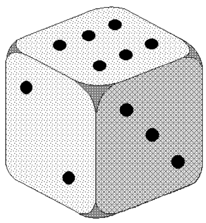
ESZTERHÁZY KÁROLY TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA

Tómács Tibor

A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ALAPJAI



EKTF LÍCEUM KIADÓ, EGER
1997

ESZTERHÁZY KÁROLY TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA

Tómács Tibor

A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ALAPJAI

EKTF LÍCEUM KIADÓ, EGER
1997

Lektorálta:
Dr. Sztrik János
egyetemi docens

EMTEX—JATEX

A kiadásért felelős:
az Eszterházy Károly Tanárképző Főiskola főigazgatója
Megjelent az EKTF Líceum Kiadó műszaki gondozásában
Kiadóvezető: Csőke Lajos
Felelős szerkesztő: Rimán János
Műszaki szerkesztő: Tómács Tibor
Megjelent: 1997. május Példányszám: 300

Készült: Molnár és Társa '2001' Kft. nyomdája, Eger
Ügyvezető igazgató: Molnár György

Tartalomjegyzék

Előszó

Az utóbbi években Magyarországon a felsőoktatás drasztikus változásokon ment át, és ez a folyamat még korántsem zárult le. Ebben a változásban a hazai főiskoláknak, különösen a tanárképző főiskoláknak, igen nehéz szerep jutott. Tudniillik az a törekvés, hogy a tanárképzés egységesen egyetemi szintű legyen, megköveteli, hogy a főiskolai képzés tantervei – ezen belül természetesen a matematika tanterv is – teljes egészében megújuljanak. Ebben a folyamatban az egri Eszterházy Károly Tanárképző Főiskola célul tűzte ki, hogy azok a hallgatók, akik főiskolai tanulmányaikat a diploma megszerzése után egyetemen szeretnék folytatni, zökkenőmentesen tehessék ezt meg azáltal, hogy az addig tanultak szerves részét képezzék az egyetemi anyagnak.

Emiatt vált szükségessé az is, hogy a főiskolánk valószínűségszámítás tematikája közelebb kerüljön az egyetemi anyaghoz. Ezt a célt szolgálja ezen jegyzet. Bár számos egyetem adott már ki igen magas színvonalú, kitűnő jegyzetet, mégis úgy gondolom, hogy az adott helyzet megkövetel egy olyan kiadványt, ami speciálisan beleillik az egri főiskola jelenlegi tanmenetébe.

Igyekeztem a lehetőségekhez képest precíz matematikai kiépítését adni a valószínűségszámításnak, bár ez ellen szól az a tény, hogy nem használhattam mértékelméleti fogalmakat és tételeket, mert azt jelenleg nálunk még nem tanítják. Ha ez akadálya volt valamely fogalom, vagy tétel általános megfogalmazásának – mint például a valószínűségi változónál, vagy a várható értéknél –, ott mindig utaltam rá, és megadtam azon irodalmat, ahol az érdeklődő hallgatók utánanézhetnek.

A klasszikus valószínűségi mező témakörénél nem tárgyaljuk a hozzá kapcsolódó kombinatorikát, ugyanis ez az egri főiskolán külön tantárgy.

Fontos megjegyezni, hogy bár a jegyzet tartalmaz megértést könnyítő kidolgozott feladatokat, mégis az önálló tanuláshoz szükséges például a következő feladatgyűjtemények használata:

Denkinger Géza: Valószínűségszámítási gyakorlatok, Tankönyvkiadó, Budapest

Solt György: Valószínűségszámítás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest

Denkinger Géza feladatgyűjteményében az olvasó megtalálhatja a példamegoldásokhoz nélkülözhetetlen különböző táblázatokat is, így a jegyzet ezeket nem tartalmazza.

A használt jelölések általában megfelelnek a hallgatók által már korábban tanult analízis illetve algebra jelöléseinek. A gyakrabban előfordulókat külön is kiemeltük a jegyzet végén.

A kézírat megírásakor nagyon sok hasznos szakmai illetve szerkesztési tanácsot adott Fazekas István, Sztrik János és Rimán János, akiknek ezúton is szeretnék köszönetet mondani.

Eger, 1997. április 1. Tómács Tibor

Rövid történeti áttekintés

Az első ismert valószínűségszámításhoz kapcsolódó problémát **Luca Pacioli** (1445?–1517) olasz matematikus írta le 1494–ben megjelent *Summa de arithmetica* (Az aritmetika összefoglalása) című könyvében. A feladat a következő. Egy akkoriban népszerű labdajátékban az nyer, aki először ér el 6 pontot. A játék viszont félbeszakad, ha az egyik félnek 5, a másiknak 2 pontja van. Ilyenkor hogyan kell igazságosan osztozni a letétbe helyezett pénzen? Pacioli a feladat megoldásaként az 5:2 arányban való osztozkodás jogosultságát mondta ki. Tévedését hamar felfedezte **Tartaglia** (Niccolo Fontana; 1500?–1557) és **Girolamo Cardano** (1501–1576) olasz matematikusok, de helyes eredményt ők sem adtak.

A pontos megoldást csak jóval később **Blaise Pascal** (1623–1662) és **Pierre Fermat** (1601–1665) francia matematikusok találták meg. Pascal figyelmét a valószínűségszámításra nem ez a feladat irányította, hanem **Chevalier de Méré** lovag (Sieur de Bossay; 1607–1684) egy kérdése. De Méré lovag nem volt matematikus, de megszállott szerencsejátékosként számos érdekes megfigyelésre tett szert. Az egyik ilyen tapasztalata, amit Pascalnak is megírt, a következő. Szerinte előnyösebb arra fogadni, hogy egy kockával dobva, négy dobásból legalább egyszer hatost dobunk, mint arra, hogy két kockával 24-szer dobva legalább egyszer előfordul két hatos. A kérdés az, hogy miért mutatja ezt a gyakorlat, amikor az első esetben a dobások száma úgy aránylik a lehetséges esetek számához (4:6), mint a második esetben (24:36)? Ezen feladat kapcsán kezdett levelezni egymással Pascal és Fermat. Pascal 1654-ben egy levelében írta le azon szándékát, miszerint ki akarja dolgozni a véletlenek matematikáját. Innen számítjuk a valószínűségszámítás megszületését.

Christiaan Huygens (1629–1695) holland matematikus, fizikus, bár tudott Pascal és Fermat levelezéséről, a részleteket nem ismervén, ő maga is elkezdett foglalkozni a véletlenek matematikájával. Az 1657-ben megjelent *De ratiociniis in ludo aleae* (A kockajátékra vonatkozó megfontolásokról) című könyvében bevezette a matematikai remény fogalmát.

Komoly eredményt ért el **Jacob Bernoulli** (1654–1705) svájci matematikus *Ars coniectandi* (A találgatás tudománya) című könyvében. A könyv első része Huygens munkáját kommentálja és egészíti ki. A második rész az ismétlés nélküli variációt és kombinációt ismerteti, melyek a valószínűségszámítási feladatokban gyakran szerepet kapnak. A harmadik és negyedik rész feladatokat tartalmaz. A kockajátékokkal kapcsolatos példákban feltételezi, hogy a kocka szimmetriája miatt a különböző dobások valószínűsége azonos. (A valószínűség szó ebben a könyvben szerepel először.) A feladatok megoldása azt mutatja, hogy Bernoulli a valószínűséget úgy értelmezte, mint a „kedvező” és a „lehetséges” esetek számának hányadosa. (Ezt a megfogalmazást először **Piérre Simon Laplace** (1749–1827) francia matematikus, fizikus használja 1812-ben.) Azt, hogy a kocka minden oldalára egyforma valószínűséggel eshet, Bernoulli kísérlettel is ellenőrzte. A kockadobást nagyon sokszor elvégezte, s közben azt figyelte, hogy például a hatos számnak mennyi a relatív gyakorisága, mely azt mutatja, hogy az addig elvégzett dobások számához képest mennyi a hatos dobások aránya. Tapasztalata szerint ez az érték a dobások számának növelésével egyre közelebb kerül az 1/6-hoz. Ezt a törvényt általánosítva bizonyította, hogy egy esemény relatív gyakorisága, az esemény nagyszámú bekövetkezése esetén várható, hogy igen közel kerül a valószínűséghez. Ezt a törvényt **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716) német matematikussal folytatott levelezésében „nagy számok törvényének” nevezte el. Bernoulli tehát észrevette azt a lehetőséget, hogy a valószínűségszámítást statisztikai adatokra is alkalmazhatja. Bernoulli nevéhez fűződik még az úgynevezett binomiális eloszlás meghatározása is.

A XVIII. században a valószínűségszámítás alkalmazási területe már túlmutatott a szerencsejátékokon. Felhasználták biztosítási ügyekben, kereskedelmi nyereség és kockázat kérdéseiben, céllövészettel kapcsolatos problémákban stb.

Georges Buffon (1707–1788) francia természettudós 1777-ben tette fel a következő kérdést. Egy síkra rajzoljunk egymástól d távolságra párhuzamos egyeneseket. Erre a síkra véletlenszerűen dobjunk egy $l < d$ hosszúságú tűt. Mi a valószínűsége annak, hogy a tű ráesik valamelyik egyenesre? Buffon a megoldásában bevezeti a valószínűségszámítás geometriai módszerét.

Ezt a feladatot Laplace általánosította arra az esetre, amelyben a síkon két párhuzamossereg van. Laplace tanulmányait az 1812-ben megjelent *Théorie analytique des probabilités* (A valószínűség analitikai elmélete) című könyvében összegzi.

Siméon Denis Poisson (1781–1840) francia matematikus általánosította a nagy számok Bernoulli-féle törvényét egymástól függő eseményekre is. Ennek vizsgálata során meghatározta a binomiális eloszlás határesetét, amelynek az alkalmazhatósága igen sokrétű, például csillagászatban, mikroszkópikus biológiában, Brown-féle mozgásokban stb.

Ezután Nyugat-Európában a valószínűségszámítás fejlődése egy időre lelassult, mert a megfelelő elméleti alapok hiányában a hibás alkalmazások sok csorbát ejtettek a tekintélyén. A XIX. században a valószínűségszámítás fejlődésének középpontja áthelyeződött Oroszországba. Az első orosz nyelvű valószínűségszámítás tárgyú könyvet **Viktor Jakovlevics Bunyakovszkij** (1804–1889) írta *Osznovanyija matematicseszkoj teorij verojatnosztej* (A valószínűség matematikai elméletének alapjai) címmel. Ebben áttekinti a valószínűségszámítás addig elért eredményeit. A tudományág további lehetőségeit **Pofnutyij Lvovics Csebisev** (1821–1894) alapozza meg. Négy tanulmányával megteremtette a pétervári iskolát. 1866-ban bizonyítja a Bernoulli-féle nagy számok törvényének legáltalánosabb alakját. A pétervári iskola kiemelkedő alakjai még **Andrej Andrejevics Markov** (1865–1922) és **Alekszandr Mihajlovics Ljapunov** (1857–1918).

Új irányzatot **Augustus de Morgan** (1806–1871), **Emanuel Czuber** (1851–1925) és **George Boole** (1815–1864) valósítottak meg a valószínűségszámítás matematikai logikára való alapozásával. Ez az irányzat még ma is számos tisztázásra váró problémát rejt magában.

A valószínűségszámítás modern irányzatának, az axiomatikus felépítésnek az úttörői **Richard Mises** (1883–1958) német és **Szergej Natanovics Bernstein** (1880-1968) ukrán matematikusok voltak. Ők még logikai hibákat követtek el, amit **Alekszandr Jakovlevics Hincsin** (1894–1959) vett észre.

Az első elfogadható axiómarendszert **Andrej Nyikolajevics Kolmogorov** (1903–1987) orosz matematikus írta le 1933-ban, a *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (A valószínűségszámítás alapfogalmai) című Berlinben megjelent könyvében. Kolmogorov az axiómái segítségével minden addigi fontos eredményt le tudott vezetni. Néhány kérdéssel kapcsolatban azonban nehézségek adódtak ebben az axiómarendszerben is. Ezeket a nehézségeket **Rényi Alfréd** (1921–1970) magyar matematikus általánosított axiómarendszere oldja meg.

Rényi Alfréd előtt is számos magyar matematikus gazdagította a valószínűségszámítás tudományát. Közülük két tudóst emelünk ki, **Hatvani Istvánt** (1718–1786) és **Jordán Károlyt** (1871–1959). Hatvani István debreceni professzor nevéhez fűződik az első Magyarországon megjelenő valószínűségszámítási munka, mely az *Introductio ad principia philosophiae solidioris* (Bevezetés a tiszta filozófia elemeibe) című könyvének egyik része. Ebben összefoglalja a korabeli valószínűségszámítási ismereteket, továbbá ezeket a hazai viszonyokra alkalmazza. A valószínűségszámítás magyarázatára számos gyakorlati példát hozott fel. Halálozási táblázatokat értékelt ki matematikai módszerekkel, így Hatvani nemcsak a magyarországi valószínűségszámításnak, hanem a statisztikának is úttörője volt. Tudományos értékű valószínűségszámítási kutatások csak az 1910-es években indultak meg hazánkban Jordán Károly révén. Első eredményei a geometriai valószínűség elméletéhez fűződik. Ő volt az első, a valószínűségszámításban fontos eredményeket elérő magyar matematikus.

A XX. században a valószínűségszámításból több jelentős önálló terület fejlődött ki. Az egyik ilyen az információelmélet, melynek megalapozója **Claude Elwood Shannon** (1916–) amerikai mérnök. Ezt a kutatási területet hasznosítja a híradástechnika, számítástechnika, kibernetika, biológia, pszichológia, nyelvészet, közgazdaságtan stb. Shannon egyébként azt kutatta, hogy miképpen lehet a legkevesebb jellel a legtöbb információt továbbadni.

A valószínűségszámításból kinövő másik fontos ág az úgynevezett játékelmélet, melynek megalapozója **Neumann János** (1903–1957) magyar matematikus. Az elmélet érdekessége, hogy ma már a közgazdaságtan modelljeként használják.

Irodalom

Ribnyikov, K.A., *A matematika története*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.

Sain Márton, *Matematika történeti ABC*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1993.

Sain Márton, *Nincs királyi út!*, Gondolat, Budapest, 1975.

Bevezetés

Minden természet– és társadalom tudományág foglalkozik olyan jelenségekkel, melyekben ha az általunk imert és figyelembe vett körülmények fennállnak, akkor egy bizonyos esemény szükségszerűen bekövetkezik. Ezeket **meghatározott eseményeknek** nevezzük.

Bizonyos jelenségeknél az összes számításba jöhető körülmény figyelembe vétele sokszor lehetetlen, de legalábbis igen nehéz. Ennek oka lehet például, hogy a jelenség hátterében meghúzódó körülmények rendszere a tudomány mai állása szerint még nem teljesen feltárt, vagy nem tudjuk mérni őket, vagy számuk túl nagy és kapcsolatuk nagyon bonyolult. Ilyenkor előfordulhat, hogy egy esemény nem szükségszerűen következik be, vagyis a figyelembe vett körülmények összessége nem határozza meg a jelenség szükséges és elegendő okát. Az ilyen eseményeket **véletlen eseményeknek** nevezzük. Például, amikor egy dobókockával játszunk, akkor nem tudjuk figyelembe venni az összes körülményt, hogy milyen helyzetből indult, milyen impulzust kapott, a légellenállást, az asztallal való ütközést, a súrlódást stb., csak azt a tényt, hogy feldobtuk. Ez viszont nem határozza meg a dobás eredményét egyértelműen, így számunkra például a hatos dobása véletlen eseményt jelent. Másik példa a rádium atommagok bomlása. Ugyanis nem tudjuk megmondani, hogy pontosan mikor következik be a bomlás, mert az az atommagban lejátszódó folyamatoktól függ, amelyeket teljes egészében nem ismerünk és megfigyelni sem tudjuk.

Összegezve, egy esemény aszerint meghatározott vagy véletlen, hogy a figyelembe vett feltételek rendszere a jelenség lefolyását, azaz a figyelt esemény bekövetkezését vagy be nem következését meghatározza-e vagy sem.

Ha egy véletlen jelenség sokszor fordul elő azonos vagy közel azonos körülmények között, akkor **véletlen tömegjelenségről** beszélünk. Az ilyen típusú jelenségekről a véletlenszerűségük ellenére is áttekintést nyerhetünk. Vegyük példaként az előbb említett radioaktív bomlást. Bár minden egyes atommag bomlása véletlennek tekinthető az előzőek értelmében, mégis például egy urántömbben elhelyezkedő sokmilliárdnyi atommag esetében már előre meg tudjuk mondani, hogy egy meghatározott időn belül hány százalékuk fog elbomlani. Ez a bomlás úgynevezett exponenciális törvénye, melyet a valószínűségszámítás segítségével írhatunk le. Ezt a törvényt a mérések éppúgy alátámasztják, mint bármilyen más meghatározott, másszóval determinisztikus természeti törvényt, mint például az általános tömegvonzás törvényét vagy az elektrosztatikus kölcsönhatásra vonatkozó törvényt.

