-ra fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t+h)-M(t)}{h}=\frac{m\mu\sum\limits_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}{1+m\alpha\mu\sum\limits_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}. \tag{15}$$

A segédtétel bizonyítását egy jelölés bevezetésével kezdjük. Jelölje $M_n(t)$ a $(0,t)$ időközben befejeződő olyan javítások várható számát, amelyek egy javítási periódus n-edik javítását követik. Ekkor $M(t)$ a következő alakba írható:

$$M(t)=\sum_{n=0}^{\infty}M_n(t). \tag{16}$$

Az egymást követő javítási periódusok n-edik javításának befejeződési időpontjai közötti időtartamok egyforma eloszlású, független valószínűségi változók. Blackwell már említett tétele miatt létezik a

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_n(t+h)-M_n(t)}{h}$$

határérték, ami megegyezik a

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_n(t)}{t}$$

határértékkel, ez viszont könnyen kiszámolható. Jelölje ugyanis Q_n annak a valószínűségét, hogy egy javítási periódus legalább n javításból áll. Ekkor felírható, hogy

$$Q_n\tilde{M}(t)\le M_n(t)\le Q_n\left[\tilde{M}(t)+1\right].$$

Felhasználva az 1. Segédtételt, azt kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M_n(t)}{t}=Q_n\lim_{t\to\infty}\frac{\tilde{M}(t)}{t}=Q_n\frac{m\mu P_{m-1}}{m\alpha\mu+P_{m-1}}.$$

Egy javítási periódusban végzett javítások várható száma

$$\sum_{n=1}^{\infty}Q_n=\frac{1}{P_{m-1}},$$

tehát (16) szerint

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t+h)-M(t)}{h}=\lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M_n(t+h)-M_n(t)}{h}= \tag{17}$$

$$=\frac{m\mu}{m\alpha\mu+P_{m-1}}.$$

Ebben a kifejezésben a határérték tagonként vehető, mert a sor egyenletesen konvergens, ugyanis az

$$\tilde{M}(t+h)-\tilde{M}(t)\le 1+\tilde{M}(h)$$

egyenlőség felhasználásával

$$\frac{M_n(t+h)-M_n(t)}{h}\le\frac{Q_n\left(\tilde{M}(t+h)+1\right)-Q_n\tilde{M}(t)}{h}=$$

$$=Q_n\frac{\tilde{M}(t+h)-\tilde{M}(t)+1}{h}\le Q_n\frac{2+\tilde{M}(h)}{h}$$

adódik. A (17) egyenlőségbe P_{m-1} értékét beírva megkapjuk a segédtétel állítását.

3. Segédtétel.

Jelölje $\tilde{M}_k(t)$, $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ a $(0, t)$ intervallumban előforduló $k \to k+1$ átmenetek várható számát. Tetszőleges $h > 0$ esetén fennáll, hogy

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{M}_k(t+h) - \tilde{M}_k(t)}{h} = \frac{m\mu P_k}{m\alpha\mu + P_{m-1}}. \tag{18}$$

Ezt az állítást $k = m-1$-re már bebizonyítottuk az 1. Segédtételben. A (18) baloldalán álló határérték létezését D. Blackwell tétele bizonyítja, ugyanis az egymást követő $k \to k+1$ átmenetek közötti időtartamok egyforma eloszlású, független változók, eloszlásuk eleget tesz az említett tételek feltételeinek. A (18) határérték megegyezik a $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\tilde{M}_k(t)}{t}$ határértékkel, ami nyilván P_k-szorosa a $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{M(t)}{t}$ határértéknek, vagyis P_k-szorosa (14)-nek.

Rátérünk a tétel bizonyítására, vagyis a $\left\{\tilde{P}_k\right\}$ eloszlás meghatározására. Ha $k = m$, akkor

$$P\{\eta(t) = m\} = \int_0^t e^{-m\mu(t-x)} d\tilde{M}(x),$$

és (14) miatt $\tilde{P}_m$ létezése bizonyítható. Ekkor

$$\tilde{P}_m = \frac{1}{m\mu} \lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{M}(t+h) - \tilde{M}(t)}{h} = \frac{1}{1 + m\alpha\mu \sum\limits_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}. \tag{19}$$

Jelölje $N_m(t)$ a $(0, t)$ időközben előforduló $m \to m-1$ átmenetek várható számát. Ekkor igaz az

$$N_m(t+h) = N_m(t) + P\{\eta(t) = m\} m\mu h + o(h)$$

egyenlőség, amiből

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt} N_m(t) = m\mu \tilde{P}_m$$

következik.

$k = 0, 1, \ldots, m-1$ esetén a $P\{\eta(t) = k\}$ valószínűség a következő formában írható fel:

$$P\{\eta(t) = k\} = \sum_{j=k}^{m-1} q_j(t) \binom{j}{k} e^{-k\mu t} \left(1 - e^{-\mu t}\right)^{j-k} + \tag{20}$$

$$+\delta_{k,m} \left[P\{\eta(0) = m\} e^{-m\mu t} + \int_0^t \left(1 - e^{-m\mu(t-u)}\right) d\tilde{M}_{m-1}(u) \right] +$$

$$+ \sum_{j=k-1}^{m-2} \binom{j+1'}{k} \int_0^t e^{-k\mu(t-u)} \left(1 - e^{-\mu(t-u)}\right)^{j+1-k} \times$$

$$\times [1 - F(t-u)]\, d\tilde{M}_j(u) + \binom{m-1}{k} \int_0^t e^{-k\mu(t-u)} \times$$

$$\times \left(1 - e^{-\mu(t-u)}\right)^{m-1-k} [1 - F(t-u)]\, dN_m(u),$$

ahol $q_j(t)$ annak a valószínűsége, hogy a rendszer kezdő állapota j volt és a $(0, t]$ intervallumban nem fejeződött be kiszolgálás. A $\delta_{k,m}$ jelentése pedig:

$$\delta_{k,m} = \begin{cases} 1 & , \text{ha } k = m, \\ 0 & , \text{ha } k \neq m. \end{cases}$$

A $P\{\eta(t) = k\}$ valószínűség előző felírása következőképpen indokolható: az $\eta(t) = k$ esemény több egymást kizáró eseményból tevődik össze

a) a kezdő állapot j, $(j = k, k = 1, \ldots, m-1)$ és a $(0, t)$ intervallumban nem fejeződik be javítás, s ez idő alatt leáll $(j-k)$ gép,

b) az u időpillanatban $(0 \leq u \leq t)$ történik egy $j \to j+1$ átmenet $(j = k-1, k, \ldots, m-2)$, az $(u, t]$ intervallumban nem fejeződik be kiszolgálás és leáll $j+1-k$ gép,

c) az u időpontban $(0 \leq u \leq t)$ történik egy $m \to m-1$ átmenet, az $(u,t]$ intervallumban nem fejeződik be javítás és leáll $m-1-k$ gép.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\tilde{M}_j = \lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{M}_j\,(t+h) - \tilde{M}_j\,(t)}{h},$$

$$(j = 0, 1, \ldots, m-1)\,,$$

$$\tilde{N}_m = \lim_{t\to\infty} \frac{N_m\,(t+h) - N_m\,(t)}{h}.$$

Ezek a határértékek Blackwell tétele miatt tetszőleges $h > 0$ esetén léteznek. Ekkor (20) alapján

(21) $$\tilde{P}_k = \lim_{t\to\infty} P\left\{\eta\,(t) = k\right\} =$$

$$\sum_{j=k-1}^{m-2} \tilde{p}_{jk}\tilde{M}_j + \tilde{p}_{m-1,k}\tilde{N}_m + \frac{\delta_{k,m}\tilde{M}_{m-1}}{m\mu},$$

ahol

$$\tilde{p}_{jk} = \binom{j+1}{k} \int_0^\infty e^{-k\mu x}\left(1 - e^{-\mu x}\right)^{j+1-k}\left[1 - F\,(x)\right] dx,$$

$$(j = 0, 1, ..., m-2)\,,$$

és

$$\tilde{p}_{m-1,k} = \tilde{p}_{m-2,k}.$$

Határozzuk meg a (21) egyenlet $\sum_{k=0}^{m} \tilde{P}_k = 1$ feltételnek eleget tevő megoldásait!

Ha $k = m$, akkor (21)-ből azonnal következik, hogy

$$\tilde{P}_m = \frac{\tilde{M}_{m-1}}{m\mu} = \frac{P_{m-1}}{m\alpha\mu + P_{m-1}} = \frac{1}{1 + m\alpha\mu \sum\limits_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}.$$

Vezessük be az

$$\tilde{U}(z)=\sum_{k=0}^{m}\tilde{P}_k z^k$$

generátorfüggvényt. Ekkor

$$\tilde{U}(z)=\sum_{k=0}^{m-1}\left(\sum_{j=k-1}^{m-2}\tilde{p}_{jk}\tilde{M}_j\right)z^k+\sum_{k=0}^{m-1}\tilde{p}_{m-1,k}\tilde{N}_m z^k+\frac{\tilde{M}_{m-1}}{m\mu}= \tag{22}$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\left(\sum_{j=k-1}^{m-2}\binom{j+1}{k}\int_0^\infty e^{-k\mu x}\left(1-e^{-\mu x}\right)^{j+1-k}[1-F(x)]\,dx\times\right.$$

$$\left.\times\frac{m\mu}{m\alpha\mu+P_{m-1}}\right)z^k+\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}\int_0^\infty e^{-k\mu x}\left(1-e^{-\mu x}\right)^{m-1-k}\times$$

$$\times[1-F(x)]\,dx\frac{m\mu}{m\alpha\mu+P_{m-1}}z^k+\frac{P_{m-1}}{m\alpha\mu+P_{m-1}}z^m=$$

$$=\frac{m\mu}{m\alpha\mu+P_{m-1}}\left[\sum_{k=0}^{m-2}\int_0^\infty P_k\left(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x}\right)^{k+1}[1-F(x)]\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^\infty P_{m-1}\left(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x}\right)^{m-1}[1-F(x)]\,dx+\frac{P_{m-1}}{m\mu}z^m\right]=$$

$$=\frac{m\mu}{m\alpha\mu+P_{m-1}}\left[\int_0^\infty\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x}\right)P_k\times\right.$$

$$\times\left(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x}\right)^k[1-F(x)]\,dx+$$

$$+\int_0^\infty\left\{\left(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x}\right)P_{m-1}\left(1-e^{-\mu x}+ze^{-\mu x}\right)^{m-1}+\right.$$

$$+\left(e^{-\mu x}-ze^{-\mu x}\right)P_{m-1}\left(1-e^{--\mu x}+ze^{-\mu x}\right)^{m-1}\times$$

$$\times [1 - F(x)]\} \, dx + \frac{P_{m-1}}{m\mu} z^m \Bigg] =$$

$$= \frac{m\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \left[\int_0^\infty \left(1 - e^{-\mu x} + z e^{-\mu x}\right) U \left(1 - e^{-\mu x} + z e^{-\mu x}\right) \times \right.$$

$$\times [1 - F(x)] \, dx + (1 - z) \, P_{m-1} \times$$

$$\left. \times \int_0^\infty e^{-\mu x} \left(1 - e^{-\mu x} + z e^{-\mu x}\right)^{m-1} [1 - F(x)] \, dx + \frac{P_{m-1}}{m\mu} z^m \right],$$

ahol $U(z)$ a (6)-os generátorfüggvény.