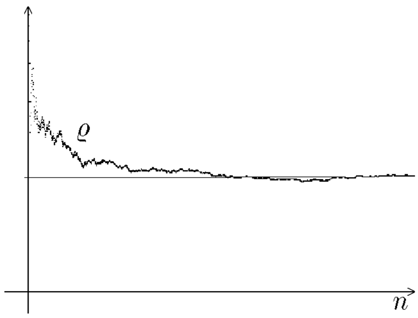
Tehát a valószínűségszámítás tárgya a véletlen tömegjelenségek vizsgálata, feladata pedig ezen jelenségek törvényszerűségeinek a feltárása.

Hogyan lehet ezt megtenni? Végezzünk el egy olyan kísérletet sokszor egymás után, azonos körülmények között, melynek kimenetele véletlenszerű. Tegyük fel, hogy egy végrehajtás eredménye független a többitől. Figyeljük egy lehetséges esemény bekövetkezését. Ha n kísérletből k-szor fordult elő a figyelt esemény, akkor a

$$\varrho : \mathbf{Z}^+ \to [0,1], \quad \varrho(n) := \frac{k}{n}$$

függvényt az esemény **relatív gyakoriságának** nevezzük.

TAPASZTALAT: *A véletlen tömegjelenségek egy tág osztályában, nagy n-ek esetén a relatív gyakoriság egy, az eseményre jellemző, jól meghatározott érték körül ingadozik.* (Lásd 1. ábra.)



1. ábra

A továbbiakban ezt az értéket a vizsgált esemény **valószínűségének** fogjuk nevezni. Ezen tapasztalat alapján axiómákat lefektetve lehetőség nyílik egy matematikai diszciplína kiépítésére. Természetesen egy axiómarendszer akkor jó, ha az elmélet visszadja a gyakorlati axiómát. Látni fogjuk a nagy számok törvényeivel foglalkozó fejezetben, hogy ez az elvárás teljesül.

Mindenekelőtt szükségünk lesz olyan eszközökre, amelyek alkalmasak az események közötti kapcsolatok leírására. Ezt halmazok segítségével oldjuk meg. Az események halmazokkal való azonosítása az alábbi példa alapján kézenfekvőnek tűnik.

Amikor egy dobókockával játszunk, milyen események lehetségesek? Egyes oldal, kettes oldal, ... vagy a hatos oldal van felül. A nekik megfelelő halmazok legyenek a következők:

$$\{1\}, \{2\}, \ldots, \{6\}.$$

Ezeket a továbbiakban **elemi eseményeknek** fogjuk nevezni.

De más események is elképzelhetők. Például az, hogy páros számot dobok. Ennek feleltessük meg a következő halmazt:

$$\{2,4,6\}.$$

Ezt az eseményt **összetett eseménynek** fogjuk hívni, mert felbontható nem triviális módon több esemény uniójára:

$$\{2,4,6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}.$$

Az is esemény, hogy egytől hatig valamilyen egész szám fog kijönni. Ezt **biztos eseménynek** nevezzük, melyet Ω-val jelölünk és a halmaz megfelelője

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Első hallásra furcsa, de az is esemény, hogy a hetes lesz felül. Az más kérdés, hogy ennek bekövetkezése lehetetlen. Éppen ezért ezt **lehetetlen eseménynek** fogjuk nevezni, és a halmaz megfelelője az üres halmaz lesz.

Végül azt is eseménynek kell tekinteni, ha egy esemény nem következik be. Például nem egyest dobok. Világos, hogy az ehhez tartozó halmaz:

$$\overline{\{1\}} = \{2,3,4,5,6\}.$$

Vegyük észre, hogy akármelyik eseményt is tekintjük, az a biztos esemény egy részhalmaza. Ezért a biztos eseményt **alaphalmaznak** is szokták nevezni.

Milyen fontos tulajdonságai vannak az eseményeknek? Mindenekelőtt kihangsúlyozzuk, hogy értelemszerűen minden ami teljesül a halmazokra, az teljesül az eseményekre is. Másrészt mivel a lehetséges események rendszerét az alaphalmaz részhalmazainak egy rendszerével reprezentáljuk (jelöljük ezt $\mathcal{A}$-val), ezért azt kell megvizsgálni, hogy ennek mik a tulajdonságai. Az eddigiek alapján hármat fogunk kiemelni.

(1) Az első, amit már kikötöttünk, hogy az alaphalmaz esemény, azaz benne van $\mathcal{A}$-ban. Ez a biztos esemény. (A továbbiakban is, ha eseményről beszélünk, egy olyan halmazt értünk rajta, ami benne van $\mathcal{A}$-ban.)

(2) Azt is láttuk, hogy egy esemény ellentettje is esemény.

(3) Végül, amiről még nem beszéltünk, de nyilvánvaló tulajdonság, hogy két esemény uniója is esemény. Például páros számot vagy hármast dobok:

$$\{2,4,6\} \cup \{3\} = \{2,3,4,6\}.$$

Elképzelhető, hogy egy alaphalmaz végtelen sok elemi eseményből áll. Az ilyen általánosabb esetek leírására szolgál az e jegyzetben tárgyalt úgynevezett Kolmogorov-féle elmélet, mely felteszi, hogy nemcsak véges sok, hanem megszámlálhatóan végtelen sok esemény uniója is esemény.

Megjegyezzük, hogy az előző példában az események halmaza az alaphalmaz összes részhalmazainak a halmaza, másnéven az Ω hatványhalmaza. Ennek azonban nem feltétlenül kell teljesülni, mint azt látni fogjuk például a geometriai valószínűségi mező tárgyalásánál. Általános esetben tehát $\mathcal{A}$ az Ω hatványhalmazának részhalmaza, és teljesül rá az előző három pont.

Az algebra az olyan halmazrendszerekkel, melyekre ezek teljesülnek, részletesen foglalkozik. Éppen ezért, ha ezen tulajdonságokat választjuk az események axiómarendszereként, akkor egy kidolgozott matematikai rendszer vár ránk, amiből a továbblépés is kényelmesebb. Ezt fogjuk tenni az 1. fejezetben.

Még egy másik alapfogalomra is szükségünk van, a valószínűségre. Tapasztalatunk alapján, ez nagyszámú kísérlet után, körülbelül a relatív gyakorisággal egyezik meg. Így a valószínűség tulajdonságai jól jellemezhető a relatív gyakoriság tulajdonságaival.

A valószínűség egy függvény, minden eseményhez egy valós számot rendel, nevezetesen amely körül a relatív gyakoriság ingadozik. A továbbiakban egy A esemény valószínűségét $P(A)$-val fogjuk jelölni. Három tulajdonságát emeljük ki.

(1) A relatív gyakoriság, s így a valószínűség értéke nem lehet negatív, hiszen a definícióban szereplő k és n számok sem negatívok. Tehát bármely A esemény esetén $P(A) \geq 0$.

(2) A második tulajdonság a biztos eseményre vonatkozik. Ha a biztos esemény relatív gyakoriságát vizsgáljuk, akkor minden kísérlet esetén a k, azaz a bekövetkezések száma, és az n, azaz a kísérletek száma megegyezik. Így a hányadosuk minden esetben 1. Ebből az következik, hogy a biztos esemény valószínűsége 1, vagyis $P(\Omega) = 1$.

(3) A harmadik tulajdonságot a legegyszerűbben talán ismét a dobókockával tudjuk szemléltetni. Tekintsük azokat az eseményeket, amikor az egyes oldal, illetve amikor a kettes vagy hármas oldal van felül. Az ezeknek megfelelő halmazok az $\{1\}$ és a $\{2, 3\}$. Ezen két egymást kizáró esemény relatív gyakoriságait megvizsgálva, azt fogjuk tapasztalni, hogy $1/6$ illetve $1/3$ körül ingadozik nagyszámú kísérlet esetén. Ez természetes is, hiszen az oldalak között fizikai jellemzőit tekintve nincs különbség, csupán másképpen jelöljük őket. Így minden oldalra egyforma eséllyel eshet.

Ha most az $\{1, 2, 3\}$ esemény relatív gyakoriságát vizsgáljuk, akkor az

1/2 körül ingadozik. Vagyis ahogy az előre sejthető volt, az előző két érték összeadódik.

Ezt az eredményünket általánosítva azt mondhatjuk, hogy ha az A és B események diszjunktak, akkor az események uniójának a valószínűsége megegyezik az események valószínűségeinek összegével. Tehát

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Az események (3) tulajdonságánál leírtak alapján itt is kiterjesztjük az eredményt végtelen esetre. Eszerint megszámlálhatóan végtelen sok, páronként diszjunkt esemény uniójának valószínűsége megegyezik az események valószínűségeinek összegével. Bár ez nem következik a szemléletből, de elfogadásával mégis a jelenségek egy igen széles köre leírható lesz.

A matematikában azokat a függvényeket, melyekre az előző három tulajdonság teljesül, mértéknek nevezzük, és az úgynevezett mértékelmélet foglalkozik velük. Tehát ezeket is célszerű axiómáknak választani.

Ezzel elkezdhetjük a valószínűségszámítás pontos matematikai felépítését.

1. Események

1.1. DEFINÍCIÓ. **(Esemény axiómák.)** Legyen Ω egy nem üres halmaz, $\mathcal{A}$ részhalmaza az Ω hatványhalmazának, és teljesüljenek a következők.

(S1) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(S2) ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $\overline{A} \in \mathcal{A}$,

(S3) ha $A_i \in \mathcal{A}$ minden $i \in \mathbf{Z}^+$ esetén, akkor $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Ekkor az $\mathcal{A}$-t σ-**algebrának**, elemeit pedig **eseményeknek** nevezzük.

1.2. MEGJEGYZÉS. (1) Az üres halmaz esemény az **(S1)**, **(S2)** axiómák és $\emptyset = \overline{\Omega}$ miatt.

(2) Az **(S3)** axióma véges sok eseményre is igaz, ugyanis ha **(S3)**-ban $A_i = \emptyset$ minden $i > n$ esetén, ahol $i, n \in \mathbf{Z}^+$, akkor $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

1.3. DEFINÍCIÓ. Legyen adott egy Ω nem üres halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak egy σ-algebrája és $A, B \in \mathcal{A}$.

(1) $A + B := A \cup B$. Ez az esemény akkor következik be, ha legalább az egyik bekövetkezik.

(2) $AB := A \cap B$. Ez az esemény akkor következik be, ha mindkettő egyszerre bekövetkezik. (A későbbiekben látni fogjuk, hogy két esemény szorzata valóban esemény.)

(3) $\overline{A} := \Omega \setminus A$. Ezt az eseményt az A **ellentettjének** nevezzük. Ez akkor következik be, ha az A nem következik be.

(4) $A - B := A \setminus B = A\overline{B}$. Ez az esemény akkor következik be, ha az A bekövetkezik, de B nem.

(5) Az Ω-t **eseménytérnek** vagy **biztos eseménynek**, az üres halmazt **lehetetlen eseménynek** nevezzük.

(6) Az $A \in \mathcal{A}$ eseményt **összetett eseménynek** nevezzük, ha léteznek $B, C \in \mathcal{A}$, $B \neq A$ és $C \neq A$ események, melyekre $A = B + C$ teljesül.

Ha $A \in \mathcal{A}$ nem összetett– és nem lehetetlen esemény, akkor **elemi eseménynek** nevezzük.

(7) Ha $A \subseteq B$, akkor azt mondjuk, hogy az A **maga után vonja** B-t.

(8) Ha A, B diszjunktak, akkor az A és B eseményeket **egymást kizáró eseményeknek** nevezzük.

(9) Legyen Γ egy nem üres, megszámlálható számosságú halmaz, továbbá $H := \{A_i : A_i \in \mathcal{A}, i \in \Gamma\}$. Azt mondjuk, hogy H **teljes eseményrendszer**, ha osztályozása Ω-nak, azaz ha $A_i A_j = \emptyset$ minden $i, j \in \Gamma$, $i \neq j$ esetén, továbbá $\sum_{i \in \Gamma} A_i = \Omega$ teljesül.

1.4. FELADAT. Egy dobókockát kétszer feldobunk. Ha a dobott számok összege 2, akkor feldobjuk mégegyszer. Adjuk meg az eseményteret, és két σ-algebrát.

MEGOLDÁS.

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1,1), (1,1,2), \ldots, (1,1,6),\\ &(1,2), (1,3), \ldots, (1,6),\\ &(2,1), (2,2), \ldots, (2,6),\\ &(3,1), (3,2), \ldots, (3,6),\\ &\vdots\\ &(6,1), (6,2), \ldots, (6,6)\}\end{aligned}$$

Legyen $\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, \Omega, B, \overline{B}\}$, ahol $B := \{(1,1,i) : i = 1, 2, \ldots, 6\}$, illetve $\mathcal{A}_2 := \{\emptyset, \Omega, C, \overline{C}\}$, ahol $C := \{(1,i) : i = 2, 3, \ldots, 6\}$. Ekkor $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ is σ-algebra. A B esemény akkor következik be, ha egymás után kétszer 1-est dobunk. A C esemény akkor következik be, ha az első dobás 1-es, de a második nem.

1.5. MEGJEGYZÉS. Láttuk, hogy a hétköznapi értelemben használt esemény fogalmát a matematikában a halmaz fogalmával azonosítottuk. Így természetes, hogy az események közötti műveletek tulajdonságai megegyeznek a halmazokéval. Ezek közül sorolunk most fel néhány alapvetőt, melyek már az elemi halmazelméletből is jól ismertek.

(1) $A + A = A$ és $AA = A$, azaz mindkét művelet idempotens.

(2) Mindkét művelet kommutatív és asszociatív.

(3) $A(B + C) = AB + AC$ és $A + BC = (A + B)(A + C)$, azaz mindkét művelet disztributív a másikra nézve.

(4) $A + \emptyset = A$ és $A\emptyset = \emptyset$.

(5) $A + \Omega = \Omega$ és $A\Omega = A$.

(6) $A + \overline{A} = \Omega$ és $A\overline{A} = \emptyset$.

(7) $\overline{\emptyset} = \Omega$ és $\overline{\Omega} = \emptyset$.

(8) $\overline{\overline{A}} = A$.

(9) $A = B$ akkor és csak akkor, ha $\overline{A} = \overline{B}$.

(10) $A \subseteq A + B$ és $AB \subseteq A$.

(11) $A + B = A$ akkor és csak akkor, ha $B \subseteq A$.

(12) $AB = A$ akkor és csak akkor, ha $A \subseteq B$.

(13) $A = B$ akkor és csak akkor, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.

(14) **(de Morgan-féle azonosságok)**

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \quad \text{és} \quad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B},$$

illetve, ha $A_i \in \mathcal{A}$ minden $i \in \mathbf{Z}^+$ esetén, akkor

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} = \overline{\prod_{i=1}^{\infty} A_i} \quad \text{és} \quad \prod_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} = \overline{\sum_{i=1}^{\infty} A_i}.$$

1.6. TÉTEL. *Legyen Ω egy nem üres halmaz és $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak egy σ-algebrája.*

(1) *Ha $A, B \in \mathcal{A}$, akkor $AB \in \mathcal{A}$.*

(2) *Ha $A_i \in \mathcal{A}$ minden $i \in \mathbf{Z}^+$ esetén, akkor $\prod_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ teljesül.*

BIZONYÍTÁS. (1) Az esemény axiómák, az 1.2. Megjegyzés (2) pontja és a de Morgan-féle azonosságokból $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B} \in \mathcal{A}$ teljesül, így **(S2)** alapján igaz az állítás.

(2) Hasonlóan, mint az előbb $\overline{\prod_{i=1}^{\infty} A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} \in \mathcal{A}$ következik, így **(S2)** alapján igaz a tétel.

1.7. FELADAT. **(Beolvasztási szabály.)** Bizonyítsuk be, hogy ha Ω egy nem üres halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak egy σ-algebrája továbbá $A, B \in \mathcal{A}$, akkor $A = A + AB$ teljesül.

MEGOLDÁS. $A + AB = A\Omega + AB = A(\Omega + B) = A\Omega = A$.

1.8. FELADAT. Bizonyítsuk be, hogy ha Ω egy nem üres halmaz és $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak egy σ-algebrája, akkor bármely $A, B \in \mathcal{A}$ események összege felbontható két, illetve három páronként egymást kizáró esemény összegére az alábbi módon.

(1) $A + B = A + \overline{A}B$,

(2) $A + B = A\overline{B} + AB + \overline{A}B$.

MEGOLDÁS. (1) A kizáróság triviálisan teljesül, így csak az egyenlőséget kell bizonyítani.

$$\begin{aligned} A + B &= \Omega(A + B) = \left(A + \overline{A}\right)(A + B) = AA + \overline{A}A + AB + \overline{A}B = \\ &= A + \emptyset + AB + \overline{A}B = (A + AB) + \overline{A}B = A + \overline{A}B. \end{aligned}$$

(2) Hasonlóan az előzőhöz, itt is teljesül a kizáróság, így már csak az egyenlőséget kell megmutatni.

$$A + B = A + \overline{A}B = A\Omega + \overline{A}B = A\left(\overline{B} + B\right) + \overline{A}B = A\overline{B} + AB + \overline{A}B.$$

1.9. FELADAT. Bizonyítsuk be, hogy a kivonás a szorzásra nézve jobbról disztributív, de balról nem, azaz ha Ω egy nem üres halmaz és $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak egy σ-algebrája, akkor $A, B, C \in \mathcal{A}$ esetén

(1) $AB - C = (A - C)(B - C)$, illetve

(2) $A - BC = (A - B) + (A - C)$ teljesül.