Vezessük be a $\left\{ \tilde{P}_k \right\}$ valószínűségeloszlás

$$\tilde{B}_r = \sum_{k=r}^{m} \binom{k}{r} \tilde{P}_k, \qquad r = 1, \ldots, m-1$$

binomiális momentumait. Látható, hogy (9)-hez hasonlóan

$$\tilde{B}_r = \frac{1}{r!} \left(\frac{d^r \tilde{U}(z)}{dz^r} \right)_{z=1}, \tag{23}$$

és (22) r-szeres differenciálásával a

$$\tilde{B}_r = \frac{m\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \left[B_r + B_{r-1} - \binom{m-1}{r-1} B_{m-1} \right] \times$$

$$\times \left[\int_0^\infty e^{-r\mu x} [1 - F(x)] \, dx + \frac{1}{m\mu} \binom{m}{r} P_{m-1} \right]$$

összefüggéshez jutunk.

$$\int_0^\infty e^{-r\mu x} [1 - F(x)] \, dx = \frac{1 - \varepsilon_r}{\mu r}$$

figyelembevételével és (10) felhasználásával a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$\tilde{B}_r = \frac{m\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}}\left[\frac{1-\varepsilon_r}{r\mu\varepsilon_r}B_r + \frac{1}{m\mu}\binom{m}{r}P_{m-1}\right], \tag{24}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, m-1)$$

és

$$\tilde{B}_0 = 1.$$

Írjuk be a (24)-es egyenletbe P_{m-1} és B_r értékét! Ekkor

$$\tilde{B}_r = \frac{m\mu}{m\mu\alpha + \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}}\left[\frac{1-\varepsilon_r}{r\mu\varepsilon_r}C_r\frac{\sum\limits_{j=r}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}{\sum\limits_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m\mu}\binom{m}{r}\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}\right] = \frac{m\mu}{1+m\alpha\mu\sum\limits_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}\times$$

$$\times\left[\frac{C_{r-1}}{r\mu}\sum_{j=r}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j} + \frac{C_{r-1}}{m\mu}\binom{m}{r}\frac{1}{C_{r-1}}\right] =$$

$$= \frac{m\mu}{1+m\alpha\mu\sum\limits_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}\left[\frac{C_{r-1}}{r}\sum_{j=r}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j} + \frac{C_{r-1}}{r}\binom{m-1}{r-1}\frac{1}{C_{r-1}}\right],$$

ami megegyezik (13)-mal.

A $\tilde{P}_k$ (12)-beli alakját (23)-ból megkapjuk, ha a (23) egyenletek mindkét oldalát $(-1)^{r-k}\binom{r}{k}$-val megszorozzuk és az így kapott egyenleteket összeadjuk. Ezzel a tételt bizonyítását befejeztük.

3. Tétel.

A $\left\{\tilde{P}_k\right\}$ és a $\{P_k\}$ valószínűségeloszlás a következő kapcsolatban áll egymással:

$$\tilde{P}_k = \frac{mP_{k-1}}{k\left[m\alpha\mu + P_{m-1}\right]}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)\,, \tag{25}$$

és

$$\tilde{P}_0 = 1 - \frac{m}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \sum_{k=1}^{m} \frac{P_{k-1}}{k}. \tag{26}$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy az adott idő alatt előforduló $k-1 \to k$ és $k \to k-1$ átmenetek száma legfeljebb 1-gyel különbözhet egymástól. Ez természetesen a várható értékükre is fennáll. Ha $N_k\left(t\right)$ jelöli a $(0, t)$ időközben előforduló $k \to k-1$ átmenetek várható számát, akkor

$$|\tilde{M}_{k-1}\left(t\right) - N_k\left(t\right)| \leq 1.$$

$N_k\left(t\right)$-re fennáll

$$N_k\left(t+h\right) = N_k\left(t\right) + P\left\{\eta\left(t\right) = k\right\} k\mu h + o\left(h\right).$$

Így

$$\frac{dN_k\left(t\right)}{dt} = k\mu P\left\{\eta\left(t\right) = k\right\},$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dN_k\left(t\right)}{dt} = \lim_{t\to\infty} \frac{N_k\left(t\right)}{t} = k\mu\tilde{P}_k. \tag{27}$$

A 3. Segédtétel szerint

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\tilde{M}_{k-1}\left(t\right)}{tt} = \frac{m\mu P_{k-1}}{m\alpha\mu + P_{m-1}}. \tag{28}$$

Mivel (27) és (28) a fenti egyenlőtlenség miatt megegyezik, ezért $k = 1, 2, \ldots, m$-re megkaptuk $\tilde{P}_k$ (25)-beli alakját.

A $\sum\limits_{k=0}^{m} \tilde{P}_k = 1$ egyenlőség fennállása miatt $\tilde{P}_0 = 1 - \sum\limits_{k=1}^{m} \tilde{P}_k$, ami megegyezik (26)-tal.

III.2.2. Stacionárius folyamat

4. Tétel.

Ha α véges, akkor tetszőleges $x \geq 0$ esetén létezik a

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\chi(t) \leq x \mid \eta(t) = k\right\} = \tilde{F}_k(x), \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

határeloszlás, és fennáll

$$\tilde{F}_k(x) = \frac{k\mu}{P_{m-1}} \left[\binom{j+1}{k} P_j \int_0^\infty e^{-k\mu u} \left(1 - e^{-\mu u}\right)^{j+1-k} \times \right.$$

$$\times \left[F(u+x) - F(u)\right] du + \binom{m-1}{k} P_{m-1} \times$$

$$\left. \times \int_0^\infty e^{-k\mu u} \left(1 - e^{-\mu u}\right)^{m-1-k} \left[F(u+x) - F(u)\right] du \right],$$

ha $k = 0, 1, \ldots, m-1$ és $\tilde{F}_m = 1$.

Bizonyítás. Vizsgáljuk először a

$$\tilde{H}_k(x) = \lim_{t\to\infty} P\left\{\chi(t) \leq x, \eta(t) = k\right\}, \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

együttes eloszlásfüggvényt. A $P\left\{\chi(t) \leq x, \eta(t) = k\right\}$ valószínűséget a következő alakba írhatjuk fel:

$$P\left\{\chi(t) \leq x, \eta(t) = k\right\} = \sum_{j=k}^{m-1} \left[q_j(t) - q_j(t+x)\right] \binom{j}{k} e^{-k\mu x} \times$$

$$\times\left(1-e^{-\mu x}\right)^{j-k}+\sum_{j=k-1}^{m-2}\binom{j+1}{k}\int_0^\infty e^{-k\mu(t-u)}\times$$

$$\times\left(1-e^{-\mu(t-u)}\right)^{j+1-k}\left[F\left(t-u+x\right)-F\left(t-u<ght\right)\right]d\tilde{M}_j\left(u\right)+$$

$$+\binom{m-1}{k}\int_0^\infty e^{-k\mu(t-u)}\left(1-e^{-\mu(t-u)}\right)^{m-1-k}\times$$

$$\times\left[F\left(t-u+x\right)-F\left(t-u\right)\right]dN_m\left(u\right),$$

$$(k=0,1,\ldots,m-1).$$

Az egyenlőség igazolása (20) bizonyításához hasonlóan történik.

Határértéket képezve adódik, hogy

$$\tilde{H}_k\left(x\right)=\frac{m\mu}{m\alpha\mu+P_{m-1}}\left[\sum_{j=k-1}^{m-2}\binom{j+1}{k}P_j\int_0^\infty e^{-k\mu u}\left(1-e^{-\mu u}\right)^{j+1-k}\times\right.$$

$$\times\left[F\left(u+x\right)-F\left(u\right)\right]du+\binom{m-1}{k}P_{m-1}\times$$

$$\left.\times\int_0^\infty e^{-k\mu u}\left(1-e^{-\mu x}\right)^{m-1-k}\left[F\left(u+x\right)-F\left(u\right)\right]du\right],$$

miközben felhasználtuk az $\tilde{N}_m=\tilde{M}_{m-1}$ és az

$$\tilde{M}_j=\frac{m\mu P_j}{m\alpha\mu+P_{m-1}},\qquad(j=0,1,\ldots,m-1)$$

egyenlőségeket.

$\tilde{F}_k\left(x\right)$-re a következő összefüggés írható fel

$$\tilde{F}_k\left(x\right)=\lim_{t\to\infty}\left\{\chi\left(t\right)\le x\mid\eta\left(t\right)=k\right\}=\lim_{t\to\infty}\frac{P\left\{\chi\left(t\right)\le x,\eta\left(t\right)=k\right\}}{P\left\{\eta\left(t\right)=k\right\}}.$$

Ismerve a $\left\{\lim\limits_{t\to\infty} P\left\{\eta\left(t\right)=k\right\}\right\} = \left\{\tilde{P}_k\right\}$ és a $\left\{P_k\right\}$ eloszlások közötti (25) összefüggést, következik a tétel állítása.

5. Tétel.

Legyen

$$\tilde{F}\left(x\right) = \lim_{t\to\infty} P\left\{\chi\left(t\right)\le x \mid \eta\left(t\right)<m\right\}.$$

Ekkor

$$\tilde{F}\left(x\right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^x \left[1-F\left(y\right)\right]dy, & \text{ha } x\ge 0,\\ 0, & \text{ha } x<0.\end{cases}$$

Bizonyítás.

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\chi\left(t\right)\le x, \eta\left(t\right)<m\right\} = \sum_{k=0}^{m-1}\tilde{H}_k\left(x\right) =$$

$$= \frac{m\mu}{m\alpha\mu+P_{m-1}}\int\limits_0^x \left[1-F\left(y\right)\right]dy.$$

Ha $x\ge 0$, akkor

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\eta\left(t\right)<m\right\} = 1-\tilde{P}_m = \frac{m\alpha\mu}{m\alpha\mu+P_{m-1}}.$$

Ekkor

$$P\left\{\chi\left(t\right)\le x \mid \eta\left(t\right)<m\right\} = \frac{P\left\{\chi\left(t\right)\le x, \eta\left(t\right)<m\right\}}{P\left\{\eta\left(t\right)<m\right\}},$$

amiből határértéket véve és behelyettesítve következik az állítás.

Definíció.

Az általunk vizsgált folyamatot stacionáriusnak nevezzük, ha a folyamat kezdeti eloszlását a $P\left\{\eta\left(0\right)=k\right\} = \tilde{P}_k$ és $P\left\{\chi\left(0\right)\le x \mid \eta\left(0\right)=k\right\} = \tilde{F}_k\left(x\right)$, $\left(k=0,1,\ldots,m\right)$ valószínűségek adják.