MEGOLDÁS. (1) $(A - C)(B - C) = A\overline{C} \cdot B\overline{C} = AB\overline{C} = AB - C$.

(2) $A - BC = A\overline{BC} = A\left(\overline{B} + \overline{C}\right) = A\overline{B} + A\overline{C} = (A - B) + (A - C)$.

1.10. FELADAT. Bizonyítsuk be, hogy a szorzás a kivonásra nézve disztributív, azaz ha Ω egy nem üres halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak egy σ-algebrája és $A, B, C \in \mathcal{A}$, akkor $A(B - C) = AB - AC$ teljesül.

MEGOLDÁS.

$$\begin{aligned} AB - AC &= AB \cdot \overline{AC} = AB\left(\overline{A} + \overline{C}\right) = AB\overline{A} + AB\overline{C} = \\ &= \emptyset + AB\overline{C} = AB\overline{C} = A(B - C). \end{aligned}$$

1.11. FELADAT. Legyen Ω egy nem üres halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak egy σ-algebrája és $A, B, C \in \mathcal{A}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

(1) $AB = AC = \emptyset$ és $B + A = C + A$ esetén $B = C$, továbbá

(2) $\overline{A}B = \overline{A}C = \emptyset$ és $BA = CA$ esetén $B = C$ teljesül.

MEGOLDÁS. (1) A feltételeket figyelembe véve

$$(B + A)B = BB + AB = B + \emptyset = B,$$

továbbá

$$(B + A)B = (C + A)B = CB + AB = CB + \emptyset = CB,$$

ezért $B = CB$. Másrészt

$$(B + A)C = BC + AC = BC + \emptyset = BC,$$

és

$$(B + A)C = (C + A)C = CC + AC = C + \emptyset = C,$$

ezért $BC = C$, amit összevetve az előző eredménnyel $B = C$ adódik.

(2) A feltételek, az 1.8. Feladat (1) pontja és az előző pont miatt

$$\begin{aligned} AB + \overline{A} &= AC + \overline{A} \\ B + \overline{A} &= C + \overline{A} \\ B &= C. \end{aligned}$$

1.12. MEGJEGYZÉS. (1) Az előző feladat megoldásában felhasználtuk, hogy ha $B, C \in \mathcal{A}$ és $B = C$, akkor minden $A \in \mathcal{A}$ esetén $B + A = C + A$ és $BA = CA$ teljesül.

(2) Az 1.11. Feladat (1) pontja $AB \neq \emptyset$ vagy $AC \neq \emptyset$ esetén nem teljesül. Például legyen $A := \Omega$ és $B \neq C$, tegyük fel továbbá, hogy $B \neq \emptyset$. Ekkor $AB = \Omega B = B \neq \emptyset$ teljesül, másrészt $B + A = C + A = \Omega$.

(3) Ha $\overline{A}B \neq \emptyset$ vagy $\overline{A}C \neq \emptyset$, akkor az 1.11. Feladat (2) pontja nem igaz. Például ha $A = \emptyset$, $B \neq C$ és $B \neq \emptyset$, akkor $\overline{A}B = \Omega B = B \neq \emptyset$, másrészt $BA = CA = \emptyset$.

1.13. TÉTEL. *Ha Ω egy nem üres halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak egy σ-algebrája és $A, B \in \mathcal{A}$ különböző elemi események, akkor $AB = \emptyset$.*

BIZONYÍTÁS. Az 1.5. Megjegyzés (10) pontja alapján $AB \subseteq A$. De ez az A elemi esemény volta miatt csak $AB = \emptyset$ vagy $AB = A$ esetén teljesülhet. Az utóbbi viszont az 1.5. Megjegyzés (12) pontjából akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subseteq B$, ami lehetetlen, hiszen $A \neq B$, $A \neq \emptyset$ és B elemi esemény. Így A és B valóban egymást kizáró események.

1.14. TÉTEL. *Ha Ω egy nem üres véges halmaz és $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak egy σ-algebrája, akkor minden $B \in \mathcal{A}$ összetett eseményhez létezik olyan $A \in \mathcal{A}$ elemi esemény, melyre $A \subset B$ teljesül.*

BIZONYÍTÁS. Mivel B összetett esemény, ezért létezik olyan $A_1 \in \mathcal{A}$ nem lehetetlen esemény, mely valódi részhalmaza B-nek. Ha az A_1 elemi esemény, akkor teljesül az állítás. Ha nem, akkor létezik olyan $A_2 \in \mathcal{A}$ nem lehetetlen esemény, mely valódi részhalmaza A_1-nek. Ha az A_2 elemi esemény, akkor teljesül az állítás. Ha nem, akkor folytatjuk az eljárást. Az események számának végessége miatt ez véges számú lépés után megszakad. Így valamely $n \in \mathbf{Z}^+$ esetén A_n elemi esemény.

1.15. TÉTEL. *Ha Ω egy nem üres véges halmaz és $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak egy σ-algebrája, akkor minden $B \in \mathcal{A}$ nem lehetetlen esemény előáll elemi események összegeként. Ez az előállítás a sorrendtől eltekintve egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. Ha B elemi esemény, akkor teljesül az állítás. Ha összetett esemény, akkor az előző tétel alapján van olyan A_1 elemi esemény, mely maga után vonja B-t. Így létezik egy olyan B_1 nem lehetetlen esemény, melyre $B = A_1 + B_1$ és $A_1 B_1 = \emptyset$ teljesül. Ha B_1 elemi esemény, akkor a tétel első állítását bizonyítottuk. Ha összetett esemény, akkor B_1 felírható $B_1 = A_2 + B_2$ alakban, ahol A_2 elemi esemény, $B_2 \neq \emptyset$ és $A_2 B_2 = \emptyset$. Ha B_2 elemi esemény, akkor készen vagyunk, ha nem, akkor folytatjuk az eljárást, mely az Ω végessége miatt véges számú lépés után megszakad. Ily módon B különböző elemi események összegeként áll elő:

$$B = A_1 + A_2 + \cdots + A_r. \tag{1.1}$$

Még az egyértelműséget kell bizonyítanunk. Tekintsük B-nek két ilyen előállítását:

$$B = A_1 + A_2 + \cdots + A_r = A_1' + A_2' + \cdots + A_s'.$$

Tegyük fel, hogy $A_1 \neq A_i'$ minden $i = 1, 2, \ldots, s$ esetén. Ekkor mindkét előállítást megszorozva A_1-el, 1.13. Tétel alapján kapjuk, hogy $A_1 = \emptyset$, ami ellentmondás. Vagyis valamely $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ esetén $A_1 = A'_i$ teljesül. Hasonlóan bizonyítható, hogy ez minden A_j-re igaz, ahol $j = 1, 2, \ldots, r$. Ebből következik, hogy $r \le s$. Másrészt ugyanígy látható, hogy a jobboldali előállításban szereplő elemi események mindegyike megtalálható a baloldalon is, így $s \le r$, melyből $r = s$ következik. Ez pedig azt jelenti, hogy ez a két előállítás sorrendtől eltekintve ugyanaz. Ekkor (1.1)-et a B **kanonikus előállításának** nevezzük.

1.16. TÉTEL. *Ha Ω egy nem üres véges halmaz, és az Ω részhalmazainak egy $\mathcal{A}$ σ-algebrájában n darab elemi esemény van, akkor $\mathcal{A}$-ban az események száma 2^n.*

BIZONYÍTÁS. Egy tetszőleges esemény kanonikus előállításában előfordulhat $0, 1, 2, \ldots, n$ darab elemi esemény. Viszont $0 \le r \le n$ darab elemi eseményből álló esemény $\binom{n}{r}$-féle lehet, így $\mathcal{A}$ elemeinek a száma a binomiális tétel alapján

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n.$$

2. Valószínűség

2.1. Definíció. **(Kolmogorov-féle valószínűségi axiómák.)** Legyen Ω egy nem üres halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak egy σ-algebrája és $P : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ olyan függvény, melyre teljesülnek a következők.

(P1) Minden $A \in \mathcal{A}$ esetén $P(A) \geq 0$.

(P2) $P(\Omega) = 1$.

(P3) **(Teljes additivitás.)** Ha $A_i \in \mathcal{A}$ minden $i \in \mathbf{Z}^+$ esetén, és $A_iA_j = \emptyset$ minden $i, j \in \mathbf{Z}^+, i \neq j$ esetén, akkor

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

teljesül. Ekkor az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$-t **Kolmogorov-féle valószínűségi mezőnek**, vagy röviden **valószínűségi mezőnek**, a P-t pedig **valószínűségnek** nevezzük.

2.2. Megjegyzés. (1) Vegyük észre, hogy a Kolmogorov-féle valószínűségi axiómák tartalmazzák az **(S1)**, **(S2)**, **(S3)** esemény axiómákat is, hiszen $\mathcal{A}$-ról megköveteljük, hogy σ-algebra legyen.

(2) Egy adott eseménytér esetén több olyan P valószínűség is lehet, melyre teljesülnek az előző axiómák. Hogy melyik az, amely a valóságban megfelel, erre a választ a **statisztika** keresi.

2.3. Tétel. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező. Ekkor teljesülnek a következők.*

(1) $P(\emptyset) = 0$.

(2) **(Véges additivitás.)** *Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, és $A_iA_j = \emptyset$ minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$ esetén, akkor* $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

(3) *Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor* $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$.

(4) *Ha $A, B \in \mathcal{A}$, akkor* $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

(5) *Ha $A, B \in \mathcal{A}$, akkor* $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

(6) *Ha $A, B \in \mathcal{A}$ és $B \subseteq A$, akkor* $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

(7) *Ha* $A, B \in \mathcal{A}$ *és* $A \subseteq B$, *akkor* $P(A) \leq P(B)$.

(8) *Ha* $A \in \mathcal{A}$, *akkor* $P(A) \leq 1$.

(9) *Ha* $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B$ *és* $P(B) = 0$, *akkor* $P(A) = 0$.

(10) *Ha* $A, B \in \mathcal{A}$ *és* $P(B) = 1$, *akkor* $P(A) = P(AB)$.

(11) *Ha* $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, *akkor* $P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

BIZONYÍTÁS. (1) Legyen $A_1 = \Omega$ és $A_n = \emptyset$ minden $n > 1$ egész szám esetén. Ekkor az A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ események páronként kizáróak, így a **(P3)** axiómából

$$P(\Omega + \emptyset + \emptyset + \cdots) = P(\Omega) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots$$

következik. Viszont $\Omega = \Omega + \emptyset + \emptyset + \cdots$, ezért $\sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset) = 0$. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha $P(\emptyset) = 0$.

(2) Az $A_1, A_2 \ldots, A_n, A_i := \emptyset$ $(i > n)$ események páronként kizáróak, így **(P3)** és $P(\emptyset) = 0$ miatt

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(3) Az A és az $\overline{A}$ események egymást kizáróak, ezért a véges additivitásból

$$P\left(A + \overline{A}\right) = P(A) + P\left(\overline{A}\right).$$

Ebből $P\left(A + \overline{A}\right) = P(\Omega) = 1$ miatt adódik az állítás.

(4) Az 1.8. Feladat (1) pontjából és a véges additivitásból

$$P(A + B) = P(A) + P\left(\overline{A}B\right).$$

$B = BA + B\overline{A}$ diszjunkt felbontás, így szintén a véges additivitás miatt

$$P(B) = P(BA) + P\left(B\overline{A}\right)$$

teljesül, amiből $P\left(B\overline{A}\right)$-t kifejezve és beírva az első egyenlőségbe, adódik a tétel.

(5) $A = AB + A\overline{B}$ diszjunkt felbontás, ezért

$$P(A) = P(AB) + P\left(A\overline{B}\right) = P(AB) + P(A - B).$$

(6) $B \subseteq A$ esetén $AB = B$, így az (5) pontból következik az állítás.

(7) A **(P1)** axiómából és a (6) pontból következik az állítás, ugyanis $A \subseteq B$ feltétel esetén $0 \leq P(B - A) = P(B) - P(A)$ teljesül.

(8) Mivel minden $A \in \mathcal{A}$ esetén $A \subseteq \Omega$, ezért **(P2)** és a (7) pont miatt igaz a tétel.

(9) A **(P1)** és (7) miatt $0 \leq P(A) \leq P(B) = 0$, melyből következik az állítás.

(10) A **(P1)**,(6),(7) és (3) pontok, továbbá a de Morgan-féle azonosság felhasználásával

$$0 \leq P(A) - P(AB) = P(A - AB) = P(A(\overline{A} + \overline{B})) = P(A\overline{B}) \leq P(\overline{B}) = 0,$$

melyből következik az állítás.

(11) A tételt teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 2$ esetén a (4) pontból következik az állítás. Tegyük fel, hogy $n = k$ esetén igaz az állítás. Ekkor $n = k + 1$-re

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{k+1} A_i\right) &= P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i + A_{k+1}\right) = P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) + P\left(A_{k+1}\right) - \\ &- P\left(A_{k+1} \cdot \sum_{i=1}^{k} A_i\right) \leq P\left(\sum_{i=1}^{k} A_i\right) + P\left(A_{k+1}\right) \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{k} P(A_i)\right) + P\left(A_{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i). \end{aligned}$$

Ezzel a tételt bizonyítottuk.

2.4. TÉTEL. **(A valószínűség folytonossága.)** *Ha* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mező,* $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, \ldots)$,

(1) $A_i \supseteq A_{i+1}$ *minden* $i \in \mathbf{Z}^+$ *esetén, és* $\prod_{i=1}^{\infty} A_i = A$, *vagy*

(2) $A_i \subseteq A_{i+1}$ *minden* $i \in \mathbf{Z}^+$ *esetén, és* $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = A$, *akkor*

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(A).$$

Bizonyítás. (1) A feltételekből minden $i \in \mathbf{Z}^+$ esetén $\overline{A_i} \subseteq \overline{A_{i+1}}$ következik, továbbá $\overline{\prod_{i=1}^{\infty} A_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} = \overline{A}$. Ezért

$$\overline{A} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} = \overline{A_1} + \left(\overline{A_2} - \overline{A_1} \right) + \left(\overline{A_3} - \overline{A_2} \right) + \cdots$$

diszjunkt felbontás, így **(P3)** és a 2.3. Tétel (6) és (3) pontjai miatt

$$1 - P(A) = P\left(\overline{A}\right) = P\left(\overline{A_1}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} P\left(\overline{A_{i+1}} - \overline{A_i}\right) =$$

$$= P\left(\overline{A_1}\right) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \Big(P\left(\overline{A_{i+1}}\right) - P\left(\overline{A_i}\right) \Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Big(P\left(\overline{A_1}\right) + \Big(P\left(\overline{A_2}\right) - P\left(\overline{A_1}\right) \Big) + \cdots + \Big(P\left(\overline{A_n}\right) - P\left(\overline{A_{n-1}}\right) \Big) \Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\overline{A_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \Big(1 - P(A_n) \Big) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Ebből $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$ adódik, amit bizonyítani akartunk.

(2) Mivel $\overline{A_i} \supseteq \overline{A_{i+1}}$ minden $i \in \mathbf{Z}^+$ esetén, és $\prod_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} = \overline{\sum_{i=1}^{\infty} A_i} = \overline{A}$, ezért az előző pont miatt $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\overline{A_n}\right) = P\left(\overline{A}\right)$. Ebből következik a tétel.

2.5. Tétel. **(Helyettesítő axiómák.)** *Ha Ω egy nem üres halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω részhalmazainak egy σ-algebrája és $P : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$, akkor a* **(P1)** *és* **(P2)** *teljesülése esetén az alábbi két axióma helyettesíti a* **(P3)** *axiómát.*

(P4) (Véges additivitás.) *Ha $A, B \in \mathcal{A}$ egymást kizáró események, akkor $P(A + B) = P(A) + P(B)$.*

(P5) (Folytonossági axióma.) *Ha $A_i \in \mathcal{A}$, $A_i \supseteq A_{i+1}$ minden $i \in \mathbf{Z}^+$ esetén, és $\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.*

Bizonyítás. A tétel azt állítja, hogy a **(P1)** és **(P2)** tulajdonságok teljesülése esetén a **(P4)** és **(P5)** együttesen ekvivalens **(P3)**-al.

Először tegyük fel, hogy **(P1)**, **(P2)** és **(P3)** teljesül. A **(P4)**-et már láttuk, hogy következik **(P3)**-ból. Másrészt **(P5)** a valószínűség folytonosságából következik.