Ekkor az $\{\eta(t), \chi(t)\}$ változópár eloszlása minden időpontban megegyezik a kezdeti eloszlással és

$$\tilde{M}_k(t) = \frac{m\mu P_k}{m\alpha\mu + P_{m-1}} t$$

valamint

$$\tilde{N}_k(t) = \frac{m\mu P_{k-1}}{m\alpha\mu + P_{m-1}} t,$$

ahol $\tilde{M}_k(t)$ és $\tilde{N}_k(t)$ az eddigi jelölésnek megfelelően a $(0, t)$-ben előforduló $k \to k+1$ ill. $k \to k-1$ átmenetek várható száma.

Most néhány állítást bizonyítunk be a stacionárius folyamatra.

III.2.3. A rendszer jellemzőinek meghatározása

6. Tétel.

Az össztermelés várható időtartama a $(0, T)$ intervallumban stacionárius folyamat esetén

$$E\left\{\int_0^T \eta(t)\,dt\right\} = T\frac{m\sum\limits_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}{1 + m\alpha\mu\sum\limits_{j=0}^{m-1}\binom{m-1}{j}\frac{1}{C_j}}.$$

Bizonyítás. Esetünkben

$$E\left\{\int_0^T \eta(t)\,dt\right\} = \int_0^T E\{\eta(t)\}\,dt,$$

és $E\{\eta(t)\} = \sum\limits_{k=0}^{m} k\tilde{P}_k = \tilde{B}_1$, ahol $\tilde{B}_1$-ot (13) adja. Behelyettesítés után megkapjuk az állítást.

1. Következmény.

Jelölje U_m az átlagos összgépkihasználtságot, vagyis legyen

$$U_m = \lim_{T\to\infty} \frac{E\left\{\int\limits_0^T \eta(t)\,dt\right\}}{T}.$$

A 6. Tétel következményeként adódik, hogy egy gép kihasználtsága

$$U_m = \frac{\sum\limits_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}{1 + m\alpha\mu \sum\limits_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}.$$

7. Tétel.

Jelölj $\xi_m(t)$ a következő valószínűségi változót

$$\xi_m(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \eta(t) < m, \\ 0, & \text{ha } \eta(t) = m. \end{cases}$$

Ekkor stacinárius folyamat esetén a szerelő $(0, T)$ időközben javítással töltött idejének várható értéke

$$E\left\{\int\limits_0^T \xi_m(t)\,dt\right\} = T\frac{m\alpha\mu \sum\limits_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}{1 + m\alpha\mu \sum\limits_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{C_j}}.$$

Bizonyítás. Fennáll, hogy

$$E\left\{\int\limits_0^T \xi_m(t)\,dt\right\} = \int\limits_0^T E\left\{\xi_m(t)\right\} dt.$$

A $\xi_m(t)$ valószínűségi változó várható értéke a következőképpen határozható meg:

$$E\{\xi_m(t)\} = P\{\xi_m(t) = 1\} = P\{\eta(t) < m\} = 1 - \tilde{P}_m,$$

ahol $\tilde{P}_m$ (19) alapján kiszámolható. Ezt beírva kapjuk az állítást.

2. Következmény.

Jelölje U_{sz} a „szerelő ” kihasználtságát, amit a következőképpen definiálunk:

$$U_{sz} = \lim_{T\to\infty} \frac{E\left\{\int\limits_0^T \xi_m(t)\,dt\right\}}{T}.$$

A 7. Tétel következményeként adódik, hogy

$$U_{sz} = 1 - \tilde{P}_m.$$

Jelölje $\zeta(t)$ a t időpontban meghibásodott gépnek a javítás megkezdéséig tartó várakozási idejét. Ez megfelel annak az időnek, ameddig a szerelő elvégzi a t pillanatban álló gépek javítását, feltéve, hogy közben nem áll be a várakozók sorába. Legyen $[x]^+ = \begin{cases} x, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \le 0 \end{cases}$. Ekkor fennáll, hogy

$$\zeta(t) = \chi(t) + \sum_{i=1}^{[m-1-\eta(t)]^+} \chi_i, \tag{29}$$

ahol $\chi(t)$ az eddigi jelölésnek megfelelően a t pillanatban (esetleg) folyamatban lévő javítás befejezéséhez szükséges időt jelenti, $\chi_1, \chi_2, \ldots$ $F(x)$ eloszlásfüggvényű független valószínűségi változók, melyek $\eta(t)$-től és $\chi(t)$-től is függetlenek. $\zeta(t)$-t szokás *virtuális várakozási idő*nek is nevezni.

A várakozási idő eloszlásfüggvénye stacionáris esetben $\zeta(t)$ előbbi alakjának felhasználásával

(30) $$P\{\zeta(t) \le x\} = \sum_{k=0}^{m} \tilde{H}_k(x) F_{m-1-k}(x),$$

ahol $F_n(x)$ jelöli az F eloszlásfüggvénynek önmagával vett n-szeres konvolucióját ($F_0(x) = 1$, ha $x > 0$ és $F_0(x) = 0$, ha $x \ge 0$).

8. Tétel.

Ha σ^2 véges, akkor a várakozási idő várható értéke

$$E\{\zeta(t)\} = \frac{m\alpha\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \left\{ \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{2\alpha} + (m-1)\alpha - \frac{1 - P_{m-1}}{\mu} \right\}.$$

Bizonyítás. Mivel a folyamat stacionárius, ezért

$$P\{\eta(t) = k\} = \tilde{P}_k$$

bármely t-re. Az 5. Tétel felhasználásával kapjuk, hogy

$$E\{\chi(t) \mid \eta(t) < m\} = \int_0^\infty x d\tilde{F}(x) = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty x[1 - F(x)]\,dx = \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{2\alpha}.$$

Ekkor

$$E\{\chi(t)\} = \frac{\sigma^2 + \alpha^2}{2\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{P}_k.$$

Mivel $E\{\chi_i\} = \alpha$, $(i = 1, 2, \ldots)$ és χ_i-k függetlenek,

$$E\{\zeta(t)\} = \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{P}_k \left[\frac{\sigma^2 + \alpha^2}{2\alpha} + (m-1-k)\alpha \right]$$

adódik. A 3. Tétel alapján érvényesek a következő egyenlőségek

$$\sum_{k=0}^{m-1} \tilde{P}_k = 1 - \tilde{P}_m = \frac{m\alpha\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}},$$

és

$$\sum_{k=0}^{m-1} k\tilde{P}_k = \sum_{k=0}^{m} k\tilde{P}_k - m\tilde{P}_m = \tilde{B}_1 - m\tilde{P}_m = \frac{m\left(1-P_{m-1}\right)}{m\alpha\mu + P_{m-1}}.$$

Behelyettesítés után kapjuk, hogy

$$E\left\{\zeta\left(t\right)\right\} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m\alpha\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}}\left[\frac{\sigma^2+\alpha^2}{2\alpha} + \left(m-1\right)\alpha\right] +$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1} \frac{m\alpha\left(1-P_{m-1}\right)}{m\alpha\mu + P_{m-1}} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m\alpha\mu}{m\alpha\mu + P_{m-1}} \times$$

$$\times \left[\frac{\sigma^2+\alpha^2}{2\alpha} + \left(m-1\right)\alpha + \frac{1-P_{m-1}}{\mu}\right],$$

ezzel a tételt bebizonyítottuk.

9. Tétel.

Jelentse A_t azt az eseményt, hogy a t pillanatban történik leállás. A várakozási idő eloszlásfüggvénye A_t feltétel mellett

$$P\left\{\zeta\left(t\right) \leq x \mid A_t\right\} = \frac{\mu \sum\limits_{k=0}^{m} k\tilde{H}_k\left(x\right) F_{m-1-k}\left(x\right)}{\mu \sum\limits_{k=0}^{m} k\tilde{P}_k}, \tag{31}$$

a várakozási idő várható értéke A_t feltétel mellett (amit az *aktuális várakozási idő* várható értékének is szoktak nevezni)

$$E\left\{\zeta\left(t\right) \mid A_t\right\} = \left(m-1\right)\alpha - \frac{1-P_{m-1}}{\mu}. \tag{32}$$

Bizonyítás. A várakozási idő eloszlásfüggvénye (30) szerint

$$P\left\{\zeta\left(t\right) \leq x\right\} = \sum_{k=0}^{m} P\left\{\chi\left(t\right) \leq x, \eta\left(t\right) = k\right\} F_{m-1-k}\left(x\right).$$

Könnyű látni, hogy

$$P\{\zeta(t) \le x,\ A_t\} = \sum_{k=0}^{m} P\{\chi(t) \le x, \eta(t) = k\}\, k\mu F_{m-1-k}(x) =$$

$$= \mu \sum_{k=0}^{m} k\tilde{H}_k(x)\, F_{m-1-k}(x).$$

A feltételes valószínűség definíciója szerint

$$P\{\zeta(t) \le x \mid A_t\} = \frac{P\{\zeta(t) \le x, A_t\}}{P\{A_t\}}. \le' no(33)$$

Mivel $P\{A_t\} = \sum\limits_{k=0}^{m} k\mu\tilde{P}_k$, így (33)-ból következik (31).

A feltételes várható értéket a következőképpen határozhatjuk meg. (31) miatt nyilvánvalóan fennáll

(34) $$E\{\zeta(t) \mid A_t\} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m-1} k\left[\int\limits_0^\infty x d\tilde{H}_k(x) + \tilde{P}_k(m-1-k)\alpha\right]}{\sum\limits_{k=0}^{m} k\tilde{P}_k}.$$

Mivel teljesül a

$$\sum_{k=0}^{m-1} k\int_0^\infty x d\tilde{H}_k(x) = \int_0^\infty x d\sum_{k=0}^{m-1} k\tilde{H}_k(x)$$

egyenlőség, a jobb oldal kiszámításhoz szükségünk van $\sum\limits_{k=0}^{m-1} k\tilde{H}_k(x)$ meghatározására. Erre érvényes

$$\sum_{k=0}^{m-1} k\tilde{H}_k(x) = \tilde{L}(x)\,\frac{m(1-P_{m-1})}{m\alpha\mu + P_{m-1}} = \tilde{L}(x)\sum_{k=0}^{m-1} k\tilde{P}_k,$$

ahol

$$\tilde{L}(x) = \frac{\int\limits_0^\infty e^{-\mu x}\left[F(u+x) - F(u)\right] du}{\int\limits_0^\infty e^{-\mu x}\left[1 - F(u)\right] du}.$$

A 3. tétel szerint

$$k\tilde{P}_k = \frac{1-\tilde{P}_m}{\alpha\mu} P_{k-1}, \qquad (k = 0, 1, \ldots, m),$$

ezért összegükre teljesül

$$\sum_{k=0}^{m} k\tilde{P}_k = \frac{1-\tilde{P}_m}{\alpha\mu}.$$

Ekkor

$$\sum_{k=0}^{m-1} k\tilde{P}_k = \sum_{k=0}^{m} k\tilde{P}_k - m\tilde{P}_m = \frac{1-\tilde{P}_m}{\alpha\mu}\left[1 - P_{m-1}\right].$$

Mindezek figyelembevételével adódik, hogy

$$\sum_{k=0}^{m-1} k \int\limits_0^\infty x d\tilde{H}_k(x) = \int\limits_0^\infty x d\tilde{L}(x) \sum_{k=0}^{m-1} k\tilde{P}_k = \sum_{k=0}^{m-1} k\tilde{P}_k \int\limits_0^\infty x d\tilde{L}(x) =$$

$$= \frac{1-\tilde{P}_m}{\alpha\mu}\left[1 - P_{m-1}\right]\left[\frac{\alpha}{1-\varphi(\mu)} - \frac{1}{\mu}\right].$$

Folytassuk a feltételes várható érték képletében szereplő mennyiségek kiszámítását. Látható, hogy

$$\sum_{k=0}^{m-1} k(m-1)\alpha\tilde{P}_k = (m-1)\alpha\frac{1-\tilde{P}_m}{\alpha\mu}\left[1 - P_{m-1}\right],$$

valamint

$$\sum_{k=0}^{m-1} k^2\alpha\tilde{P}_k = \alpha\sum_{k=0}^{m-1} k\left[\frac{1-\tilde{P}_m}{\alpha\mu} P_{k-1}\right] =$$

$$= \frac{1-\tilde{P}_m}{\mu} \sum_{k=0}^{m-1} \left[(k-1)\, P_{k-1} + P_{k-1} \right] =$$

$$= \frac{1-\tilde{P}_m}{\mu} \left[\sum_{k=0}^{m-2} k P_k + \sum_{k=0}^{m-2} P_k \right] =$$

$$= \alpha \frac{1-\tilde{P}_m}{\alpha\mu} \left[\frac{\varphi(\mu)}{1-\varphi(\mu)} (1-P_{m-1}) - (m-1)\, P_{m-1} + 1 - P_{m-1} \right] =$$

$$\alpha \frac{1-\tilde{P}_m}{\alpha\mu} \left[\frac{1-P_{m-1}}{1-\varphi(\mu)} - (m-1) P_{m-1} \right].$$

A megfelelő tagokat (34)-be visszahelyettesítve rövid számolás után kapjuk az állítást. Ugyanis a nevező

$$\frac{1-\tilde{P}_m}{\alpha\mu},$$

amivel a számláló minden tagja osztható. Ekkor

$$E\{\zeta(t) \mid A_t\} =$$

$$= (1-P_{m-1}) \left[\frac{\alpha}{1-\varphi(\mu)} - \frac{1}{\mu} \right] - \alpha \left[\frac{1-P_{m-1}}{1-\varphi(\mu)} - (m-1) P_{m-1} \right] +$$

$$+ (m-1)\, \alpha\, (1-P_{m-1}) = (m-1)\, \alpha - \frac{1-P_{m-1}}{\mu},$$

a tételt ezzel bebizonyítottuk.

Vezessük le ezt az összefüggést más eszközökkel is. Az előzőekhez hasonlóan belátható, hogy

$$U_m = \frac{\tilde{B}_1}{m} = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\mu} + \bar{W} + \alpha},$$

ahol $\bar{W}$ egy gép aktuális átlagos várakozási ideje. Mivel

$$P_{m-1} = \frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{m-1} \binom{m-1}{j} \frac{1}{c_j}},$$

és

$$\tilde{B}_1 = \frac{\frac{m}{P_{m-1}}}{1 + \frac{m\alpha\mu}{P_{m-1}}} = \frac{m}{P_{m-1} + m\alpha\mu},$$

ezért

$$\frac{1}{P_{m-1} + m\alpha\mu} = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\mu} + \bar{W} + \alpha}.$$

Ebből

$$\bar{W} = (m-1)\alpha - \frac{1 - P_{m-1}}{\mu}.$$

A modell tovább általánosítható oly módon, hogy a gépek meghibásodási intenzitása és a kiszolgálási idő függ a gép indexétől.
Ez az $< m/\vec{M}/\vec{G}/1/FIFO >$ rendszer, amellyel Sztrik (1981, 1983), Sztrik–Tomkó (1982) foglalkozik.

III.3. Az $< n/M/G/1/PS >$ rendszer

Egy olyan számítógépes rendszert tekintünk, amely egy központi egységből és n periféria-egységből áll. Mindegyik program egy igénynek felel meg, a központi egység a kiszolgáló egységeknek. Tegyük fel, hogy egy adott perifériát csak egy program használhat, és a periféria-egységben eltöltött időtartamok minden programra nézve független, azonos λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Miután a program bizonyos időt eltöltött a periférián, átkerül a központi egységbe, és itt azonnal megkezdődik a kiszolgálása, amelynek az időtartama $\beta < \infty$ várható értékű, $G(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségi változó ($G(0^+) = 0$). A központi egységben a programok kiszolgálása Processor Sharing (PS)-elv szerint történik, azaz hogyha a $(t, t + \delta t)$ időintervallumban egyidűleg k programot szolgálnak ki, akkor az egyes jobok kiszolgálási ideje csak $\delta t/k$-val halad előre. A programok kiszolgálásuk után abba a perifériába kerülnek vissza, ahonnan érkeztek.

Ebben a modellben a *segédváltozók módszerét* fogjuk alkalmazni a rendszert leíró sztochasztikus folyamat megadásánál. Vezessük be a következő valószínűségi változókat:

$\nu(t)$: a t-edik időpillanatban a CPU-nál tartózkodó igények száma,

$\xi_1(t), \ldots, \xi_{\nu(t)}(t)$: a t-edik időpillanatban a CPU-nál tartózkodó igények eltelt kiszolgálási ideje $\nu(t) > 0$ esetben.

Látható, hogy az

$$X(t) = \big(\nu(t); \xi_1(t), \ldots, \xi_{\nu(t)}(t)\big)$$

sztochasztikus folyamat olyan Markov-folyamat, melynek állapotterét egy diszkrét komponensből és több folytonos komponensből álló vektorok alkotják. Az ilyen típusú folyamatokat *szakaszonként lineáris* Markov-folyamatoknak nevezzük.

Meg kell jegyeznünk, hogy nagyon sok problémát ilyen folyamattal tudunk hűen leírni. Részletes tanulmányozásra ajánljuk Gnedenko–Kovalenko (1989)-könyvét.

Legyen

$$P_k\left(t, x_1, \ldots, x_k\right) dx_1 \ldots dx_k = P\left(\nu(t) = k; x_i \leq \xi_i < x_i + dx_i, i = 1, \ldots, k\right),$$

azaz $P_k(t, x_1, \ldots, x_k)$, $k = 1, \ldots, n$ annak a valószínűsége, hogy a központi egységnél a t időpontban k job tartózkodik, és az egyes jobok kiszolgálásából $x_1, \ldots, x_k$ hosszúságú idő telt el. Legyen δ megfelelően kicsi pozitív szám. Ekkor $P_k(t, x_1, \ldots, x_k)$- ra $(k = 1, \ldots, n-1)$ a következő összefüggés írható fel:

$$P_k\left(t; x_1, \ldots, x_k\right) =$$

$$= P_k\left(t - \delta; x_1 - \frac{\delta}{k}, \ldots, x_k - \frac{\delta}{k}\right) \prod_{i=1}^{k} \frac{1 - G\left(x_i\right)}{1 - G\left(x_i - \frac{\delta}{k}\right)} \left[1 - \lambda\left(n - k\right)\delta\right] +$$

$$+ (k+1) \int_0^\infty P_{k+1}\left(t - \delta; x_1 - \frac{\delta}{k}, \ldots, x_{k+1} - \frac{\delta}{k+1}\right) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{k} \frac{1 - G\left(x_i\right)}{1 - G\left(x_i - \frac{\delta}{k+1}\right)} \cdot \frac{G\left(x_{k+1}\right) - G\left[x_{k+1} - \frac{\delta}{k+1}\right]}{1 - G\left[x_{k+1} - \frac{\delta}{k+1}\right]} dx_{k+1}.$$

A jobb oldal első tagja azt írja le, hogy a $(t - \delta, t)$ időintervallumban nem fejeződik be egyetlen kiszolgálás sem. A második tag pedig azt, hogy ebben az időintervallumban a $(k+1)$ egy program közül egy kiszolgálása fejeződik be. Mindkét oldalt $\prod_{i=1}^{k} \left[1 - G\left(x_i\right)\right]$-vel osztva, és $\delta \to 0$, $t \to \infty$ határértéket véve kapjuk, hogy

$$\left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_i} + \lambda\left(n - k\right)\right] q_k\left(x_1, \ldots, x_k\right) =$$

$$\int_0^\infty q_{k+1}\left(x_1,\ldots,x_{k+1}\right)dG\left(x_{k+1}\right),\ \ k=1,\ldots,n-1,$$

ahol $q_k\left(x_1,\ldots,x_k\right)=\lim\limits_{t\to\infty}P_k\left(t;x_1,\ldots,x_k\right)/\prod\limits_{i=1}^{k}\left[1-G\left(x_i\right)\right]$.
P_0-ra és $q_n(x_1,\ldots,x_n)$-re hasonlóan kapjuk:

$$\lambda nP_0=\int_0^\infty q_1\left(x_1\right)dG\left(x_1\right),$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}q_n\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0.$$

Ezek az egyenletek nem írják le teljesen a rendszer működését, mivel nem veszik figyelembe az esetleges ugrásszerű átmeneteket azokban a pillanatokban, amikor a programok a perifériákból a központi egységbe kerülnek. A hiányzó egyenleteket hasonlóan kapjuk meg:

$$q_1\left(0\right)=\lambda nP_0,$$

$$q_k\left(0,x_1,\ldots,x_{k-1}\right)=\lambda\left(n-k+1\right)q_{k-1}\left(x_1,\ldots,x_{k-1}\right),$$

$$k=1,\ldots,n.$$

A kapott integro-differenciál egyenletek megoldását közvetlen helyettesítéssel nyerjük:

$$q_k\left(x_1,\ldots,x_k\right)=P_0\lambda^k n!/\left[(n-k)!\right],$$

és

$$P_k\left(x_1,\ldots,x_k\right)=P_0\lambda^k\frac{n!}{(n-k)!}\prod_{i=1}^{k}\left[1-G\left(x_i\right)\right],$$

$$i=1,\ldots,n.$$

Legyen P_k annak a stacionárius valószínűsége, hogy tetszőleges időpontban a központi egységben k program tartózkodik. Nyilvánvalóan

$$P_k = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty P_k\left(x_1, \dots, x_k\right) dx_1 \dots dx_k = P_0 \frac{n!}{(n-k)!} (\lambda\beta)^k .$$

A P_0 valószínűséget a $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ normalizáló feltételből kapjuk meg.

III.4. Az $< n/\vec{G}/M/r/FIFO >$ modell

Ennek a modellnek a leírása Sztrik (1985) cikkében található meg. Tekintsünk egy olyan számítógépes rendszert, amely központi egységekből, terminálokból, és jobokból áll. Minden job egy terminállal van kapcsolatban, ahol nincs várakozás. Sorok csak a központi egységeknél fordulhatnak elő. Az ilyen rendszerek elemzéséhez szintén véges forrású sorbanállási modellt használunk.