Megfordítva, most teljesüljön **(P1)**, **(P2)**, **(P4)** és **(P5)**. Legyen $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in \mathbf{Z}^+$ páronként egymást kizáró események és $B_n := \sum_{i=n}^{\infty} A_i$. Ekkor $B_n \in \mathcal{A}$, $B_n \supseteq B_{n+1}$ minden $n \in \mathbf{Z}^+$ esetén, másrészt belátjuk, hogy $\prod_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Tegyük fel, hogy ez nem igaz, azaz létezik $\omega \in \Omega$, melyre $\omega \in \prod_{n=1}^{\infty} B_n$ teljesül. Így $\omega \in B_1$, melyből következik az A_i-k páronkénti kizáróságának felhasználásával, hogy pontosan egy olyan $n_0 \in \mathbf{Z}^+$ létezik, melyre $\omega \in A_{n_0}$. Ebből kapjuk, hogy $\omega \notin B_{n_0+1}$, ami ellentmondás. Tehát $\prod_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Ezért **(P5)** alapján

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0. \tag{2.1}$$

Mivel $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1} + B_n$ diszjunkt felbontás, ezért a véges additivitásból

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_{n-1}) + P(B_n).$$

Ez minden $n \in \mathbf{Z}^+$ esetén igaz, tehát (2.1) miatt

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i) + \lim_{n\to\infty} P(B_n) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Így **(P3)** teljesül. Ezzel az állítást bizonyítottuk.

2.6. DEFINÍCIÓ. Legyen $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ és $\mathcal{A}$ az Ω hatványhalmaza. Ha a P valószínűségre fennáll, hogy $P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\})$ minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén, akkor az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$-t **klasszikus valószínűségi mezőnek** nevezzük.

2.7. TÉTEL. *Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ klasszikus valószínűségi mező, $A \in \mathcal{A}$, az Ω elemeinek a száma n és az A elemeinek száma k, akkor $P(A) = k/n$.*

BIZONYÍTÁS. Legyen az $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. A definícióból következik, hogy $P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\})$ minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$-re.

Az $\{\{\omega_i\} : i = 1, 2, \ldots, n\}$ teljes eseményrendszer, ezért

$$1 = P(\Omega) = P\left(\sum_{i=1}^{n} \{\omega_i\}\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\{\omega_i\}) = np,$$

ahol p az elemi események közös valószínűségét jelöli, azaz $p = P(\{\omega_i\})$. Így $p = 1/n$. Mivel az A esemény k darab elemi esemény összege, melyek egymást kizáróak ezért a véges additivitás miatt $P(A) = kp = k/n$.

2.8. MEGJEGYZÉS. (1) A 2.6. Definíció korrekt, mert az Ω hatványhalmaza σ-algebra.

(2) A 2.7. Tételt középiskolában úgy fogalmazzák meg, hogy a valószínűség a kedvező esetek száma osztva az összes esetek számával. Klasszikus valószínűségi mezőben a kedvező illetve az összes esetek számát kombinatorikai eszközökkel határozhatjuk meg.

2.9. FELADAT. A totóban mi a valószínűsége a 10-es találatnak, ha feltesszük, hogy minden tipp bekövetkezésének a valószínűsége egyforma?

MEGOLDÁS. Az Ω legyen az $1, 2, x$ elemek összes 14-edosztályú ismétléses variációjának halmaza. Ekkor minden tippnek megfelel pontosan egy Ω-beli elem. Ezek lesznek az elemi események. Ekkor egy klasszikus valószínűségi mezőt kapunk, melyben a 10-es találat $\binom{13}{10} \cdot 2^3 \cdot 3$–féleképpen következhet be. Ugyanis a 10-es találatot az első 13 mérkőzésből kell elérni, ami $\binom{13}{10} \cdot 2^3$–féleképpen lehetséges, és még a pótmérkőzésre 3–féleképpen tippelhetünk. Az Ω elemeinek a száma, azaz az összes esetek száma 3^{14}. Így a kérdéses valószínűség $\binom{13}{10} \cdot 2^3 \cdot 3/3^{14} \approx 0{,}001435$.

2.10. FELADAT. 52 lapos römi kártyát szétosztunk Antalnak, Bélának, Józsefnek és Imrének véletlenszerűen úgy, hogy mindenkinek 13 lapja legyen. Mi a valószínűsége annak, hogy a treff ászt Antal kapja meg?

I. MEGOLDÁS. Az $\{\omega_1\}$ reprezentálja azt az esetet, amikor a treff ászt Antal kapja meg, hasonlóan $\{\omega_2\}$ azt amikor Béla, $\{\omega_3\}$ azt amikor József, végül $\{\omega_4\}$ azt amikor Imre kapja meg. Legyen $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Egyik személyt sem tünteti ki a többihez képest a leosztás, így az $\{\omega_i\}$–k valószínűségei megegyeznek. Tehát klasszikus valószínűségi mezőt kaptunk. Ekkor a kedvező esetek száma 1, míg az összes esetek száma 4. Vagyis a valószínűség 1/4.

II. Megoldás. Az Ω legyen az 52 lap összes 13–adosztályú ismétlés nélküli kombinációjának halmaza. Ekkor az Antalnak kiosztott lapok bármely kombinációjának megfelel pontosan egy Ω–beli elem. Mivel ezek valószínűségei egyformák a szimmetria viszonyok miatt, ezért klasszikus valószínűségi mezőt kapunk. Azon esetek száma amikor a treff ász a kombinációban van, azaz a kedvező esetek száma $\binom{51}{12}$. Az Ω elemeinek a száma $\binom{52}{13}$. Így a valószínűség $\binom{51}{12}/\binom{52}{13} = 1/4$.

2.11. Definíció. Legyen Ω az $\mathbf{R}^k$ egy nem üres részhalmaza, ahol $k = 1, 2, 3$. Tegyük fel, hogy Ω mérhető és mértéke pozitív valós szám. Az $\mathcal{A}$ legyen az Ω összes mérhető részhalmazának a halmaza. Ha annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott pont egy $A \in \mathcal{A}$ halmazba esik, arányos az A mértékével, akkor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$-t **geometriai valószínűségi mezőnek** nevezzük.

2.12. Megjegyzés. (1) A definícióban egy halmaz mérhetősége azt jelenti, hogy létezik hossza, területe vagy térfogata, a halmaz mértéke pedig ennek a mértékszámát jelenti. Másképpen, a mérhetőség az úgynevezett Lebesgue-mérhetőséget, a halmaz mértéke pedig a Lebesgue-mértékét jelenti. Ezek definícióját lásd [1]-ben.

Fontos, hogy ha az Ω-nak például a területét tekintjük, akkor az $\mathcal{A}$ elemeinek is a területeit vesszük alapul.

(2) Létezik olyan korlátos halmaz, mely nem mérhető, ezért kell külön feltételezni ezt az $\mathcal{A}$ elemeiről. (Lásd [1] 25. oldal.) Az előbb meghatározott $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Kolmogorov-féle valószínűségi mezőt alkot, így korrekt a definíció. (Lásd [5] 64. oldal.)

(3) Az egyes elemi események itt az Ω ponthalmaz egy-egy pontjának véletlenszerű kiválasztását jelentik, amelyeknek a valószínűsége külön-külön nulla, hiszen a pont mértéke nulla. Ebből látható, hogy a 2.3. Tétel (1) pontjának a megfordítása nem igaz. Azaz a lehetetlen esemény valószínűsége nulla, de ha egy esemény valószínűsége nulla, abból nem következik, hogy a lehetetlen eseményről van szó.

2.13. Tétel. *Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ geometriai valószínűségi mezőt alkot, az Ω mértéke $m(\Omega)$, és $A \in \mathcal{A}$ esetén az A mértéke $m(A)$, akkor*

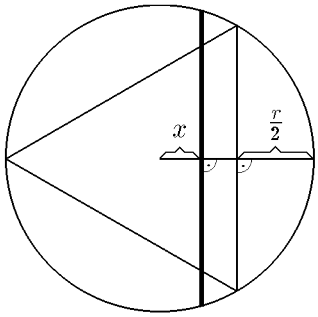
$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Bizonyítás. A definícióból $P(A)$ arányos az A mértékével, továbbá $P(\Omega) = 1$ arányos az Ω mértékével. Az arányossági tényezőt jelöljük λ-val.

Ekkor $1 = P(\Omega) = \lambda m(\Omega)$, amiből $\lambda = \frac{1}{m(\Omega)}$. Másrészt $P(A) = \lambda m(A)$, melybe λ értékét beírva kapjuk a tételt.

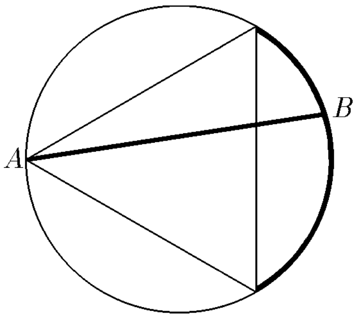
2.14. FELADAT. **(Bertrand-féle paradoxon.)** Tekintsünk egy kört, és jelöljük ki annak egy tetszőleges húrját. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a húr hosszabb lesz, mint a körbe írt szabályos háromszög oldala.

I. MEGOLDÁS. Az r sugarú kör középpontjának és a húrnak a távolsága egyértelműen meghatározza a húr hosszát. Ha ez a távolság kisebb mint $\frac{r}{2}$, akkor a húr hosszabb lesz a háromszög oldalánál. Ezért $P = \frac{r}{2}/r = \frac{1}{2}$. (Lásd 2. ábra.)



2. ábra

II. MEGOLDÁS. Rögzítsük a húr A végpontját, a B végpontját pedig „futtassuk" végig a körön. A kör kerületének harmada az az ívhossz, amin AB nagyobb a háromszög oldalánál. Ebből következik, hogy $P = \frac{2r\pi}{3}/2r\pi = \frac{1}{3}$. (Lásd 3. ábra.)

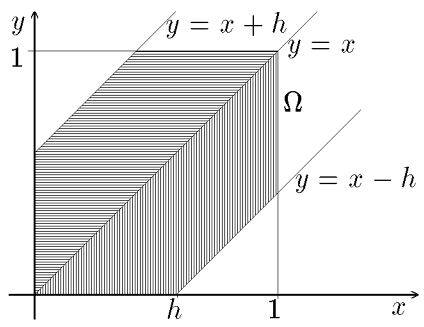


3. ábra

A két megoldás végeredménye nem egyezik meg. Ezt az ellentmondást úgy tudjuk feloldani, ha továbbiakban mindig megadjuk, hogy a véletlenszerű kiválasztása a pontoknak milyen módon történjen. Vagyis a kísérleti körülményeket rögzíteni kell.

2.15. FELADAT. Egységnyi hosszúságú szakaszon véletlenszerűen kiválasztunk két pontot. Mi a valószínűsége, hogy a két pont távolsága kisebb egy adott $h < 1$ hosszú szakasznál?

MEGOLDÁS. Tekintsük az egyik végpontját az egységnyi hosszúságú szakasznak. A választott P_1 illetve P_2 pontoknak ettől a végponttól való távolsága legyen x illetve y. Ekkor $x \in [0,1]$ és $y \in [0,1]$ teljesül. Legyen $\Omega := [0,1] \times [0,1]$. A feladatban leírt kísérletet úgy is modellezhetjük, hogy erre az eseménytérre, mely most egy egységnyi oldalhosszúságú négyzet, „rádobunk" egy geometriai pontot. A pontnak meg fog felelni egy rendezett számpár, a koordinátái. Az első koordináta legyen x, a második y. Ehhez a kísérlethez tartozó valószínűségi mező a 2.11. Definíció szerint geometriai valószínűségi mező lesz. Így a kérdés az $A := \{(x,y) \in \Omega : |y-x| < h\}$ esemény valószínűsége. A 4. ábrán láthatjuk az eseményteret, melyben a satírozott rész jelöli az A halmazt.

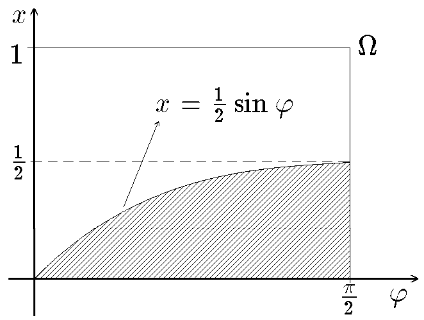


4. ábra

Felírva az A és az Ω területeinek a hányadosát, kapjuk a kérdéses valószínűséget: $P(A) = 2h - h^2$.

2.16. FELADAT. **(Buffon-féle tűprobléma.)** Egy vízszintes síkon 2 egységnyi távolságra párhuzamos egyeneseket húzunk. Mi a valószínűsége, hogy egy egységnyi hosszúságú tűt ráejtve a síkra, az elmetszi valamelyik egyenest?

MEGOLDÁS. Legyen x a tű középpontjának a távolsága a hozzá legközelebb eső egyenestől, φ pedig a tű és az egyenes által bezárt szög mértéke radiánban. Így $\varphi \in [0, \pi/2]$ és $x \in [0,1]$. Legyen $\Omega := [0, \pi/2] \times [0,1]$. Ekkor az előző feladathoz hasonlóan járhatunk el. Mivel adott φ szögnél pontosan $x \leq \frac{1}{2} \sin \varphi$ teljesülése esetén metszi az egyenest a tű, ezért a kérdés az $A := \{(\varphi, x) \in \Omega : x \leq \frac{1}{2} \sin \varphi\}$ esemény valószínűsége. A 5. ábrán láthatjuk az eseményteret, melyben a satírozott rész jelöli az A halmazt. Az Ω területe $\pi/2$, az A területe pedig $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{1}{2} \left[-\cos \varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$, ezért a kettő hányadosa $P(A) = 1/\pi$.



5. ábra

3. Feltételes valószínűség

Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{A}$. Vizsgáljuk az A esemény bekövetkezésének a valószínűségét, feltéve hogy B bekövetkezik.

Klasszikus valószínűségi mező esetén ezt a valószínűséget könnyen kiszámolhatjuk. Jelentse például A azt az eseményt, hogy dobókockán nem dobunk 3-nál nagyobbat, azaz $A := \{1, 2, 3\}$. Egy dobás végrehajtása után annyi információt kapunk az eredményről, hogy az páros szám, tehát $B := \{2, 4, 6\}$. Ekkor az A esemény bekövetkezésének valószínűsége már nem $3/6$, mint az eredetileg volt, hanem $1/3$. Ugyanis B bekövetkezése esetén az A csak úgy következhet be, ha 2-est dobunk, másrészt pedig B-ben 3 lehetséges eset van. Ezzel a gondolatmenettel tehát az összes esetek száma a B elemeinek a számával egyezik meg, a kedvező esetek száma pedig azon A-beli elemek számával, mely a B-nek is eleme. Tehát a keresett valószínűség

$$\frac{N(AB)}{N(B)} = \frac{N(AB)}{N(\Omega)} : \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

ahol N a halmaz számosságát jelenti. A kapott eredményt terjesszük ki tetszőleges valószínűségi mezőre.

3.1. DEFINÍCIÓ. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, $A, B \in \mathcal{A}$ és $P(B) \neq 0$. Ekkor a

$$P(A \mid B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$$

hányadost, az A **esemény** B-re **vonatkozó feltételes valószínűségének** nevezzük.

3.2. KÖVETKEZMÉNY. **(Szorzás tétel.)** *Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, továbbá $A, B \in \mathcal{A}$, és $P(B) \neq 0$, akkor $P(AB) = P(A \mid B)P(B)$ teljesül.*

3.3. TÉTEL. *A feltételes valószínűség rendelkezik a valószínűség tulajdonságaival, vagyis ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és $B \in \mathcal{A}$ esetén $P(B) \neq 0$, akkor teljesülnek a következők.*

(1) *Ha $A \in \mathcal{A}$, akkor $0 \leq P(A \mid B)$.*

(2) $P(\Omega \mid B) = 1$.

(3) *Ha $A_i \in \mathcal{A}$ minden $i \in \mathbf{Z}^+$ esetén és páronként egymást kizáróak, akkor*

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i \mid B\right).$$

BIZONYÍTÁS. (1) Mivel $P(AB) \geq 0$ és $P(B) > 0$ a **(P1)** axióma és a $P(B) \neq 0$ feltétel miatt, ezért igaz az állítás.

(2) $P(\Omega \mid B) = \dfrac{P(\Omega B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1.$

(3) Mivel $A_iB \cdot A_jB = A_iA_jBB = A_iA_jB = \emptyset B = \emptyset$, ezért az A_iB események páronként egymást kizáróak. Így a **(P3)** axiómából következően

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right) = \frac{P\left(B \cdot \sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_iB\right)}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_iB\right)}{P(B)} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_iB)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \mid B).$$

3.4. TÉTEL. *Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és $A, B, C \in \mathcal{A}$, akkor*

(1) $P(A \mid B) \leq 1$, *ha* $P(B) \neq 0$,

(2) $P(A \mid B) = 1$, *ha* $B \subseteq A$ *és* $P(B) \neq 0$,

(3) $P\left(\overline{A} \mid B\right) = 1 - P(A \mid B)$, *ha* $P(B) \neq 0$,

(4) $P(A + B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(AB \mid C)$, *ha* $P(C) \neq 0$,

(5) $P(A - B \mid C) = P(A \mid C) - P(AB \mid C)$, *ha* $P(C) \neq 0$,

(6) $\dfrac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)} \leq P(A \mid B) \leq \dfrac{P(A)}{P(B)}$, *ha* $P(B) \neq 0$.