Legyen a rendszerben lévő jobok száma n, és a központi egységek száma r $(r \leq n)$. A job bizonyos időt tölt el a terminálnál, ezután a központi egységbe kerül, ahol a job kiszolgálása azonnal megkezdődik, ha az r központi egység között van szabad, egyébként sor alakul ki. A jobokat érkezésük sorrendjében szolgálják ki, és kiszolgálási idejük azonos μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A job kiszolgálásának befejeződése után visszatér a termináljához, ahol véletlen hosszúságú ideig tartózkodik. A i-edik job terminálnál eltöltött ideje $F_i(x)$ eloszlásfüggvénnyel és $f_i(x)$ sűrűségfüggvénnyel rendelkezik. Továbbá feltesszük, hogy a valószínűségi változók teljesen függetlenek.

III.4.1. A stacinárius eloszlás meghatározása

Jelölje a $\nu(t)$ valószínűségi változó a t időpontban a terminálnál lévő jobok számát, $\left(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_{\nu(t)}\right)$ ezeknek a joboknak az indexeit lexikografikus sorrendben, és $\left(\beta_1(t), \ldots, \beta_{n-\nu(t)}\right)$ a központi egységnél lévő (kiszolgálás alatt lévő vagy sorbanálló) jobok indexeit érkezésük sorrendjében. Az

$$Y(t) = \left(\nu(t); \alpha_1(t), \ldots, \alpha_{\nu(t)}; \beta_1(t), \ldots, \beta_{n-\nu(t)}\right), \qquad (t \geq 0)$$

folyamat csak akkor Markov-folyamat, ha az $F_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ eloszlásfüggvények exponenciálisak.

Vezessük be a $\xi\alpha_i(t)$ változót, amely azt az időt jelöli, amelyet az α_i job a terminálnál eltöltött a legutolsó központi egységbeli kiszolgálása óta. Az így kapott

$$X(t) = \left(\nu(t); \alpha_1(t), \ldots, \alpha_{\nu(t)}; \xi\alpha_1(t), \ldots, \xi\alpha_{\nu(t)}; \beta_1(t), \ldots, \beta_{n-\nu(t)}\right)$$

folyamat rendelkezik a Markov tulajdonsággal.

Jelölje V_k^n és C_k^n az $1, 2, \ldots, n$ egészek k-ad osztályú variációinak illetve a kombinációinak lexikografikusan rendezett halmazát. Ekkor az $(X(t), t \geq 0)$ folyamat állapottere az olyan

$$(i_1, \ldots, i_k; x_1, \ldots, x_k; j_1, \ldots, j_{n-k})$$

pontokból áll, ahol $(i_1, \ldots, i_k) \in C_k^n$, $(j_1, \ldots, j_{n-k}) \in V_k^n$, $x_i \in R_+$, $i = 0, 1, \ldots, k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Az $X(t)$ folyamat akkor van az $(i_1, \ldots, i_k; x_1, \ldots, x_k; j_1, \ldots, j_{n-k})$ állapotban, ha az $(i_1, \ldots, i_k)$ indexű jobok már $(x_1, \ldots, x_k)$ ideje vannak a termináloknál, és $(j_1, \ldots, j_{n-k})$ a központi egységnél lévő jobok indexe érkezési sorrendben.

A Kolmogorov-egyenletek levezetéséhez szükségünk van tetszőleges $(t, t+h)$ intervallumban lejátszódó átmenetek vizsgálatára. Az átmeneti valószínűségeket a következő módon adhatjuk meg $0 \leq n-k < r$ esetére.

$$P\left[X(t+h) = (i_1, \ldots, i_k; x_1+h, \ldots, x_k+h; j_1, \ldots, j_{n-k}) \mid \right.$$

$$\left. X(t) = (i_1, \ldots, i_k; x_1, \ldots ë, x_k; j_1, \ldots, j_{n-k})\right]$$

$$= (1-(n-k)\mu h) \prod_{l=1}^{k} \frac{1-F_{i_l}(x_l+h)}{1-F_{i_l}(x_l)} + o(h),$$

$$P[X(t+h) = (i_1, \ldots, i_k; x_1+h, \ldots, x_k+h; j_1, \ldots, j_{n-k}) \mid$$

$$X(t) = (i_1^{'}, \ldots, j_{n-k}^{'}, \ldots, i_k^{'}; x_1^{'}, \ldots, y^{'}, \ldots, x_k^{'}; j_1, \ldots, j_{n-k-1})]$$

$$= \frac{f_{j_{n-k}}(y)\,h}{1-F_{j_{n-k}}(y)} \prod_{l=1}^{k} \frac{1-F_{i_l}(x_l+h)}{1-F_{i_l}(x_l)} + o(h),$$

ahol $(i_1^{'}, \ldots, j_{n-k}^{'}, \ldots, i_k^{'})$ az $(i_1, \ldots, i_k, j_{n-k})$ indexeket jelöli lexikografikus sorrendben, és $(x_1, \ldots, y^{'}, \ldots, x_k^{'})$ a megfelelő időket.

Ha $r \leq n-k \leq n$ akkor az átmeneti valószínűségek a következők:

$$P\left[X(t+h) = (i_1, \ldots, i_k; x_1+h, \ldots, x_k+h; j_1, \ldots, j_{n-k}) \mid \right.$$

$$\left. X(t) = (i_1, \ldots, i_k; x_1, \ldots, x_k; j_1, \ldots, j_{n-k})\right]$$

$$= (1-r\mu h) \prod_{l=1}^{k} \frac{1-F_{i_l}(x_l+h)}{1-F_{i_l}(x_l)} + o(h),$$

$$P\Big[X(t+h) = (i_1, \ldots, i_k; x_1+h, \ldots, x_k+h; j_1, \ldots, j_{n-k}) \mid$$

$$X(t) = \Big(i_1^{'}, \ldots, j_{n-k}^{'}, \ldots, i_k; x_1, \ldots, y^{'}, \ldots, x_k^{'}; j_1, \ldots, j_{n-k-1}\Big)\Big] =$$

$$= \frac{f_{j_{n-k}}(y)\,h}{1-F_{j_{n-k}}(y)} \prod_{l=1}^{k} \frac{1-F_{i_l}(x_l+h)}{1-F_{i_l}(x_l)} + o(h),$$

Vezessük be a következő függvényeket:

$$Q_{0;j_1,\dots,j_n}(t) = P(\nu(t) = 0; \beta_1(t) = j_1, \dots, \beta_n(t) = j_n),$$

$$Q_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k; t) =$$

$$P(\nu(t) = k; \alpha_1(t) = i_1, \dots, \alpha_k(t) = i_k; \xi_{i_1} \le x_1, \dots, \xi_{i_k} \le x_k;$$

$$\beta_1(t) = j_1, \dots, \beta_{n-k}(t) = j_{n-k}).$$

Legyen λ_i a következőképpen definiálva: $1/\lambda_i = \int\limits_0^\infty x dF_i(x)$.

1. Tétel.

Ha $1/\lambda_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$, akkor az $(X(t), t \ge 0)$ folyamatnak van egyértelmű ergodikus (stacionárius) eloszlása, amely független a kezdeti feltételektől, azaz

$$Q_{0;j_1,\dots,j_n} = \lim_{t\to\infty} Q_{0;j_1,\dots,j_n}(t),$$

$$Q_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k) =$$

$$\lim_{t\to\infty} Q_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k; t).$$

A tétel bizonyítása Gnedenko–Kovalenko (1989) könyvének 211. oldalán található tételből közvetlenül következik.

A tétel biztosítja a következő határértékek létezését, és egyértelműségét:

$$q_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k) dx_1 \dots dx_l =$$

$$= P(\nu(t) = k; \alpha_1(t) = i_1, \dots, \alpha_k(t) = i_k; x_l \le \xi_{i_l} < x_l + dx_l, l = 1, \dots, k;$$

$$\beta_1(t) = j_1, \dots, \beta_{n-k}(t) = j_{n-k}), \qquad k = 1, \dots, n$$

ahol $q_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}}(x_1, \dots, x_k)$ jelöli az $(i_1, \dots, i_k; x_1, \dots, x_k; j_1, \dots, j_{n-k})$ állapotok sűrűségfüggvényét, ha $t \to \infty$. Feltesszük, hogy rögzített k-ra az ergodikus eloszlásoknak létezik a sűrűségfüggvénye. Ehhez elegendő feltenni, hogy az $F_i(x)$-nek van sűrűségfüggvénye. Vezessük be a

$$\tilde{q}_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_k)=\frac{\tilde{q}_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_k)}{(1-F_{i_1}(x_1))\ldots(1-F_{i_k}(x_k))}$$

ún. norëmált sűrűségfüggvényeket.

2. Tétel.

A fenti normált sűrűségfüggvények kielégítik az (1), (3) integro-differenciál-egyenleteket a (2), (4) határfeltételek mellett.

(1)
$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_k}\right]^{*}\tilde{q}_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_k)$$
$$=-(n-k)\,\mu\tilde{q}_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_k)+$$
$$+\int\limits_0^\infty \tilde{q}_{i_1',\ldots,j_{n-k}',\ldots,i_k';j_1,\ldots,j_{n-k-1}}\left(x_1^{'},\ldots,y^{'},\ldots,x_k^{'}\right)f_{j_n}\ddot{(}ydy,$$

(2)
$$\tilde{q}_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_{l-1},0,x_{l+1},\ldots,x_k)=$$
$$=\mu\sum_{V_{j_1,\ldots,j_{n-k}}^{i_l}}\tilde{q}_{i_1,\ldots,i_{l-1};i_{l+1},\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_{l-1},x_{l+1},\ldots,x_k)$$
$$l=1,\ldots,k,\ \ 0\le n-k<r \text{ esetén},$$

(3)
$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_k}\right]^{*}\tilde{q}_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_k)=$$
$$=-r\mu\tilde{q}_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_k)+$$
$$+\int\limits_0^\infty \tilde{q}_{i_1',\ldots,j_{n-k}',\ldots,i_k';j_1,\ldots,j_{n-k-1}}\left(x_1^{'},\ldots,y^{'},\ldots,x_k^{'}\right)f_{j_n}(y)\,dy$$

$$(4) \qquad \tilde{q}_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}}\left(x_1,\dots,x_{l-1},0,x_{l+1},\dots,x_k\right)=$$

$$=\mu \sum_{V^{i_l}_{j_1,\dots,j_{r-1}}} \tilde{q}_{i_1,\dots,i_{l-1};i_{l+1},\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}}\left(x_1,\dots,x_{l-1},x_{l+1},\dots,x_k\right),$$

$$l=1,\dots,k,\ \ r\leq n-k<n-1 \text{ esetén,}$$

valamint

$$r\mu Q_{0;j_1,\dots,j_n}=\int\limits_0^\infty \tilde{q}_{j_n;j_1,\dots,j_{n-1}}\left(y\right)f_{j_n}\left(y\right)dy.$$

A $[\ \ ]^*$ jelentése a bizonyításban szerepel, és

$$V^{i_l}_{j_1,\dots,j_s}=\left[\left(i_l,j_1,\dots,j_s\right),\left(j_1,i_l,j_2,\dots,j_s\right),\dots,\left(j_1,\dots,j_s,i_l\right)\right]\in V^n_{s+1}.$$

Bizonyítás. Mivel $(X(t),t\geq 0)$ Markov-folyamat, ezért sűrűségfüggvényei kielégítik a Kolgomorov-Chapman egyenleteket. Tekintsük a folyamatot rövid h ideig. Ekkor a következő összefüggések igazak:

$$q_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}}\left(x_1+h,\dots,x_k+h\right)=$$

$$=q_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}}\left(x_1,\dots,x_k\right)\left(1-(n-k)\mu h\right)\prod_{l=1}^k\frac{1-F_{i_l}\left(x_l+h\right)}{1-F_{i_l}\left(x_l\right)}+$$

$$+\prod_{l=1}^k\frac{1-F_{i_l}\left(x_l+h\right)}{1-F_{i_l}\left(x_l\right)}+\int\limits_0^\infty \tilde{q}_{i_1',\dots,j_{n-k}',\dots,i_k';j_1,\dots,j_{n-k-1}}\left(x_1',\dots,y'\dots,x_k'\right)\times$$

$$\times\frac{f_{j_{n-k}}'\left(y\right)h}{1-F_{j_{n-k}}\left(x_l\right)}dy+o\left(h\right),$$

$$q_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}}\left(x_1+h,\dots,x_{l-1}+h,0,x_{l+1}+h,\dots,x_k+h\right)h=$$

$$=o\left(h\right)+\prod_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^k\frac{1-F_{i_s}\left(x_s+h\right)}{1-F_{i_s}\left(x_s\right)}\times$$

$$\times \mu h \sum_{V^{i_l}_{j_1,\dots,j_{n-k}}} \tilde{q}_{i_1,\dots,i_{l-1};i_{l+1},\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}} \left(x_1,\dots,x_{l-1},x_{l+1},\dots,x_k\right)$$

$$0 \le n-k < r,\ \ l = 1,\dots,k \text{ esetén.}$$

Hasonlóan

$$q_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}} \left(x_1+h,\dots,x_k+h\right) =$$

$$= q_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}} \left(x_1,\dots,x_k\right)\left(1-r\mu h\right) \prod_{l=1}^{k} \frac{1-F_{i_l}\left(x_l+h\right)}{1-F_{i_l}\left(x_l\right)} +$$

$$+ \prod_{l=1}^{k} \frac{1-F_{i_l}\left(x_l+h\right)}{1-F_{i_l}\left(x_l\right)} \int_0^\infty \tilde{q}_{i_1',\dots,j_{n-k}',\dots,i\ddot{e}_k';j_1,\dots,j_{n-k-1}} \left(x_1^{'},\dots,y^{'},\dots,x_k^{'}\right) \times$$

$$\times \frac{f^{'}_{j_{n-k}}\left(y\right) h}{1-F_{j_{n-k}}\left(x_l\right)} dy + o\left(h\right),$$

$$q_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}} \left(x_1+h,\dots,x_{l-1}+h,0,x_{l+1}+h,\dots,x_k+h\right) h =$$

$$= o\left(h\right) + \prod_{\substack{s=1\\ s\neq l}}^{k} \frac{1-F_{i_s}\left(x_s+h\right)}{1-F_{i_s}\left(x_s\right)} \times$$

$$\times \mu h \sum_{V^{i_l}_{j_1,\dots,j_{n-k}}} \tilde{q}_{i_1,\dots,i_{l-1};i_{l+1},\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}} \left(x_1,\dots,x_{l-1},x_{l+1},\dots,x_k\right)$$

$$0 \le n-k < r,\ \ l = 1,\dots,k \text{ esetén.}$$

Végül

$$Q_{0;j_1,\dots,j_n} = Q_{0;j_1,\dots,j_n}\left(1-r\mu h\right) +$$

$$+ \int_0^\infty \tilde{q}_{j_n;j_1,\dots,j_{n-1}}\left(y\right) \frac{f_{j_n}\left(y\right) h}{1-F_{j_n}\left(y\right)} dy + o\left(h\right).$$

Ezekből az összefüggésekből a tétel állítását könnyen megkaphatjuk. A felírt összefüggések bal oldalát $\prod\limits_{l=1}^{k}\left(1-F_{i_l}\left(x_l+h\right)\right)$-val osztva, és figyelembe véve a normált sűrűségfüggvény definícióját, és $h \to 0$ határértéket véve kapjuk a tétel állítását.

A tétel (1), (3) egyenlőségeinek bal oldalán a parciális differenciálhányados szokásos jelölését használtuk fel. Ezt általában nem tehetjük meg, mivel a parciális differenciálhányados létezését nem tettük fel. Ezért használtuk a $[\ ]^*$ jelölést. Valójában $[\ ]^*$ az $(1, 1, \ldots, 1) \in R^k$ iránymenti deriváltat jelenti. A

$$\left[Q_{0;j_1,\ldots,j_n}, Q_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}\right],$$

$$(i_1, \ldots, i_k) \in C_k^n, \quad (j_1, \ldots, j_{n-k}) \in V_{n-k}^N, \quad k = 1, \ldots, n.$$

ergodikus eloszlás meghatározásához meg kell oldani az (1), (3) egyenleteket a (2), (4) határfeltételek mellett. Legyen

$$Q_{0;j_1,\ldots,j_n} = c_0,$$

$$q_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1, \ldots, x_k) = c_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Ekkor behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy kielégítik az (1), (3) egyenleteket a (2), (4) határfeltételek mellett, és ezek a c_k értékek rekurzióval kifejezhetők c_n függvényében. Nevezetesen

$$c_k = \left(r! r^{n-r-k} \mu^{n-k}\right)^{-1} c_n, \qquad 0 \le k \le n-r,$$

$$c_k = \left((n-k)! \mu^{n-k}\right)^{-1} c_n, \qquad n-r \le k \le n.$$

Ezek az egyenletek teljesen leírják a rendszer működését.

Jelölje $Q_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}$ annak a stacionárius valószínűségét, hogy a termináloknál az $(i_1, \ldots, i_k)$ indexű jobok vannak, és a központi egységnél lévő jobok indexei érkezési sorrendben $(j_1, \ldots, j_{n-k})$. Továbbá $Q_{i_1,\ldots,i_k}$ jelölje annak a stacionárius valószínűségét, hogy az $(i_1, \ldots, i_k)$ indexű jobok tartózkodnak a termináloknál. Igazolható, hogy

$$Q_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}} = (\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k})^{-1} c_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

A c_k-ra kapott összefüggést felhasználva kapjuk, hogy

$$Q_{i_1,\ldots,i_k} = (n-k)!\left(r!r^{n-r-k}\mu^{n-k}\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_k}\right)^{-1}c_n,$$

$$(i_1,\ldots,i_k) \in C_k^n, \qquad k = 0,1,\ldots,n-r.$$

Hasonlóan

$$Q_{i_1,\ldots,i_k} = \left(\mu^{n-k}\lambda_{i_1},\ldots,\lambda_{i_k}\right)^{-1}c_n,$$

$$(i_1,\ldots,i_k) \in C_k^n, \qquad k = n-r,\ldots,n.$$

Jelölje $\hat{Q}_k$ és $\hat{P}_l$ annak a stacionárius valószínűségét, hogy a termináloknál k, illetve a központi egységeknél l job tartózkodik. Ekkor világos, hogy

$$Q_{i_1,\ldots,i_n} = Q_{1,\ldots,n} = \hat{Q}_n,$$

$$\hat{Q}_k = \hat{P}_{n-k}, \qquad k = 0,\ldots,n.$$

Könnyen belátható, hogy

$$c_n = \hat{Q}_n\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right),$$

$$\hat{Q}_k = \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in C_k^n} Q_{i_1,\ldots,i_k},$$

ahol $\hat{Q}_n$ a $\sum\limits_{k=0}^{n} \hat{Q}_k = 1$ normalizáló feltételéből határozható meg.
Homogén esetben a következő eredményekhez jutunk.

$$\hat{Q}_k = \frac{n!}{r!k!r^{n-k-r}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-k}\hat{Q}_n, \qquad ha \;\; 0 \le k \le n-r,$$

$$\hat{Q}_k = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-k}\hat{Q}_n, \qquad ha \;\; n-r \le k \le n.$$

Ezért

$$\hat{P}_k = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \hat{P}_0, \qquad ha \;\; 0 \le k \le r,$$

$$\hat{P}_k = \frac{n!}{r!(n-k)!r^{k-r}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \hat{P}_0, \qquad ha \;\; r \le k \le n.$$

Ezek az eredmények megegyeznek az $< n/M/M/r >$ modell stacionárius valószínűségeire kapott eredményeivel. Látható, hogy ezek az $F_i(x)$ eloszlásfüggvény alakjától nem függnek, csak az $1/\lambda_i$ várható értékektől.

III.4.2. Rendszerjellemzők

(I.) *A terminálok kihasználtsága*

Jelölje $Q^{(i)}$ annak a stacionárius valószínűségét, hogy az i-edik job a terminálnál tartózkodik, vagyis

$$Q^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i \in (i_1,\ldots,i_k) \in C_k^n} Q_{i_1,\ldots,i_k}.$$

Nyilvánvalóan az i-edik terminál kihasználtsága

$$U^{(i)} = Q^{(i)}.$$

(II.) *A CPU-k kihasználtsága*

Az eddigiekhez hasonlóan egy konkrét CPU kihasználtsága

$$U_{CPU} = \frac{1}{r}\left(\sum_{k=1}^{r} k\hat{P}_k + r\sum_{k=r+1}^{n} \hat{P}_k\right) = \frac{\bar{r}}{r},$$

ahol r a foglalt CPU-k átlagos számát jelöli. Így a CPU-k összkihasználtsága $\bar{r}$.

(III.) *Átlagos várakozási és tartózkodási idők*

Tomkó (1981) szerint

$$Q^{(i)} = (1/\lambda_i)\left(1/\lambda_i + \bar{W}_i + 1/\mu\right)^{-1}.$$

Így az i-edik job átlagos várakozási ideje:

$$\bar{W}_i = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{1 - Q^{(i)}}{Q^{(i)}} - \frac{1}{\mu}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Az i-edik job központi egységnél eltöltött átlagos $\bar{T}_i$ ideje (várakozással és kiszolgálással eltöltött idő)

$$\bar{T}_i = \bar{W}_i + 1/\mu = \left(1 - Q^{(i)}\right)\left(\lambda_i Q^{(i)}\right)^{-1}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Mivel

$$\sum_{i=1}^{n}\left(1 - Q^{(i)}\right) = \bar{N},$$

ahol $\bar{N}$ jelöli a központi egységnél levő jobok átlagos számát, megkapjuk az $< n/\vec{G}/m/r >$ modellre vonatkozó Little-formulát

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{T}_i Q^{(i)} = \bar{N}.$$

Meg kell jegyeznünk, hogy a gépkiszolgálási probléma terminológiáját használva $U^{(i)}$ az i-edik gép kihasználtságát, $\bar{W}_i, \bar{T}_i$ az i-edik gép várakozási ill. rossz állapotban való átlagos tartózkodási idejét adja.