BIZONYÍTÁS.

(1) $AB \subseteq B$, ezért $P(AB) \leq P(B)$, így $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} \leq 1.$

(2) $B \subseteq A$, ezért $AB = B$, így $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1.$

(3) $B = BA + B\overline{A}$ diszjunkt felbontás, ezért $P(B) = P(BA) + P\left(B\overline{A}\right)$, melyből $P\left(\overline{A}B\right) = P(B) - P(BA)$ következik. Ennek alapján

$$P\left(\overline{A} \mid B\right) = \frac{P\left(\overline{A}B\right)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(BA)}{P(B)} = 1 - \frac{P(BA)}{P(B)} = 1 - P(A \mid B).$$

(4) A 2.3. Tétel (4) pontja alapján

$$P(A + B \mid C) = \frac{P\Big((A+B)C\Big)}{P(C)} = \frac{P(AC + BC)}{P(C)} =$$
$$= \frac{P(AC) + P(BC) - P(ACBC)}{P(C)} = \frac{P(AC)}{P(C)} + \frac{P(BC)}{P(C)} -$$
$$- \frac{P(ABC)}{P(C)} = P(A \mid C) + P(B \mid C) - P(AB \mid C).$$

(5) A 2.3. Tétel (5) pontja miatt

$$P(A \mid C) - P(AB \mid C) = \frac{P(AC) - P(ABC)}{P(C)} = \frac{P(AC - B)}{P(C)} =$$
$$= \frac{P(A\overline{B}C)}{P(C)} = P(A - B \mid C).$$

(6) $AB \subseteq A$, ezért $P(AB) \leq P(A)$, melyből $P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \leq \frac{P(A)}{P(B)}$ következik. Másrészt

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A+B)}{P(B)} \geq \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(B)}.$$

3.5. TÉTEL. **(A teljes valószínűség tétele.)** *Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, $\left\{B_i \in \mathcal{A} : i \in \mathbf{Z}^+\right\}$ teljes eseményrendszer, és $P(B_i) \neq 0$ minden $i \in \mathbf{Z}^+$-ra, akkor bármely $A \in \mathcal{A}$ esetén*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid B_i) P(B_i).$$

BIZONYÍTÁS. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$, ezért $A = \sum\limits_{i=1}^{\infty} AB_i$. Mivel a B_i események páronként egymást kizáróak, ezért az AB_i események is azok lesznek, tehát alkalmazhatjuk a teljes additivitást.

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(A \mid B_i) P(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(AB_i) = P\left(\sum_{i=1}^{\infty} AB_i\right) = P(A).$$

3.6. TÉTEL. **(Bayes-tétel.)** *Legyen az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *egy valószínűségi mező. Ha* $\{B_i \in \mathcal{A} : i \in \mathbf{Z}^+\}$ *teljes eseményrendszer, és* $P(B_i) \neq 0$ *minden* $i \in \mathbf{Z}^+$ *esetén, továbbá ha* $A \in \mathcal{A}$ *és* $P(A) \neq 0$, *akkor bármely* $i \in \mathbf{Z}^+$ *esetén*

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A \mid B_k)P(B_k)}.$$

BIZONYÍTÁS. A teljes valószínűség tétele szerint

$$\frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A \mid B_k)P(B_k)} = \frac{\frac{P(AB_i)}{P(B_i)}P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(AB_i)}{P(A)} = P(B_i \mid A).$$

3.7. MEGJEGYZÉS. (1) Ha valamely A eseményt mint okozatot tekintjük, amit a B_i $(i \in \mathbf{Z}^+)$ okok válthatnak ki, akkor ismerve az okok valószínűségeit és hatásukat az okozat bekövetkezésére, azaz a $P(A \mid B_i)$ értékeket tudva, a teljes valószínűség tétele értelmében az okozat valószínűsége meghatározható.

Másfelől, ha az A okozat már bekövetkezett, akkor a Bayes-tétellel következtethetünk arra, hogy egy kiválasztott ok milyen valószínűséggel szerepelt az A létrejöttében. Ilyen értelemben a Bayes-tétel megfordítása a teljes valószínűség tételének.

(2) Ha a $B_1, B_2, \ldots$ eseményrendszerre teljesül, hogy páronként egymást kizáróak és összegük valószínűsége 1, akkor azt **tágabb értelemben teljes eseményrendszernek** nevezzük. A teljes valószínűség tétele és a Bayes-tétel ilyen eseményrendszerekre is igaz. Másrészt ha a tágabb értelemben teljes eseményrendszer véges sok eseményből áll, ez a két tétel akkor is teljesül. Ezek bizonyítását az olvasóra bízzuk.

3.8. FELADAT. Szindbádnak jogában áll tíz háremhölgy közül feleséget választania oly módon, hogy az előtte elvonuló, véletlenszerűen sorrendbe állított hölgyek közül az első ötöt el kell engednie, de az utánna következők közül ki kell választania a legelsőt, aki az első öt hölgytől szebb. Mi a valószínűsége annak, hogy Szindbád a legszebb hölgyet tudja kiválasztani? (Feltesszük, hogy szigorú sorrendet tudunk megállapítani a hölgyek szépségét illetően, továbbá ha a legszebb hölgy az első öt között volt, akkor Szindbád nem választhat ki senkit.)

MEGOLDÁS. Jelentse A azt az eseményt, hogy Szindbád a legszebb háremhölgyet választja ki, B_i pedig azt, hogy i-ediknek érkezik a legszebb hölgy. Ekkor a teljes valószínűség tétele szerint $P(A) = \sum_{i=1}^{10} P(A \mid B_i)P(B_i)$. Ha $i \leq 5$, akkor $P(A \mid B_i) = 0$, melyből

$$P(A) = \sum_{i=6}^{10} P(A \mid B_i)\underbrace{P(B_i)}_{0,1}.$$

Ha az első $i-1$ hölgy között a legszebb az első ötben volt, akkor bekövetkezik A. Mivel $i-1$ hölgy között $(i-1)$-féleképpen helyezkedhet el a legszebb, és ebből az előzőek értelmében csak 5 a kedvező, ezért $P(A \mid B_i) = 5/(i-1)$. Mindezekből

$$P(A) = \sum_{i=6}^{10} \frac{5}{i-1} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{2}\sum_{i=5}^{9} \frac{1}{i} \approx 0{,}373.$$

3.9. FELADAT. Egy üzemben három gép dolgozik. Az első a termelés 25%-át adja, és 5%-os selejttel dolgozik. A második 35%-ot termel 4%-os selejttel, végül a harmadik 40%-ot ad 2%-os selejttel. A termékek közül kiválasztunk egyet véletlenszerűen, és azt tapasztaljuk, hogy az selejtes. Mi a valószínűsége annak, hogy az első gép gyártotta.

MEGOLDÁS. Jelentse A azt az eseményt, hogy selejtes terméket választottunk, B_i pedig azt, hogy az i-edik gép gyártotta. Ekkor a Bayes-tétel értelmében a kérdéses valószínűség

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{\sum_{k=1}^{3} P(A \mid B_k)P(B_k)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}05}{0{,}25 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}04 + 0{,}4 \cdot 0{,}02} \approx 0{,}362.$$

4. Események függetlensége

Jelentse A azt az eseményt, hogy dobókockával nem dobunk 3-nál nagyobbat, vagyis $A := \{1, 2, 3\}$, másrészt B jelentse azt, hogy 3-ast vagy 4-est dobunk, tehát $B := \{3, 4\}$. Ekkor $P(A) = 3/6$ és $P(A \mid B) = 1/2$, vagyis A-nak a valószínűsége, függetlenül attól, hogy B bekövetkezett-e vagy sem, mindig $1/2$. A továbbiakban ha $P(A) = P(A \mid B)$ teljesül akkor azt mondjuk, hogy A **független** B-től. Könnyű ellenőrizni, hogy B is független A-tól, hiszen $P(B) = 2/6$ és $P(B \mid A) = 1/3$, tehát megegyeznek. A függetlenségnek ez a szimmetria tulajdonsága általánosan is igaz, vagyis $P(A)P(B) \neq 0$ esetén $P(A) = P(A \mid B)$ pontosan akkor teljesül, ha $P(B) = P(B \mid A)$. Azaz A pontosan akkor független B-től, ha B független A-tól.

Vegyük észre, hogy $P(A)P(B) \neq 0$ esetén a függetlenség fogalma ekvivalens azzal, hogy $P(AB) = P(A)P(B)$. Ez utóbbi képlet akkor is alkalmazható, ha $P(A)P(B) = 0$, másrészt a szimmetria azonnal látható belőle. Ezért a továbbiakban ezt fogadjuk el a függetlenség definíciójának.

4.1. DEFINÍCIÓ. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{A}$. Azt mondjuk, hogy az A esemény **független** B-től, ha

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

4.2. KÖVETKEZMÉNY. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és ebben A, B tetszőleges események. Ekkor $P(B) \neq 0$ esetén az A akkor és csak akkor független B-től, ha $P(A \mid B) = P(A)$.*

4.3. FELADAT. Antal és Béla céltáblára lőnek. Antal 0,8 valószínűséggel találja el a céltáblát, Béla pedig 0,5-el. A találatok egymástól függetlenek. Ha Antal és Béla egy-egy lövést adnak le, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyikőjük talál?

MEGOLDÁS. Az A esemény jelentse azt, hogy Antal talál, illetve B azt, hogy Béla talál. Meg kell határoznunk a $P(A + B)$ valószínűséget.

$$\begin{aligned} P(A + B) &= P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = \\ &= 0{,}8 + 0{,}5 - 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}9. \end{aligned}$$

4.4. FELADAT. Bizonyítsuk be, hogy ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és $A, B \in \mathcal{A}$ függetlenek, akkor az A és $\overline{B}$ is függetlenek.

MEGOLDÁS. Az A és B események függetlenségét és a 2.3. Tétel (5) pontját felhasználva kapjuk, hogy

$$P(A)P\left(\overline{B}\right) = P(A)\Big(1 - P(B)\Big) = P(A) - P(A)P(B) = P(A) - P(AB) =$$
$$= P(A - B) = P\left(A\overline{B}\right).$$

4.5. KÖVETKEZMÉNY. *Az A és B események akkor és csak akkor függetlenek, ha az $\overline{A}$ és B események függetlenek.*

4.6. FELADAT. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és $A_1, A_2, B \in \mathcal{A}$. Bizonyítsuk be, hogy ha az A_1 és A_2 egymást kizáró események, továbbá A_1 és A_2 függetlenek B-től, akkor az $A_1 + A_2$ is független B-től.

MEGOLDÁS.

$$P\Big((A_1 + A_2)B\Big) = P(A_1B + A_2B) = P(A_1B) + P(A_2B) = P(A_1)P(B)+$$
$$+P(A_2)P(B) = \Big(P(A_1)+P(A_2)\Big)P(B) = P(A_1 + A_2)P(B).$$

4.7. DEFINÍCIÓ. Legyen az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező, továbbá $H := \{A_i \in \mathcal{A} : i = 1, 2, \dots, n\}$. Ekkor a H véges eseményrendszer elemeit **teljesen függetleneknek**, vagy röviden **függetleneknek** nevezzük, ha a H eseményrendszer bármely G részhalmazára

$$P\left(\prod_{A_i \in G} A_i\right) = \prod_{A_i \in G} P(A_i) \tag{4.1}$$

teljesül. Egy végtelen eseményrendszer elemei függetlenek, ha bármely véges részrendszere független.

4.8. FELADAT. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező. Bizonyítsuk be, hogy ha $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ események teljesen függetlenek, akkor az

$$A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, \overline{A_k}, A_{k+1}, \dots, A_n$$

események is azok minden $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén.

MEGOLDÁS. A feladatot elég $k = 1$-re bizonyítani az indexelés önkényessége miatt. Legyen $H := \{\overline{A_1}, A_2, A_3, \dots, A_n\}$ és $G \subseteq H$ tetszőleges.

Ha $\overline{A_1} \notin G$, akkor (4.1) közvetlenül az $A_1, A_2, \ldots, A_n$ események teljes függetlenségéből következik.

$\overline{A_1} \in G$ esetén legyen $G := \{\overline{A_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, \ldots, A_{i_m}\}$, ahol $m \leq n$ pozitív egész szám, és $2 \leq i_2 < i_3 < \cdots < i_m \leq n$. Ekkor a 2.3. Tétel (5) pontja miatt

$$\begin{aligned} P\left(\overline{A_1} A_{i_2} \cdots A_{i_m}\right) &= P(A_{i_2} \cdots A_{i_m}) - P(A_1 A_{i_2} \cdots A_{i_m}) = \\ &= P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_m}) - P(A_1) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_m}) = \\ &= \Big(1 - P(A_1)\Big) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_m}) = \\ &= P\left(\overline{A_1}\right) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_m}) \end{aligned}$$

teljesül, ami az állításunkat bizonyítja.

4.9. MEGJEGYZÉS. (1) Húzzunk egy lapot a 32 lapos magyar kártyából. Legyen A az az esemény, hogy pirosat vagy zöldet húzunk, B az, hogy pirosat vagy tököt, illetve C az, hogy számozott lapot húzunk. Ekkor $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$, $P(AB) = P(AC) = P(BC) = 1/4$, $P(ABC) = 1/8$, amiből következik, hogy A, B, C események teljesen függetlenek.

(2) Ha egy eseményrendszer elemei teljesen függetlenek, akkor bármely két eleme is független egymástól, másképpen az eseményrendszer elemei **páronként függetlenek**. Fordítva nem igaz, a páronkénti függetlenségből nem következik a teljes függetlenség. Például, a 32 lapos magyar kártyából húzzunk ki egy lapot. Jelentse A azt, hogy makkot vagy pirosat húztunk, B azt, hogy makkot vagy tököt, illetve C azt, hogy makkot vagy zöldet húztunk. Ekkor $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ és $P(AB) = P(AC) = P(BC) = 1/4$ miatt az A, B, C események páronként függetlenek, de $P(ABC) = 1/4$ miatt $P(A)P(B)P(C) \neq P(ABC)$, így nem teljesen függetlenek.

(3) Sokakban a függetlenség fogalom azzal társul, hogy a két halmaznak halmazelméleti értelemben nincs közük egymáshoz, vagyis egymást kizáróak. Így gyakran a két fogalmat – a függetlenséget és a kizáróságot – összetévesztik. Ezért a következő tételnek és megjegyzéseknek az a célja, hogy a közöttük fennálló kapcsolatot, illetve különbséget megmutassa.

4.10. TÉTEL. *Ha $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, $A, B \in \mathcal{A}$, továbbá $P(A)P(B) \neq 0$, akkor A és B egymást kizárósága esetén A és B nem függetlenek.*

BIZONYÍTÁS. $P(AB) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A)P(B)$, ami állításunkat igazolja.

4.11. MEGJEGYZÉS. (1) A tétel megfordítása nem igaz. Például, ha egy lapot kihúzunk egy kártyacsomagból, és az A esemény jelenti azt, hogy pirosat vagy zöldet húztunk, a B esemény jelenti azt, hogy pirosat, tököt, vagy makkot húztunk, akkor az AB esemény azt jelöli, hogy pirosat húztunk. Így $P(A) = 1/2$, $P(B) = 3/4$, $P(AB) = 1/4$, amiből látható, hogy $P(AB) \neq P(A)P(B)$, tehát nem független A és B, de nem is egymást kizáróak.

(2) A 4.10. Tételt másképpen is megfogalmazhatjuk. Ha $P(A)P(B) \neq 0$ esetén A és B függetlenek, akkor A és B nem egymást kizáróak.

Természetesen, így ennek sem igaz a megfordítása. Azaz ha A és B nem egymást kizáróak, akkor a függetlenségről nem tudunk semmit mondani.

Azt, hogy két vagy több kísérletet egymástól függetlenül végzünk el, azaz több különböző valószínűségi mező eseményeinek függetlenségét, a (4.1) képlettel nem definiálhatjuk. Ezért a következőkben bevezetjük a független kísérletek valószínűségi mezőjének a fogalmát, mely az egész kísérletsorozatot egyszerre, egy mezőben írja le. Ekkor már van lehetőség a függetlenség vizsgálatában a (4.1) képlet használatára.

4.12. DEFINÍCIÓ. Legyen Ω nem üres halmaz és H részhalmaza az Ω hatványhalmazának. Ekkor $\sigma(H)$ alatt a H által generált σ-algebrát értjük, azaz a H-t tartalmazó összes olyan σ-algebra metszetét, amely részhalmaza az Ω hatványhalmazának.