A modell tovább általánosítható oly módon, hogy pl. a kiszolgálási intenzitások függnek a rendszer állapotától, lásd Sztrik (1988a, 1988b).

Problémák

1. Az $M/G/1$ rendszer képleteiből származtassuk az $M/M/1$ jellemzőit!

2. Legyen $P_k(t) = P(N(t) = k)$. Továbbá legyen $P_k(t, x_0)dx_0 = P(N(t) = k, x_0 < X_0(t) \leq x_0 + dx_0)$, ahol $X_0(t)$ a t pillanatban a kiszolgálócsatornában tartózkodó igény eddig már eltelt kiszolgálási ideje.

a, Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\partial P_0}{\partial t} = -\lambda P_0(t) + \int_0^\infty P_1(t, x_0) r(x_0) dx_0,$$

ahol

$$r(x_0) = \frac{b(x_0)}{1 - B(x_0)}.$$

b, Legyen $P_k = \lim_{t\to\infty} P_k(t)$ és $P_k(x_0) = \lim_{t\to\infty} P_k(t, x_0)$.
Az a, pontból a következő stacionárius eredmény adódik:

$$\lambda p_0 = \int_0^\infty P_1(x_0) r(x_0) dx_0.$$

Igazoljuk az egyensúlyi helyzetre vonatkozó alábbi eredményeket (ahol $P_0(x_0) := 0$):

$$(i) \qquad \frac{\partial P_k(x_0)}{\partial x_0} = -(\lambda + r(x_0))P_k(x_0) + \lambda P_{k-1}(x_0), \quad k \geq 1;$$

$$(ii) \qquad P_k(0) = \int_0^\infty P_{k+1}(x_0) r(x_0) dx_0, \quad k > 1;$$

(iii) $$P_1(0) = \int_0^\infty P_2(x_0)r(x_0)dx_0 + \lambda P_0.$$

c, A b, pontban felírt négy egyenlet meghatározza a stacionárius valószínűségeket, ha még egy megfelelő normáló egyenletet is hozzájuk veszűnk. Fejezzük ki ezt a normáló egyenletet P_0 és $P_k(x_0)$ segítségével!

d, Legyen $R(z, x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x_0)z^k$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{\partial R(z, x_0)}{\partial x_0} = (\lambda z - \lambda - r(x_0))R(z, x_0),$$

és

$$zR(z, 0) = \int_0^\infty r(x_0)R(z, x_0)dx_0 + \lambda z(z-1)P_0.$$

e, Mutassuk meg, hogy a d, pontbeli $R(z, x_0)$ a következő:

$$R(z, x_0) = R(z, 0)e^{-\lambda x_0(1-z) - \int_0^{x_0} r(y)dy},$$

ahol

$$R(z, 0) = \frac{\lambda z(z-1)P_0}{z - B^*(\lambda - \lambda z)}.$$

f, Legyen $R(z) := \int_0^\infty R(z, x_0)dx_0$; mutassuk meg, hogy

$$R(z) = R(z, 0)\frac{1 - B^*(\lambda - \lambda z)}{\lambda(1-z)}.$$

h, $Q(z)$ III.1.4-beli definíciójával összhangban definiáljuk a

$$Q(z) = P_0 + R(z)$$

mennyiséget. Mutassuk meg, hogy az így megadott $Q(z)$ egyenlő az első P-H-transzformáltegyenletben kifejezettel!

3. Az $< m/M/G/1 >$ rendszer formuláiból származtassuk az $< m/M/M/1 >$ modell megfelelő eredményeit!

IV. Irodalom

IV.1. Valószínűségszámítás és sztochasztikus folyamatok

Bhat U. N. (1984)
Elements of Applied Stochastic Processes
John Wiley and Sons, New York

Feller W. (1978)
Bevezetés a valószínűségszámításba és alkalmazásaiba
Műszaki Könyvkiadó, Budapest

Gihman I. I. – Szkorohod A. D. (1975)
Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe
Műszaki Könyvkiadó, Budapest

Gnedenko B. V. – Beljajev J. K. – Szolovjev A. D. (1970)
A megbízhatóságelmélet matematikai módszerei
Műszaki Könyvkiadó, Budapest

Goodman R. (1988)
Introduction to Stochastic Models
The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc.
Menlo Park

Karlin S. – Taylor H. M. (1985)
Sztochasztikus folyamatok
Gondolat, Budapest

Kijima M. (1997)
Markov Processes for Stochastic Modeling
CHAPMAN AND HALL, LONDON

Medgyessy P. – Takács L. (1957)
Valószínűségszámítás
TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

Medhi J. (1982)
Stochastic Processes
WILEY EASTERN LIMITED, NEW DELHI

Nelson R. (1995)
Probability, Stochastic Processes, and Queueing Theory
SPRINGER-VERLAG, NEW YORK

Osaki S. (1992)
Applied Stochastic System Modelling
SPRINGER-VERLAG, BERLIN

Rényi A. (1954), (1966)
Valószínűségszámítás
TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST

Ross S. M. (1970)
Applied Probability Models with Optimization Applications
HOLDEN-BAY, SAN FRANCICO

Takács L. (1960)
Stochastic Processes, Problems and Solutions
METHUEN, LONDON

Takács L. (1967)
Combinatorical Methods in the Theory of Stochastic Processes
John Wiley, New York

Timjs H. C. (1968)
Stochastic Modelling and Analysis: A Computational Approach
John Wiley, New York

Tomkó J. (1968)
A Markov-folyamatok elemei és néhány operációkutatási vonatkozása
Bolyai János Matematikai Társulat kiadványa, Budapest

Tomkó J. (1977)
Sztochasztikus folyamatok
Egyetemi jegyzet, KLTE, Debrecen

Tomkó J. (1981)
On Sojourn Times for Semi-Markov Processes
14th European Meeting of Statisticians, Wroclav, p. 297

Tomkó J. (1982)
Tartózkodási idő problémák Markov-láncokra
Alkalmazott Matematikai Lapok, **8**, 91-106.

Wentzel E. – Ovcharov L. (1986)
Applied Problems in Probability Theory
Mir Publisher, Moscow

IV.2. Sorbanállási elmélet

Boxma O. J. – Syski R. (1988)
Queueing Theory and its Applications - Liber Amicorum
for J. W. Cohen
Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam

Cohen J. W. (1976)
On Regenerative Processes in Queueing Theory,
Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems
Springer-Verlag, Berlin, p. 121

Cohen J. W. (1982)
The Single Server Queue
Revised edition
North-Holland, Amsterdam

Cooper R. B. (1981)
Introduction to Queueing Theory
Second Edition
North-Holland, Amsterdam

Cooper R. B. (1990)
Queueing Theory, in Handbook of Operational Research and
Management Science, Vol. 2. Stochastic Models,
Heyman D. P. – Sobel M. J. (Editors)
Elsevier Science Publishers, Amsterdam

Cox D. R. – Smith W. L. (1961)
Queues
Methuen, London

Csige L. – Tomkó J. (1982)
A gépkiszolgálási probléma exponenciális eloszlások esetén
Alk. Mat. Lapok, 8ë., 107-124.

Gnedenko B. V. – Kőnig D. (Editors) (1983), (1984)
Handbuch der Bedienungstheorie,
Vol. I., Vol. II.
Akademie-Verlag, Berlin

Gnedenko B. V. – Kovalenko I. N. (1989)
Introduction to Queueing Theory
Second Edition
Birkhauser, Boston

Gross D. – Harris C. M. (1985)
Fundamentals of Queueing Theory
Second Edition
John Wiley and Sons, New York

Jaiswal N. K. (1968)
Priority Queues
Academic Press, New York

Khintchine A. Y. (1969)
Mathematical Methods in the Theory of Queueing
Second Edition
Hafner Publ. Comp., New York

Kleinrock L. (1976)
Queueing Systems, Vol. II.: Computer Applications
John Wiley andd Sons, New York

Kleinrock L. (1979)
Sorbanállás-Kiszolgálás; Bevezetés a tömegkiszolgálási rendszerek elméletébe
Műszaki Könyvkiadó, Budapest

Newell G. F. (1971)
Applications of Queueing Theory
Chapman and Hall, London

Pósafalvi A. – Sztrik J. (1987)
On the Heterogeneous Machine Interference with Limited Server's Availability
European Journal of Operational Research, **28**, 321-328.

Pósafalvi A. – Sztrik J. (1989a)
A Numerical Approach to the Repairman Problem with Two Different Types of Machines
Journal of Operational Research Society, **40**, 707-803.

Pósafalvi A. – Sztrik J. (1989b)
On the Heterogeneous Machine Interference with Priority and Ordinary Machines
European Journal of Operational Research, **41**, 54-63.

Prabhu N. U. (1987)
A Bibliography of Books and Survey Papers on Queueing Systems: Theory and Applications
Queueing Systems, **2**, 393-398.

Saaty T. L. (1961)
Elements of Queueing Theory
McGraww Hill, New York

Stecke K. E. – Aronson J. E. (1985)
Review of Operator / Machine Interference Models
Int. J. Prod. Res. 23., 129-151.

Sztrik J. (1981)
A gépkiszolgálási problémáról
Egyetemi doktori értekezés
KLTE, Debrecen

Sztrik J. (1983)
On the Machine Interference Problem
Pulicationes Mathematicae, **30**, 165-175.

Sztrik J. (1985)
On the Finite-Source $\vec{G}/M/r$ Queues
European Journal of Operational Research, **20**, 261-268.

Sztrik J. (1987)
On the $/m, n/\vec{M}/\vec{M}/1$ Priority Queues and their Applications
Problems of Control and Information Theory, **16**, 169-186.

Sztrik J. (1988a)
On the $\vec{G}/M/r/FIFO$ Machine Interference Model
with State-Dependent Speeds
Journal of Operational Research Society, **39**, 201-207.

Sztrik J. (1988b)
Some Contribution to the Machine Interference Problem
with Heterogeneous Machines
Journal of Information Processing and Cybernetics, **24**,
137-143.

Sztrik J. (1989)
Véges forrású sorbanállási rendszerek vizsgálata
Kandidátusi értekezés
KIEVI ÁLLAMI EGYETEM, (OROSZUL)

Sztrik J. (2000)
Kulcs a sorbanállási elmélethez és alkalmazásaihoz
DEBRECENI EGYETEMI KIADÓ

Takagi H. – Boguslavsky L. B. (1991)
A supplementary Bibliography of Books
on Queueing Analysis and Performance Evaluation
QUEUEING SYSTEMS 8, 313-322.