4.13. DEFINÍCIÓ. Egy kísérletsorozatban n darab kísérletet végzünk. Minden kísérlethez tartozik egy valószínűségi mező,

$$(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n).$$

Legyen

$$\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n,$$

$$\mathcal{A} := \sigma\Big(\{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2, \ldots, n\}\Big),$$

továbbá $P : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ olyan valószínűség, melyre

$$P(A_1 \times \cdots \times A_n) = P_1(A_1) \cdots P_n(A_n)$$

teljesül minden $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén. Ekkor a kísérletsorozatot **független kísérletek véges sorozatának**, az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$-t pedig **véges sok független kísérlet valószínűségi mezőjének** nevezzük.

A független kísérletek valószínűségi mezőjének definícióját kiterjeszthetjük végtelen sok kísérlet esetére is. Bár ilyen kísérletsorozatot ténylegesen nem tudunk elvégezni, mégis szükségünk lesz rá a későbbi határérték tételekben.

4.14. DEFINÍCIÓ. Legyen $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$, $i \in \mathbf{Z}^+$ valószínűségi mezők,

$$\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots,$$

$$\mathcal{A} := \sigma\Big(\big\{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2, \ldots, n \text{ és } n \in \mathbf{Z}^+\big\}\Big),$$

továbbá $P : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ olyan valószínűség, melyre

$$P(A_1 \times \cdots \times A_n) = P_1(A_1) \cdots P_n(A_n)$$

teljesül minden $n \in \mathbf{Z}^+, A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2 \ldots, n$ esetén. Ekkor a valószínűségi mezők $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i)$ sorozatát **független kísérletek végtelen sorozatának**, az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$-t pedig **végtelen sok független kísérlet valószínűségi mezőjének** nevezzük.

4.15. MEGJEGYZÉS. (1) Az előző definíciókban meghatározott valószínűségek egyértelműen léteznek. (Lásd [3] 142. oldal.)

(2) Az, hogy egy véges független kísérletsorozatban a k–adik kísérlet eredménye $A_k \in \mathcal{A}_k$, azt jelenti, hogy bekövetkezett az

$$A_k^* := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{k-1} \times A_k \times \Omega_{k+1} \times \cdots \times \Omega_n \in \mathcal{A}$$

esemény, vagyis a többi kísérletben bármi előfordulhat. Így

$$P_k(A_k) = P(A_k^*) \quad \text{és} \quad A_1 \times \cdots \times A_n = A_1^* \cdots A_n^*$$

teljesül minden $A_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}_n$ esetén. Ebből látható, hogy ekkor

$$P(A_1^* \cdots A_n^*) = P(A_1^*) \cdots P(A_n^*)$$

teljesül, ami a (4.1) képletnek felel meg, azaz tényleg jogos a függetlenség jelző.

(3) Független kísérletek valószínűségi mezője például az úgynevezett Bernoulli-féle valószínűségi mező, mellyel az 5. fejezet részletesen foglalkozik.

5. Valószínűségi változó

5.1. JELÖLÉS. Legyen ξ egy Ω eseménytéren értelmezett valós értékű függvény, továbbá $k \in \mathbf{R}$. Vezessük be a

$$\{\xi = k\} := \{\omega : \omega \in \Omega, \xi(\omega) = k\}$$

jelölést. Hasonlóan definiálhatjuk a

$$\{\xi < k\},\ \{\xi > k\},\ \{\xi = \eta\},\ \{\xi < \eta\},\ \{\xi > \eta\} \text{ stb.}$$

halmazokat is, ha η szintén az Ω-n értelmezett valós értékű függvény.

Ha $\{\xi = k\}$ esemény, akkor annak valószínűségét $P\Big(\{\xi = k\}\Big)$ helyett $P(\xi = k)$-val fogjuk jelölni.

5.2. DEFINÍCIÓ. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és ξ az Ω-n értelmezett valós értékű függvény. Ha $\{\xi < k\} \in \mathcal{A}$ minden $k \in \mathbf{R}$ esetén, akkor a ξ függvényt **valószínűségi változónak** nevezzük.

5.3. MEGJEGYZÉS. A mértékelméletben a $\{\xi < k\}$ halmazt **nívóhalmaznak** nevezik. Ha ξ minden nívóhalmaza eleme $\mathcal{A}$-nak, akkor ξ-t **mérhető függvénynek** nevezzük. Így a valószínűségi változó olyan Ω-n értelmezett valós értékű függvény, mely mérhető.

5.4. TÉTEL. *Legyen az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben ξ és η valószínűségi változók. Ekkor minden $k, l \in \mathbf{R}$ esetén $\{\xi = k\}$, $\{\xi > k\}$, $\{l < \xi < k\}$ és $\{\xi < \eta\}$ halmazok események.*

BIZONYÍTÁS. A valószínűségi változó definíciója miatt $\{\xi < k\} \in \mathcal{A}$. Ebből **(S2)** miatt

$$\{\xi = k\} = \{\xi \geq k\}\{\xi \leq k\} = \overline{\{\xi < k\}} \prod_{n=1}^{\infty} \left\{\xi < k + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{A}$$

teljesül. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\{\xi > k\} = \overline{\{\xi \leq k\}} = \overline{\{\xi < k\} + \{\xi = k\}} \in \mathcal{A},$$

melyből

$$\{l < \xi < k\} = \{\xi > l\}\{\xi < k\} \in \mathcal{A}$$

következik. A $\{\xi < \eta\} \in \mathcal{A}$ kimutatásához tekintsünk egy olyan $\langle r_n \rangle$ számsorozatot, melynek az értékkészlete a racionális számok halmaza. Ilyen sorozat létezik, mert a racionális számok halmazának számossága megszámlálhatóan végtelen. Ekkor

$$\{\xi < \eta\} = \sum_{n=1}^{\infty} \{\xi < r_n\}\{\eta > r_n\} \in \mathcal{A},$$

hiszen a racionális számok sűrűn helyezkednek el a számegyenesen, vagyis $\omega \in \{\xi < \eta\}$ esetén létezik olyan $n_0 \in \mathbf{Z}^+$, melyre $\xi(\omega) < r_{n_0} < \eta(\omega)$ teljesül. Így

$$\omega \in \{\xi < r_{n_0}\}\{\eta > r_{n_0}\} \subseteq \sum_{n=1}^{\infty} \{\xi < r_n\}\{\eta > r_n\},$$

melyből már következik az előző egyenlőség, és ebből az állítás.

5.5. TÉTEL. *Ha ξ és η az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben értelmezett valószínűségi változók és $c \in \mathbf{R}$, akkor a következő függvények is valószínűségi változók.*

(1) $\xi + c$,	(2) $c\xi$,	(3) $\lvert\xi\rvert$,
(4) ξ^2,	(5) $\frac{1}{\xi}$, ha $\{\xi \neq 0\} = \Omega$,	(6) $\xi - \eta$,
(7) $\xi + \eta$,	(8) $\xi\eta$,	(9) $\frac{\xi}{\eta}$, ha $\{\eta \neq 0\} = \Omega$.

BIZONYÍTÁS. Az állítás az 5.4. Tétel következménye, figyelembe véve a következőket.

(1) $\{\xi + c < k\} = \{\xi < k - c\} \in \mathcal{A}$ minden $k \in \mathbf{R}$ esetén.

(2)
$$\{c\xi < k\} = \begin{cases} \{\xi < \frac{k}{c}\}, & \text{ha } c > 0\ , \\ \{\xi > \frac{k}{c}\}, & \text{ha } c < 0\ , \\ \Omega, & \text{ha } c = 0 \quad \text{és} \quad k > 0\ , \\ \emptyset, & \text{ha } c = 0 \quad \text{és} \quad k \leq 0\ , \end{cases}$$

(3)
$$\{|\xi| < k\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{ha } k \leq 0\ , \\ \{-k < \xi < k\}, & \text{ha } k > 0\ . \end{cases}$$

(4)
$$\{\xi^2 < k\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{ha } k \le 0\ , \\ \left\{-\sqrt{k} < \xi < \sqrt{k}\right\}, & \text{ha } k > 0\ . \end{cases}$$

(5)
$$\left\{\frac{1}{\xi} < k\right\} = \begin{cases} \{\xi < 0\}\,, & \text{ha } k = 0\ , \\ \{\xi > \frac{1}{k}\} + \{\xi < 0\}\,, & \text{ha } k > 0\ , \\ \{\frac{1}{k} < \xi < 0\}\,, & \text{ha } k < 0\ . \end{cases}$$

(6) $\{\xi - \eta < k\} = \{\xi < \eta + k\} \in \mathcal{A}$ minden $k \in \mathbf{R}$ esetén.

(7) Az állítás a (2) és (6) pontokból következik.

(8) $\xi\eta = \frac{1}{4}\left((\xi+\eta)^2 - (\xi-\eta)^2\right)$ miatt $\{\xi\eta < k\} \in \mathcal{A}$ következik.

(9) $\frac{\xi}{\eta} = \xi \cdot \frac{1}{\eta}$, így az (5) és (8) pontok miatt $\left\{\frac{\xi}{\eta} < k\right\} \in \mathcal{A}$.

5.6. DEFINÍCIÓ. A $\mathcal{B} := \sigma\Big(\big\{(-\infty, x) : x \in \mathbf{R}\big\}\Big)$ halmaz elemeit **Borel-halmazoknak** nevezzük.

5.7. DEFINÍCIÓ. Legyen $\mathcal{B}^n := \sigma(\mathcal{B} \times \cdots \times \mathcal{B})$, $(n \in \mathbf{Z}^+)$, azaz a $\mathcal{B}$ önmagával n-szer vett direkt szorzata által generált σ-algebra. Ekkor $\mathcal{B}^n$ elemeit **n-dimenziós Borel-halmazoknak** nevezzük.

5.8. DEFINÍCIÓ. Az $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$ függvényt **Borel-mérhetőnek** nevezzük, ha $\{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbf{R}^n,\ f(\vec{x}) < k\} \in \mathcal{B}^n$ minden $k \in \mathbf{R}$ esetén.

5.9. TÉTEL. *Az $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$ függvény akkor és csak akkor Borel-mérhető, ha $f^{-1}(B) = \big\{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbf{R}^n,\ f(\vec{x}) \in B\big\} \in \mathcal{B}^n$ minden $B \in \mathcal{B}$ esetén.*

BIZONYÍTÁS. (1) Az $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvényre teljesüljön, hogy minden $B \in \mathcal{B}$ esetén $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n$. Mivel $(-\infty, k) \in \mathcal{B}$ minden $k \in \mathbf{R}$ esetén, ezért $f^{-1}\Big((-\infty, k)\Big) \in \mathcal{B}$. Viszont $f^{-1}\Big((-\infty, k)\Big) = \{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbf{R}^n,\ f(\vec{x}) < k\}$, így f Borel-mérhető.

(2) Megfordítva, most $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ függvény legyen Borel-mérhető, azaz minden $k \in \mathbf{R}$ esetén $f^{-1}\Big((-\infty, k)\Big) \in \mathcal{B}^n$. Bebizonyítjuk, hogy a

$$\mathcal{H} := \big\{B : B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n\big\}$$

σ-algebrát alkot. Ennek érdekében először vegyük észre, hogy ha $A_i \subseteq \mathbf{R}$ minden $i \in \mathbf{Z}^+$ esetén, akkor

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(A_i) \tag{5.1}$$

teljesül az 1.5. Megjegyzés (13) pontja és a részhalmaz definíciója miatt. Ebből következik, hogy

$$f^{-1}(\mathbf{R}) = f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(-\infty, k)\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}\Big((-\infty, k)\Big) \in \mathcal{B}^n,$$

hiszen $f^{-1}\Big((-\infty, k)\Big) \in \mathcal{B}^n$, és $\mathcal{B}^n$ σ-algebra. Így $\mathbf{R} \in \mathcal{H}$. Másrészt, ha $B \in \mathcal{H}$, akkor

$$f^{-1}\left(\overline{B}\right) = \left\{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbf{R}^n,\, f(\vec{x}) \in \overline{B}\right\} = \overline{\left\{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbf{R}^n,\, f(\vec{x}) \in B\right\}} = \overline{f^{-1}(B)},$$

ami eleme $\mathcal{B}^n$-nek, vagyis $\overline{B} \in \mathcal{H}$. Harmadrészt, ha $B_i \in \mathcal{H}$ minden $i \in \mathbf{Z}^+$ esetén, akkor (5.1) miatt

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{B}^n,$$

így $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{H}$. Mindezekből következik, hogy $\mathcal{H}$ σ-algebrát alkot. Emiatt $\mathcal{H}$ tartalmazza a $(-\infty, k)$ intervallumok által generált σ-algebrát, azaz $\mathcal{B}$-t, hiszen minden $k \in \mathbf{R}$ esetén $(-\infty, k) \in \mathcal{H}$ teljesül. Másrészt a $\mathcal{H}$ definíciójából $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}$, így $\mathcal{H} = \mathcal{B}$. Ebből következik, hogy minden $B \in \mathcal{B}$ esetén $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n$. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

5.10. TÉTEL. *A $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$ pontosan akkor valószínűségi változó az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, ha minden $B \in \mathcal{B}$ esetén $\xi^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ teljesül.*

BIZONYÍTÁS. Az 5.9. Tétel bizonyításában $\mathcal{B}^n$ helyére $\mathcal{A}$ írva, adódik az állítás.

5.11. MEGJEGYZÉS. Például, ha $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$ folytonos, vagy $n = 1$ esetén monoton függvény, akkor Borel-mérhető. Ugyanis az $\left\{\vec{x} : \vec{x} \in \mathbf{R}^n,\, f(\vec{x}) < k\right\}$, $k \in \mathbf{R}$ nívóhalmazok folytonos esetben nyíltak, monoton esetben pedig végtelen intervallumok.

5.12. TÉTEL. *Ha* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók, és* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{Z}^+)$ *Borel-mérhető függvény, akkor* $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ *is valószínűségi változó.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $B \in \mathcal{B}$ tetszőleges. Ekkor az 5.10. Tétel alapján $\vec{\xi} := (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ és $\eta := f\left(\vec{\xi}\right)$ jelölésekkel $\eta^{-1}(B) = \vec{\xi}^{-1}\left(f^{-1}(B)\right) \in \mathcal{A}$, hiszen az 5.9. Tétel miatt $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n$.

5.13. MEGJEGYZÉS. Az 5.12. Tétel általánosítása az 5.5. Tételnek. Például az abszolút érték függvény folytonos, így az 5.11. Megjegyzés alapján Borel-mérhető, tehát a ξ valószínűségi változó abszolút értéke is valószínűségi változó.

5.14. DEFINÍCIÓ. Ha egy független véges kísérletsorozat minden kísérletéhez ugyanazon $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező tartozik, ahol $\Omega := \{\omega_0, \omega_1\}$ és $\mathcal{A}$ az Ω hatványhalmaza, akkor azt **Bernoulli-féle kísérletsorozatnak**, továbbá az ehhez tartozó független kísérletek valószínűségi mezőjét **Bernoulli-féle valószínűségi mezőnek** nevezzük.

5.15. TÉTEL. *Legyen adott egy Bernoulli-féle valószínűségi mező, továbbá*

$$\xi_i : \Omega^n \to \mathbf{R}, \quad \xi_i(\vec{\omega}) := \begin{cases} 1, & \text{ha } \vec{\omega} \quad i\text{-edik komponense } \omega_1, \\ 0, & \text{ha } \vec{\omega} \quad i\text{-edik komponense } \omega_0, \end{cases}$$

minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *esetén, ahol* $n \in \mathbf{Z}^+$, *és* $\varrho_n := \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. *Ekkor a* ξ_i, ϱ_n *és* ϱ_n/n *függvények valószínűségi változók. A* ϱ_n *illetve a* ϱ_n/n *valószínűségi változókat az* $\{\omega_1\}$ *esemény* **gyakoriságának** *illetve* **relatív gyakoriságának** *nevezzük.*

BIZONYÍTÁS. A tétel a valószínűségi változó definíciójából és az 5.5. Tételből következik.

5.16. TÉTEL. *Legyen adott egy Bernoulli-féle valószínűségi mező. Az előző tételben definiált* ξ_i *és* ϱ_n *valószínűségi változók esetén* p *jelölje a* $\{\xi_i = 1\}$ *esemény valószínűségét, továbbá legyen* $q := 1 - p$. *Ekkor minden* $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ *esetén*

$$P(\varrho_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

BIZONYÍTÁS. A $\{\varrho_n = k\}$ esemény azt jelenti, hogy a kísérletsorozatban k-szor következett be az $\{\omega_1\}$ esemény és $(n-k)$-szor az $\{\omega_0\}$. Ez $\binom{n}{k}$-féleképpen valósulhat meg, ezért a $\{\varrho_n = k\}$ esemény $\binom{n}{k}$ darab elemi eseményből áll. Egy elemi esemény valószínűsége a függetlenség miatt $p^k q^{n-k}$. Így a véges additivitásból adódik az állítás.

5.17. MEGJEGYZÉS. (1) Az 5.15. Tételben az a feltétel, hogy $\vec{\omega}$ i-edik komponense ω_1, azt jelenti, hogy a kísérletsorozatban, az i-edik kísérletben az $\{\omega_1\}$ esemény következett be. Így ϱ_n azt adja meg, hogy n darab kísérletben, hányszor következett be $\{\omega_1\}$. Ebből következik, hogy ϱ_n/n a bevezetőben elmondottak szerinti értelemben az $\{\omega_1\}$ esemény relatív gyakorisága.

(2) A Bernoulli-féle valószínűségi mező és a ξ_i definíciójából $\{\xi_i = 1\}$ eleme $\mathcal{A}^n$-nek, vagyis esemény, továbbá minden Ω eseménytérhez ugyanaz a P valószínűség tartozik, ezért

$$P(\xi_1 = 1) = P(\xi_2 = 1) = \cdots = P(\xi_n = 1),$$

vagyis p és q definíciója korrekt.

5.18. DEFINÍCIÓ. Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben értelmezett ξ valószínűségi változót **diszkrét valószínűségi változónak** nevezzük, ha a ξ értékkészletének számossága megszámlálható.

5.19. MEGJEGYZÉS. (1) A gyakoriság és a relatív gyakoriság diszkrét valószínűségi változók. Vannak nem diszkrét valószínűségi változók is, de ezekről csak később esik szó.

(2) Nézzünk egy példát a Bernoulli-féle valószínűségi mezőre. Az $\{\omega_1\}$ halmaz reprezentálja azt az eseményt, hogy dobókockával 6-ost dobunk, $\{\omega_0\}$ pedig azt, hogy nem 6-ost dobunk. Legyen $\Omega := \{\omega_0, \omega_1\}$ és $\mathcal{A}$ az Ω hatványhalmaza. Így egy dobáshoz az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező tartozik, ahol $P(\{\omega_0\}) = 5/6$ és $P(\{\omega_1\}) = 1/6$. Dobjunk háromszor egymástól függetlenül a dobókockával. Ez egy Bernoulli-féle kísérletsorozat, melyhez tartozó valószínűségi mezőt a következőképpen írhatjuk le. Az eseménytér

$$\begin{aligned}\Omega^3 = \{&(\omega_0, \omega_0, \omega_0), (\omega_0, \omega_0, \omega_1), (\omega_0, \omega_1, \omega_0), (\omega_0, \omega_1, \omega_1),\\ &(\omega_1, \omega_0, \omega_0), (\omega_1, \omega_0, \omega_1), (\omega_1, \omega_1, \omega_0), (\omega_1, \omega_1, \omega_1)\}.\end{aligned}$$

Például az $\{(\omega_0, \omega_1, \omega_0)\}$ elemi esemény akkor következik be, ha a három dobásból csak a második volt 6-os, annak valószínűsége pedig a függetlenség miatt

$$P(\{\omega_1\})P(\{\omega_0\})P(\{\omega_1\}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}.$$

A kísérletsorozatban az események halmaza az Ω^3 hatványhalmaza. Legyen

$$\xi_i : \Omega^3 \to \mathbf{R}, \quad \xi_i(\vec{\omega}) := \begin{cases} 1, & \text{ha } \vec{\omega} \quad i\text{-edik komponense } \omega_1, \\ 0, & \text{ha } \vec{\omega} \quad i\text{-edik komponense } \omega_0, \end{cases}$$

ahol $i = 1, 2, 3$. Ez azt jelenti, hogy a ξ_i értéke 1, ha az i-edik dobás a háromból 6-os volt, 0 pedig ha nem. Ekkor a $\varrho_3 := \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ azt az értéket adja meg, hogy a három dobásból hányszor kaptunk 6-ost. Ez a gyakoriság. Így a $\varrho_3/3$ a relatív gyakoriságot adja meg. Az 5.16. Tétel szerint annak a valószínűsége, hogy három kísérletből pontosan egyszer dobjunk 6-ost

$$P(\varrho_3 = 1) = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \approx 0{,}347.$$

6. Valószínűségi változót jellemző függvények

Eloszlás

6.1. DEFINÍCIÓ. Ha ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben értelmezett diszkrét valószínűségi változó, akkor a

$$\langle p_k \rangle : R_\xi \to [0,1], \quad p_k := P(\xi = k)$$

sorozatot a ξ **eloszlásának** nevezzük.

6.2. TÉTEL. (1) *Ha ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben értelmezett diszkrét valószínűségi változó és $\langle p_k \rangle$ az eloszlása, akkor $\sum\limits_{k \in R_\xi} p_k = 1$.*

(2) *Ha $H \subset \mathbf{R}$ nem üres megszámlálható halmaz, $\langle p_k \rangle : H \to [0,1]$ és $\sum\limits_{k \in H} p_k = 1$, akkor létezik $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és azon ξ valószínűségi változó, melynek értékkészlete H és eloszlása $\langle p_k \rangle$.*

BIZONYÍTÁS. (1) A $\big\{\{\xi = k\} : k \in R_\xi\big\}$ teljes eseményrendszert alkot, ezért

$$\sum_{k \in R_\xi} p_k = \sum_{k \in R_\xi} P(\xi = k) = P\left(\sum_{k \in R_\xi} \{\xi = k\}\right) = P(\Omega) = 1.$$

(2) Legyen $\Omega := H$, $\mathcal{A}$ az Ω hatványhalmaza, továbbá

$$P : \mathcal{A} \to \mathbf{R}, \quad P(A) := \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

Ekkor az **(S1)–(S3)** tulajdonságok triviálisan teljesülnek. A **(P1)** $\langle p_k \rangle$ értékkészlete miatt igaz, továbbá **(P2)** is fennáll, ugyanis $\Omega = H$, így a feltételből és a konstrukcióból

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in H} p_\omega = 1$$

teljesül. Végül **(P3)** P definíciójából következik. Így $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező. Most legyen

$$\xi : \Omega \to \mathbf{R}, \quad \xi(\omega) := \omega.$$

Ekkor ξ valószínűségi változó, továbbá $R_\xi = H$. Másrészt a P definíciójából az is következik, hogy ξ eloszlása $\langle p_k \rangle$.

6.3. MEGJEGYZÉS. (1) Az 5.16. Tételben a ϱ_n eloszlását határoztuk meg, ezért a 6.2. Tétel szerint

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1,$$

amit a binomiális tétellel is ellenőrizhetünk.

(2) Tekintsünk egy másik példát is az eloszlásra. Legyen 15 labda között 9 új és 6 régi, melyekből hármat véletlenszerűen kiválasztunk. A ξ valószínűségi változó értéke legyen a kihúzott új labdák száma. Ekkor a ξ eloszlása

$$p_0 = P(\xi = 0) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{20}{455}$$

$$p_1 = P(\xi = 1) = \frac{9 \cdot \binom{6}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{135}{455}$$

$$p_2 = P(\xi = 2) = \frac{\binom{9}{2} \cdot 6}{\binom{15}{3}} = \frac{216}{455}$$

$$p_3 = P(\xi = 3) = \frac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{84}{455}.$$

(3) A 6.2. Tétel szerint, ha $H \subset \mathbf{R}$ nem üres megszámlálható halmaz, akkor egy $\langle p_k \rangle : H \to [0,1]$ sorozat eloszlás voltának szükséges és elégséges feltétele, hogy $\sum\limits_{k \in H} p_k = 1$ teljesüljön.

Eloszlásfüggvény

6.4. DEFINÍCIÓ. Ha ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben értelmezett valószínűségi változó, akkor az

$$F_\xi : \mathbf{R} \to [0,1], \quad F_\xi(x) := P(\xi < x)$$

függvényt a ξ **eloszlásfüggvényének** nevezzük.

6.5. MEGJEGYZÉS. (1) A valószínűségi változó definíciója miatt minden valószínűségi változónak létezik eloszlásfüggvénye.

(2) Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvényének értékkészlete megszámlálható. Például a 6.3. Megjegyzés (2) pontjában definiált diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_\xi : \mathbf{R} \to [0,1], \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ 20/455, & \text{ha } 0 < x \le 1, \\ 155/455, & \text{ha } 1 < x \le 2, \\ 371/455, & \text{ha } 2 < x \le 3, \\ 1, & \text{ha } x > 3, \end{cases}$$

azaz az F_ξ értékkészlete 5 elemű.

(3) Az előző pont megfordítása nem igaz. Ha F_ξ értékkészlete megszámlálható, abból még nem következik, hogy ξ diszkrét valószínűségi változó. Például legyen $\Omega := [0,1] \times [0,1]$ és $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ geometriai valószínűségi mező. Ekkor a

$$\xi : \Omega \to \mathbf{R}, \quad \xi(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } y < 1/2, \\ x, & \text{ha } y = 1/2, \\ 1, & \text{ha } y > 1/2, \end{cases}$$

függvény nem diszkrét valószínűségi változó, másrészt

$$F_\xi : \mathbf{R} \to [0,1], \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ 1/2, & \text{ha } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{ha } x > 1, \end{cases}$$

vagyis F_ξ értékkészlete megszámlálható.

6.6. TÉTEL. *Ha ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben értelmezett valószínűségi változó, akkor*

(F1) *F_ξ monoton növekvő,*

(F2) $\lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1,$

(F3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0,$

(F4) *F_ξ minden pontban balról folytonos.*

BIZONYÍTÁS. (1) Legyen $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ és $x_1 < x_2$. Ha $A = \{\xi < x_1\}$ és $B = \{\xi < x_2\}$, akkor $A \subseteq B$ teljesül, amiből $P(A) \le P(B)$ következik. Mivel $P(A) = P(\xi < x_1) = F_\xi(x_1)$ és $P(B) = P(\xi < x_2) = F_\xi(x_2)$, ezért $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$, ami a tételt bizonyítja.

(2) Legyen az $\langle x_n \rangle$ monoton növekvő, $+\infty$-be divergáló sorozat, és $A_i := \{\xi < x_i\}$, ahol $i \in \mathbf{Z}^+$. Így $A_i \subseteq A_{i+1}$ teljesül minden $i \in \mathbf{Z}^+$ esetén,

továbbá $A_0 := \emptyset$ jelöléssel az $\{A_i - A_{i-1} : i \in \mathbf{Z}^+\}$ teljes eseményrendszer. Ezért a 2.3. Tétel (6) pontjából

$$1 = P(\Omega) = P\left(A_1 + \sum_{i=2}^{\infty}(A_i - A_{i-1})\right) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i - A_{i-1}) =$$

$$= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n}\Big(P(A_i) - P(A_{i-1})\Big) = P(A_1) +$$

$$+ \lim_{n\to\infty}\Big(P(A_n) - P(A_1)\Big) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} F_\xi(x_n)$$

következik. Tehát ha $\langle x_n\rangle$ monoton növekvő, és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = 1$ teljesül.

Most legyen az $\langle y_m\rangle$ tetszőleges $+\infty$-be divergáló sorozat és az ε adott pozitív valós szám. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = 1$ miatt létezik olyan $N(\varepsilon) \in \mathbf{Z}^+$ küszöbszám, melyre minden $n \in \mathbf{Z}^+, n > N(\varepsilon)$ esetén

$$|F_\xi(x_n) - 1| < \varepsilon \tag{6.1}$$

teljesül. Másrészt $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = \infty$ miatt $k_0 := N(\varepsilon)+1$ esetén x_{k_0}-hoz létezik olyan $M(\varepsilon) \in \mathbf{Z}^+$ küszöbszám, melyre minden $m \in \mathbf{Z}^+, m > M(\varepsilon)$ esetén

$$y_m > x_{k_0}. \tag{6.2}$$

Minden ilyen m-hez létezik $n_0 \in \mathbf{Z}^+, n_0 > N(\varepsilon) + 1$, hogy

$$y_m < x_{n_0}, \tag{6.3}$$

hiszen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Az F_ξ monoton növekedése miatt (6.1), (6.2) és (6.3) egyenlőtlenségek alapján

$$1 - \varepsilon < F_\xi(x_{k_0}) \le F_\xi(y_m) \le F_\xi(x_{n_0}) < 1 + \varepsilon$$

adódik, amely azt jelenti, hogy $|F_\xi(y_m) - 1| < \varepsilon$. Így $\lim\limits_{m\to\infty} F_\xi(y_m) = 1$, vagyis $\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$.

(3) Legyen az $\langle x_n\rangle$ monoton csökkenő, $-\infty$-be divergáló sorozat, és $A_i := \{\xi < x_i\}$, ahol $i \in \mathbf{Z}^+$. Így $A_i \supseteq A_{i+1}$ teljesül minden $i \in \mathbf{Z}^+$ esetén. Tegyük fel, hogy $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i \ne \emptyset$. Ekkor létezik $\omega \in \Omega$, melyre $\omega \in A_i$ teljesül

minden $i \in \mathbf{Z}^+$ esetén. Másrészt létezik olyan $m \in \mathbf{Z}^+$, hogy $x_m < \xi(\omega)$, hiszen $\langle x_n \rangle$ sorozat alulról nem korlátos. Így viszont $\omega \notin A_m$, ami ellentmondás. Tehát $\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$. Mivel teljesülnek a folytonossági axióma feltételei, ezért $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$, vagyis $\lim_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = 0$. Innen a (2) ponthoz hasonlóan következik az állítás.

(4) Legyen $x_0 \in \mathbf{R}$ tetszőleges, az $\langle x_n \rangle$ sorozat monoton növekvő, és konvergáljon x_0-hoz. Az A_n $(n \in \mathbf{Z}^+)$ események jelöljék a $\{\xi < x_n\}$ halmazokat, a B esemény pedig a $\{\xi < x_0\}$ halmazt. Ekkor

$$B = A_1 + \sum_{i=2}^{\infty}(A_i - A_{i-1}),$$

ami diszjunkt felbontás. Ezért $A_i \subseteq A_{i+1}$ miatt

$$\begin{aligned}F_\xi(x_0) &= P(B) = P(A_1) + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{n} P(A_i - A_{i-1}) = P(A_1) + \\ &+ \lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{n}\Big(P(A_i) - P(A_{i-1})\Big) = P(A_1) + \lim_{n\to\infty}\Big(P(A_n) - P(A_1)\Big) = \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} F_\xi(x_n)\end{aligned}$$

teljesül. Tehát $\lim_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = F_\xi(x_0)$. Ebből a (2) ponthoz hasonlóan adódik a tétel.

6.7. TÉTEL. *Ha az $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvényre teljesülnek az* **(F1)**–**(F4)** *tulajdonságok, akkor létezik $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező és azon egy ξ valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye F.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ geometriai valószínűségi mező, ahol $\Omega = (0,1)$, továbbá legyen

$$H(x) := \{y \in \mathbf{R} : F(y) < x\}, \quad x \in (0,1).$$

Be fogjuk bizonyítani, hogy $H(x)$ nem üres és felülről korlátos halmaz minden $x \in (0,1)$ esetén. Tegyük fel, hogy valamely $x_0 \in (0,1)$ esetén $H(x_0) = \emptyset$. Ez azt jelenti, hogy minden $y \in \mathbf{R}$ esetén $F(y) \geq x_0$. Ebből következően $\lim_{y\to-\infty} F(y) \geq x_0 > 0$, ami ellentmond **(F3)**-nak. Tehát minden $x \in (0,1)$ esetén $H(x) \neq \emptyset$. Most tegyük fel, hogy létezik olyan

$x_0 \in (0,1)$, melyre $H(x_0)$ felülről nem korlátos. Ez azt jelenti, hogy minden $y \in \mathbf{R}$ esetén létezik olyan $y_0 \in H(x_0)$, melyre $y < y_0$ teljesül. Ebből F monoton növekedése miatt következik, hogy $F(y) \leq F(y_0) < x_0$, tehát $\lim\limits_{y\to\infty} F(y) \leq x_0 < 1$, ami **(F2)** miatt ellentmondás. Tehát valóban minden $x \in (0,1)$ esetén $H(x)$ nem üres és felülről korlátos halmaz.

Így az analízisből ismert teljességi axióma alapján következik, hogy $H(x)$-nek létezik a véges pontos felső korlátja. Tehát definiálhatunk egy ξ függvényt a következőképpen:

$$\xi : \Omega \to \mathbf{R}, \quad \xi(x) := \sup H(x).$$

Megmutatjuk, hogy ekkor ξ valószínűségi változó és $F_\xi = F$. Ennek érdekében belátjuk, hogy minden $k \in \mathbf{R}$ esetén

$$\{\xi < k\} \subseteq (0, F(k)] \tag{6.4}$$

és

$$(0, F(k)) \subseteq \{\xi < k\} \tag{6.5}$$

teljesül. Először tegyük fel, hogy $x \in \{\xi < k\}$. Ez azt jelenti, hogy $\xi(x) < k$, ahol $x \in (0,1)$. Ebből következően $k \notin H(x)$, vagyis $F(k) \geq x > 0$, ami (6.4)-et igazolja.