Takács L. (1957)
Bizonyos várakozási idő problémáról
MTA III. OSZT. KÖZL. VII/1957, 183-197.

Takács L. (1962)
Introduction to the Theorëy of Queues
OXFORD UNIVERSITY PRESS, OXFORD

White J. A. – Schmidt J. W. – Bennett G. K. (1975)
Analysis of Queueing Systems
ACADEMIC PRESS, NEW YORK

IV.3. Számítógéprendszerek modellezése

Allen A. O. (1978)
Probability, Statistics dand Queueing Theory
with Computer Science Applications
Academic Press, New York

Almási B. – Sztrik J. (1993)
A Queueing Model for a Non-homogeneous Terminal System
Subject to Breakdowns
Comp. and Maths. with Appl., **25**, 105-111.

Asztalos D. (1979)
Véges forrású tömegkiszolgálási modellek alkalmazása
számítógéprendszerekre
Alk. Mat. Lapok **5**, 89-101.

Asztalos D. (1980)
Optimal Control of Finite Source Priority Queues
with Computer System Applications
Comp. and Maths with Appl. **6**, 425-431.

Daigle J.N. (1992)
Queueing Theory for Telecommunications
Addison-Welsey Publishing Company, Reading

Ferrari D. (1978)
Computer Systems Performance Evaluation
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey

Gál T. – Sztrik J. (1990a)
A Queueing Model for a Terminal System Subject to Breakdowns
Comp. and Maths. with Appl. **19**, 143-147.

Gál T. – Sztrik J. (1990b)
A Recursive Solution of a Queueing Model for a Multi-Terminal System Subject to Breakdowns
PERFORMANCE EVALUATION, **11**, 1-7.

Gelenbe E. – Mitrani I. (1980)
Analysis and Synthesis of Computer Systems
ACADEMIC PRESS, LONDON

Harrison P. and Patel N.M. (1993)
Performance Modelling of Communication Networks and Computer Architectures
ADDISON-WELSEY PUBLISHING COMPANY, READING

Haverkort B. (1998)
Performance of Computer Communication Systems
A Model-Based Approach
JOHN WILEY AND SONS, NEW YORK

Kobayashi H. (1978)
Modeling and Analysis:
An Introduction to System Performance Evaluation Methodology
ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, REDDING

Lavenberg S. S. (1983)
Computer Performance Modeling Handbook
ACADEMIC PRESS, NEW YORK

Louchard G. – Latouche G. (1983)
Probability Theory and Computer Science
ACADEMIC PRESS, LONDON

Mitrani I. (1987)
Modelling of Computer and Communication Systems
Cambridge University Press, Cambridge

Sauer C. H. – Chandy K. M. (1981)
Computer Systems Performance Modeling
Prentice-Hall, Englewood Cliffs

Sztrik J. – Tomkó J. (1982)
Multiprogramozás inhomogén programokkal
Alk. Mat. Lapok, **8**, 285-296.

Takagi H. (1990)
Bibliography on Performance Evaluation, Stochastic Analysis of Computer and Communication Systems
North-Holland, Amsterdam, p. 853-862.

Takagi H. (1991)
Queueing Analysis, A Foundation of Performance Evaluation Vol. 1.
Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam

Takagi H. (1993)
Queueing Analysis, A Foundation of Performance Evaluation Vol. 2.
Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam

Trivedi K.S. (1982)
Probability and Statistics with Reliability , Queueing, and Computer Science Applications
Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs

Függelék

A függelékben a generátorfüggvény (melyet néha z-transzformáltnak is nevezünk) és a Laplace-transzformált néhány olyan tulajdonságát és rájuk vonatkozó azonosságokat tekintünk át, melyeket a jegyzetbeli levezetések folyamán — és általában a sorbanállási elméletben — használni lehet. Ezen két transzformált alakja és tulajdonságai igen hasonlóak. Mindössze alapvető definíciókra és formulákra szorítkozunk, és talán hasznos is lesz, hogy a felhasznált nem teljesen alapszintű apparátusról külön is ejtünk néhány szót. Ajánlott irodalom pl. Karlin–Taylor (1985), Medhi (1982), Osaki (1992), Rényi (1954, 1966).

A Generátorfüggvény

Elsőként foglalkozzunk a generátorfüggvénnyel. Tekintsünk egy f_n diszkrét idejű függvényt, amely csak a nemnegatív egész számokra vesz fel nem nulla értéket. Ezt a végtelen sorozatot szeretnénk jellemezni egyetlen olyan függvénnyel, hogy abból vissza tudjuk kapni az eredeti sorozatot, ha szükségünk van rá.

1. Definíció. Legyen $f_n = 0$, ha $n < 0$, $n \in \mathbf{Z}$. Az f_n sorozat *z-transzformáltja* vagy *generátorfüggvénye*

$$G(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \qquad z \in \mathbf{C}.$$

Egy sorozatnak létezik generátorfüggvénye, ha a sorozat tagjai nem nőnek exponenciálisnál gyorsabban, azaz ha létezik $a > 0$, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|f_n|}{a^n} = 0$.

Egy adott f_n sorozat $G(z)$ generátorfüggvénye egyértelmű.

Jelölés: $f_n \Longleftrightarrow G(z)$

Valószínűségszámítási problémáknál gyakran kell használnunk a $\{P_k\}_0^\infty$ eloszlás $G(z)$ generátorfüggvényét, vagyis ebben az esetben $f_n = P_n$. Ekkor nyilvánvalóan $G(z)$ analitikus a $|z| \leq 1$ értékekre.

A Laplace-transzformált

A hasonló tulajdonságok miatt ezen szakasz gondolatmenete hasonlít az előzőéhez. Most azonban folytonos idejű $f(t)$ függvényeket tekintünk, melyek a folytonos t paraméter nemnegatív értékére vesznek csak fel nullától különböző értékeket. ($f(t) = 0$ ha $t < 0$.) Szeretnénk ezt a függvényt úgy transzformálni, hogy a transzformált egy új komplex változó, mondjuk s függvénye legyen, ne pedig t függvénye. Most az e^{-st}-vel szorozzuk meg a függvényt.

2. Definíció. Legyen $f(t), t \in \mathbf{R}$ függvény. Ekkor az $f(t)$ függvény *Laplace-transzformáltja*

$$F^*(s) := \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt, \qquad s \in \mathbf{C}.$$

Adott $f(t)$ függvény $F^*(s)$ Laplace-transzformáltja egyértelmű.

Jelölés: $f(t) \Longleftrightarrow F^*(s)$.

Ha $f(t)$ integrálja véges, akkor $F^*(s)$ a $Re(s) \geq 0$ félsíkon analitikus, így $F^*(0) = \int_0^\infty f(t)\, dt$.

A Laplace-Stieltjes transzformált

3. Definíció. Az $f(t)$, $t \in \mathbf{R}$ függvény *Laplace-Stieltjes transzformált*ján az

$$(L-S)\, f(s) = \int_0^\infty e^{-st} df(t), \qquad s \in \mathbf{C}(\mathbf{L}-\mathbf{S})$$

függvényt értjük.

Mivel a Laplace- és Laplace-Stieltjes transzformáltak nagyon sok hasonló tulajdonsággal rendelkeznek, mi csak a Laplace-transzformáltra vonatkozó összefüggéseket soroljuk fel. Fontos speciális eset valamely sűrűségfüggvény Laplace-transzformáltja. Ez nyilvánvalóan egyben a hozzá tartozó eloszlásfüggvény Laplace-Stieltjes transzformáltja is.

Az 1. ill. 2. táblázatban a generátorfüggvény ill. a Laplace-transzformált legfontosabb tulajdonságait soroljuk fel.

1. táblázat

A generátorfüggvény néhány fontos tulajdonsága

	Sorozat $\Longleftrightarrow$	Generátorfüggvény
1.	$f_n,\ n=0,1,2,\ldots$	$G(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n z^n$
2.	af_n+bg_n	$aG(z)+bH(z)$
3.	$a^n f_n$	$f(az)$
4.	$f_{\frac{n}{k}},\ n=0,k,2k,\ldots$	$G(z^k)$
5.	$f_{n+k},\ k>0$	$\frac{G(z)}{z^k}-\sum\limits_{i=1}^{k} z^{i-k-1}f_{i-1}$
6.	$f_{n-k},\ k>0$	$z^k G(z)$
7.	$n(n-1)\cdots(n-m+1)f_n$	$z^m\frac{d^m}{dz^m}G(z),\quad m\geq 1$
8.	$f_n * g_n := \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_{n-k}g_k$	$G(z)H(z)$
9.	f_n-f_{n-1}	$(1-z)G(z)$
10.	$\sum\limits_{k=0}^{n} f_k,\ n=0,1,2,\ldots$	$\frac{G(z)}{1-z}$
11.	$\sum\frac{\partial}{\partial a}f_n$	$\frac{\partial}{\partial a}G(z)$
12.	Sorösszeg tulajdonság	$G(1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$
13.	Alternáló előjelű összeg	$G(-1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n$
14.	Kezdetiérték-tétel	$G(0)=f_0$
15.	Középérték-tétel	$\frac{1}{n!}\frac{d^nG(z)}{dz^n}\Big\vert_{z=0}=f_n$
16.	Határérték-tétel	$\lim\limits_{z\to 1}(1-z)G(z)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n$

2. táblázat

A Laplace-transzformált néhány fontos tulajdonsága

	Függvény $\Longleftrightarrow$	Transzformált
1.	$f(t),\ t \geq 0$	$F^*(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
2.	$af(t) + bg(t)$	$aF^*(s) + bG^*(s)$
3.	$f\left(\frac{t}{a}\right), \quad (a > 0)$	$aF^*(as)$
4.	$f(t-a)$	$e^{-as}F^*(s)$
5.	$e^{-at}f(t)$	$F^*(s+a)$
6.	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n F^*(s)}{ds^n}$
7.	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_{s_1=s}^\infty F^*(s_1)ds_1$
8.	$\frac{f(t)}{t^n}$	$\int\limits_{s_1=s}^\infty ds_1 \int\limits_{s_2=s_1}^\infty ds_2 \ldots \int\limits_{s_n=s_{n-1}}^\infty ds_n F^*(s_n)$
9.	$f(t) * g(t) = \int\limits_0^t f(t-x)g(x)dx$	$F^*(s)G^*(s)$
10.	$\frac{df(t)}{dt}$	$sF^*(s)$
11.	$\frac{d^n f(t)}{dt^n} := f^{(n)}(t)$	$s^n F^*(s)$
12.	$\frac{\partial}{\partial a} f(t)$ a paraméter a	$\frac{\partial}{\partial a} F(s)$
13.	Integráltulajdonság	$F^*(0) = \int\limits_0^\infty f(t)dt$
14.	Kezdetiérték-tétel	$\lim\limits_{s\to\infty} sF^*(s) = \lim\limits_{t\to 0} f(t)$
15.	Határérték-tétel	$\lim\limits_{s\to 0} sF^*(s) = \lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ ha $sF^*(s)$ analitikus $Re(s) \geq 0$ esetén

Tartalomjegyzék