Most tegyük fel, hogy (6.5) nem igaz, vagyis valamely $k \in \mathbf{R}$ esetén $(0, F(k)) \not\subseteq \{\xi < k\}$. Mivel **(F1)** és **(F2)** miatt $F(k) \leq 1$, ezért $(0, F(k)) \subseteq (0,1)$. Így feltevésünk azt jelenti, hogy létezik $x \in (0, F(k))$, melyre $\xi(x) \geq k$ teljesül. Ekkor az F monoton növekedése és balról való folytonossága miatt

$$F(k) \leq F(\xi(x)) = \lim_{y\to\xi(x)-0} F(y). \tag{6.6}$$

Legyen $y < \xi(x)$ tetszőleges. Ekkor létezik $z \in H(x)$, melyre $y < z$ teljesül. Így $F(y) \leq F(z) < x$, melyből következik, hogy $\lim\limits_{y\to\xi(x)-0} F(y) \leq x$. Ezt (6.6)-al összevetve kapjuk, hogy $F(k) \leq x$, ami ellentmond annak, hogy $x \in (0, F(k))$. Ezzel (6.5)-öt is bizonyítottuk. A (6.4) és (6.5) relációk miatt

$$\{\xi < k\} = (0, F(k)) \quad \text{vagy} \quad \{\xi < k\} = (0, F(k)]$$

teljesül minden $k \in \mathbf{R}$ esetén. Ebből következik egyrészt, hogy $\{\xi < k\} \in \mathcal{A}$ minden $k \in \mathbf{R}$ esetén, vagyis ξ valószínűségi változó, másrészt

$$F_\xi(k) = P(\xi < k) = F(k) - 0 = F(k).$$

Ezzel bizonyítottuk az állítást.

6.8. TÉTEL. *Ha ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó, $a, b \in \mathbf{R}$ és $a < b$, akkor*

$$P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $A := \{\xi < a\}$ és $B := \{\xi < b\}$. Ekkor $A \subseteq B$, ezért $P(B - A) = P(B) - P(A)$ teljesül, ami az állítást bizonyítja.

6.9. TÉTEL. *Ha ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó és $a \in \mathbf{R}$, akkor F_ξ-nek létezik a-ban a jobboldali határértéke, és*

$$P(\xi = a) = F_\xi(a + 0) - F_\xi(a).$$

BIZONYÍTÁS. Legyen a $\langle \delta_n \rangle$ egy monoton csökkenő nullsorozat. Ekkor a 6.8. Tétel alapján minden $n \in \mathbf{Z}^+$ esetén

$$P(a \leq \xi < a + \delta_n) = F_\xi(a + \delta_n) - F_\xi(a).$$

Mivel $A_n := \{a \leq \xi < a + \delta_n\}$ jelöléssel $A_n \supseteq A_{n+1}$ minden $n \in \mathbf{Z}^+$ esetén, továbbá $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{\xi = a\}$, ezért a valószínűség folytonossága miatt

$$\lim_{n \to \infty} F_\xi(a + \delta_n) = F_\xi(a) + \lim_{n \to \infty} P(A_n) = F_\xi(a) + P(\xi = a).$$

Ebből tetszőleges $\langle \delta_n \rangle$ pozitív tagú nullsorozat esetén, **(F2)**-höz hasonlóan bizonyítható, hogy

$$\lim_{n \to \infty} F_\xi(a + \delta_n) = F_\xi(a) + P(\xi = a).$$

Ez pedig az állítással ekvivalens.

6.10. KÖVETKEZMÉNY. *Ha ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó, $a \in \mathbf{R}$ és F_ξ eloszlásfüggvény a-ban folytonos, akkor*

$$P(\xi = a) = 0.$$

6.11. MEGJEGYZÉS. A 6.10. Következmény miatt, ha az F_ξ mindenütt folytonos, akkor $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén

$$F_\xi(b) - F_\xi(a) = P(a \leq \xi < b) = P(a < \xi < b) = P(a < \xi \leq b) = P(a \leq \xi \leq b).$$

Általános esetben ez nem igaz. Erre vonatkozik a következő tétel.

6.12. TÉTEL. *Ha ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó, $a, b \in \mathbf{R}$ és $a < b$, akkor*

(1) $P(a < \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a+0)$,

(2) $P(a \leq \xi \leq b) = F_\xi(b+0) - F_\xi(a)$,

(3) $P(a < \xi \leq b) = F_\xi(b+0) - F_\xi(a+0)$.

BIZONYÍTÁS. (1) $P(a < \xi < b) + P(\xi = a) = P(a \leq \xi < b)$, így a 6.8. és a 6.9. Tételek alapján

$$P(a < \xi < b) + F_\xi(a+0) - F_\xi(a) = F_\xi(b) - F_\xi(a),$$

amiből kapjuk az állítást.

(2) A 6.8. Tétel alapján

$$P(a \leq \xi \leq b) = P(a \leq \xi < b) + P(\xi = b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) + \\ + F_\xi(b+0) - F_\xi(b) = F_\xi(b+0) - F_\xi(a).$$

(3) Az (1) pontot felhasználva kapjuk, hogy

$$P(a < \xi \leq b) = P(a < \xi < b) + P(\xi = b) = F_\xi(b) - F_\xi(a+0) + \\ + F_\xi(b+0) - F_\xi(b) = F_\xi(b+0) - F_\xi(a+0).$$

Sűrűségfüggvény

6.13. DEFINÍCIÓ. Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett ξ valószínűségi változót **abszolút folytonos eloszlásúnak**, vagy röviden **abszolút folytonosnak** nevezzük, ha létezik olyan $f_\xi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nemnegatív függvény, melyre

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$$

teljesül minden $x \in \mathbf{R}$ esetén, ahol F_ξ a ξ eloszlásfüggvénye. Ekkor az f_ξ függvényt a ξ **sűrűségfüggvényének** nevezzük.

6.14. MEGJEGYZÉS. (1) Legyen $\Omega := [0,1] \times [0,1]$ és $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ geometriai valószínűségi mező, továbbá $\xi : \Omega \to \mathbf{R}$, $\xi(x,y) := x$. Ekkor ξ valószínűségi változó, továbbá az eloszlásfüggvénye

$$F_\xi : \mathbf{R} \to [0,1], \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ x, & \text{ha } 0 < x \le 1, \\ 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Legyen

$$f_\xi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f_\xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor f_ξ nemnegatív függvény, és minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$, vagyis f_ξ a ξ sűrűségfüggvénye. Tehát ξ abszolút folytonos valószínűségi változó.

(2) Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f_ξ, akkor például a

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f_\xi(x), & \text{ha } x \ne 0, \\ f_\xi(0) + 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény is sűrűségfüggvénye ξ-nek. Ebből következően ξ-nek végtelen sok sűrűségfüggvénye van. Bizonyítható, hogy ezek a függvények csak egy Lebesgue-szerint nullmértékű halmazon különböznek egymástól, azaz **majdnem mindenütt** megegyeznek. (Lásd [4] 22. oldal.)

A $H \subset \mathbf{R}$ halmazt **Lebesgue-szerint nullmértékű halmaznak** nevezzük, ha minden $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ esetén létezik olyan $\{(a_n, b_n) : n \in \mathbf{Z}^+\}$ intervallumrendszer, melyre

$$H \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$$

teljesül. Például a $\mathbf{Z}^+$ nullmértékű halmaz, mert

$$\mathbf{Z}^+ \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(n - \varepsilon/2^{n+2}, n + \varepsilon/2^{n+2}\right)$$

minden $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ esetén, másrészt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^{n+1} = \varepsilon/2 < \varepsilon$ teljesül. Hasonlóan bizonyítható, hogy minden megszámlálható számosságú $H \subset \mathbf{R}$ halmaz is nullmértékű. De kontinuum számosságú nullmértékű halmaz is létezik, például a Cantor-féle triadikus halmaz. (Lásd [3] 70. oldal.)

(3) A Riemann-integrálhatóságra vonatkozó Lebesgue-kritérium szerint f_ξ majdnem mindenütt folytonos. (Lásd [1] 76. oldal.)

6.15. TÉTEL. *Ha ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett abszolút folytonos valószínűségi változó, akkor minden $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ esetén*

$$P(a \leq \xi < b) = \int\limits_a^b f_\xi(x)dx.$$

BIZONYÍTÁS. A 6.8. Tétel és f_ξ definíciója alapján

$$P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} f_\xi(x)dx - \int\limits_{-\infty}^{a} f_\xi(x)dx = \int\limits_a^b f_\xi(x)dx.$$

6.16. MEGJEGYZÉS. Borel-halmazok segítségével a 6.15. Tétel általánosítható, ugyanis belátható, hogy minden $B \in \mathcal{B}$ esetén

$$P(\xi \in B) = \int\limits_B f_\xi(x)dx.$$

(Lásd [2] 90. oldal.)

6.17. TÉTEL. *Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben értelmezett ξ valószínűségi változó abszolút folytonos, akkor az eloszlásfüggvénye folytonos és majdnem mindenütt differenciálható, nevezetesen ahol a sűrűségfüggvény folytonos, továbbá a differenciálható pontokban $F'_\xi(x) = f_\xi(x)$ teljesül.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $x_0 \in \mathbf{R}$, $r, \varepsilon \in \mathbf{R}^+$ tetszőlegesen adottak. Ekkor x_0-nak az r sugarú környezetében f_ξ korlátos, hiszen integrálható. Így létezik $M \in \mathbf{R}$, melyre $|f_\xi(x)| \leq M$ teljesül minden $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ esetén. Ha $\delta = \min\left\{r, \dfrac{\varepsilon}{M}\right\}$, akkor minden olyan x esetén, melyre $|x_0 - x| < \delta$ teljesül, igaz hogy

$$|F_\xi(x_0) - F_\xi(x)| = \left|\int\limits_x^{x_0} f_\xi(t)dt\right| \leq M\,|x_0 - x| < M\delta \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

amiből következik, hogy az F_ξ minden pontban folytonos.

Ha az f_ξ folytonos az $x_0 \in \mathbf{R}$ pontban, akkor adott $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ esetén létezik olyan $\delta \in \mathbf{R}^+$, hogy minden $x \in \mathbf{R}$, $|x - x_0| < \delta$ esetén

$$|f_\xi(x) - f_\xi(x_0)| < \varepsilon$$

teljesül. Ezért minden $x \in \mathbf{R}$, $|x - x_0| < \delta$ esetén

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F_\xi(x) - F_\xi(x_0)}{x - x_0} - f_\xi(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f_\xi(t)dt - f_\xi(x_0)\right| = \\
&= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x}\Big(f_\xi(t) - f_\xi(x_0)\Big)dt\right| < \\
&< \frac{1}{|x - x_0|}\varepsilon|x - x_0| = \varepsilon
\end{aligned}$$

teljesül, ami azt jelenti, hogy az F_ξ eloszlásfüggvény x_0-ban differenciálható, és $F_\xi'(x_0) = f_\xi(x_0)$. Ebből és az f_ξ majdnem mindenütti folytonosságából kapjuk az állítást.

6.18. MEGJEGYZÉS. (1) A 6.17. Tétel értelmében, ha F_ξ nem folytonos, akkor ξ nem abszolút folytonos. Így ha ξ diszkrét valószínűségi változó, akkor nem létezik sűrűségfüggvénye, azaz nem abszolút folytonos. Másrészt, ha ξ abszolút folytonos, akkor az F_ξ folytonossága miatt az F_ξ értékkészlete nem megszámlálható, tehát nem diszkrét.

(2) Létezik olyan ξ valószínűségi változó, úgynevezett **kevert valószínűségi változó**, amely nem abszolút folytonos, és nem is diszkrét. Például legyen

$$F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad F(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0, \\ x, & \text{ha } 0 < x \le 1/2, \\ 1, & \text{ha } x > 1/2. \end{cases}$$

Ekkor F-re teljesülnek az **(F1)**–**(F4)** tulajdonságok, így a 6.7. Tétel alapján létezik olyan ξ valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye F. Mivel F értékkészlete nem megszámlálható, ezért a 6.5. Megjegyzés (2) pontja alapján ξ nem lehet diszkrét. Másrészt F az $x = 1/2$ pontban nem folytonos, tehát a 6.17. Tétel miatt ξ abszolút folytonos sem lehet.

(3) Abszolút folytonos ξ valószínűségi változó esetén a 6.17. Tétel és a 6.10. Következmény miatt $P(\xi = x) = 0$ minden $x \in \mathbf{R}$-re.

6.19. TÉTEL. *Ha ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett abszolút folytonos valószínűségi változó, akkor* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1$.

BIZONYÍTÁS. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = \lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{t} f_\xi(x)dx = \lim\limits_{t\to\infty} F_\xi(t) = 1$.

6.20. TÉTEL. *Ha az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ nemnegatív függvényre teljesül, hogy* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, *akkor létezik egy valószínűségi mező és azon egy ξ abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye f.*

BIZONYÍTÁS. A sűrűségfüggvény definíciója és a 6.7. Tétel miatt, elég azt bizonyítani, hogy az

$$F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad F(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

függvényre teljesülnek az **(F1)**–**(F4)** tulajdonságok. A definíció korrekt, ugyanis az f integrálható $\mathbf{R}$-en, ezért bármely részintervallumán is integrálható. Így F minden x-re értelmezett.

(1) Legyen $x_1 < x_2$ valós számok. Az f nemnegatív, tehát

$$F(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} f(t)dt \leq \int\limits_{-\infty}^{x_1} f(t)dt + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x_2} f(t)dt = F(x_2),$$

ami azt jelenti, hogy F monoton növekvő.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$.

(3) Legyen $\langle x_n \rangle$ monoton csökkenő $-\infty$-be divergáló valós számsorozat. Ekkor az f nemnegativitása miatt $\int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t)dt$ monoton csökkenő, alulról korlátos sorozat, melynek alsó korlátja például a 0. Ezért létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t)dt$ határérték, mely nemnegatív. Jelöljük ezt a határértéket a-val. Ekkor $a \geq 0$ miatt $a/2 \leq a$ teljesül, így az $\int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t)dt$ sorozat monoton

csökkenése miatt, minden $n \in \mathbf{Z}^+$ esetén

$$\frac{a}{2} \leq \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t)dt = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{-m}^{x_n} f(t)dt$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbf{Z}^+$ esetén létezik $N(n) \in \mathbf{Z}^+$, melyre $m \in \mathbf{Z}^+$, $m \geq N(n)$ esetén $\frac{a}{2} \leq \int\limits_{-m}^{x_n} f(t)dt$ teljesül. Ebből következően tehát minden $n \in \mathbf{Z}^+$ esetén létezik $N(n) \in \mathbf{Z}^+$, hogy

$$\frac{a}{2} \leq \int\limits_{-N(n)}^{x_n} f(t)dt.$$

Az $\langle x_n \rangle$ tulajdonságai miatt létezik egy olyan $\langle n_k \rangle : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ szigorúan monoton növekvő sorozat, melyre $x_{n_{k+1}} \leq -N(n_k)$ teljesül minden $k \in \mathbf{Z}^+$ esetén. Így

$$\begin{aligned} k \cdot \frac{a}{2} &\leq \int\limits_{-N(n_k)}^{x_{n_k}} f(t)dt + \int\limits_{-N(n_{k-1})}^{x_{n_{k-1}}} f(t)dt + \ldots + \int\limits_{-N(n_1)}^{x_{n_1}} f(t)dt \leq \\ &\leq \int\limits_{-N(n_k)}^{x_{n_1}} f(t)dt \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1 \end{aligned}$$

minden $k \in \mathbf{Z}^+$ esetén. Tegyük fel, hogy $a > 0$. Ekkor az előző egyenlőtlenség miatt minden $k \in \mathbf{Z}^+$ esetén $k \leq 2/a$, ami ellentmondás. Tehát $a = 0$. Vagyis monoton csökkenő $-\infty$-be divergáló $\langle x_n \rangle$ valós számsorozat esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t)dt = 0$. Mivel az F monoton növekvő, ezért az **(F2)** bizonyításához hasonlóan belátható, hogy tetszőleges $-\infty$-be divergáló $\langle x_n \rangle$ valós számsorozat esetén teljesül, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t)dt = 0$. Így

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0.$$

(4) Végül a 6.17. Tételhez hasonlóan bizonyítható, hogy F folytonos.

6.21. FELADAT. Legyen

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{a}{x^2+4} \quad (a \in \mathbf{R}).$$

Milyen a esetén létezik ξ abszolút folytonos valószínűségi változó, melynek f a sűrűségfüggvénye? Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét.

MEGOLDÁS. A 6.20. Tétel alapján

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{x^2+4}dx = \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1/2}{(x/2)^2+1}dx = \frac{a}{2}\left[\operatorname{arc\,tg}(x/2)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{a\pi}{2} = 1,$$

melyből $a = 2/\pi$ teljesül. Ekkor f nem negatív, ezért ilyen a érték mellett f sűrűségfüggvény. Így létezik egy olyan ξ valószínűségi változó, melynek

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{2}{\pi(x^2+4)}$$

a sűrűségfüggvénye. Az ehhez tartozó eloszlásfüggvény definíció szerint

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1/2}{(t/2)^2+1}dt = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}(t/2)\right]_{-\infty}^{x} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}.$$

6.22. TÉTEL. *Legyen ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett abszolút folytonos valószínűségi változó. Ha egy $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény folytonosan differenciálható és a differenciálhányadosa sehol sem nulla, akkor $\eta = g(\xi)$ is abszolút folytonos valószínűségi változó, továbbá a sűrűségfüggvénye*

$$f_\eta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{f_\xi\left(g^{-1}(x)\right)}{\left|g'\left(g^{-1}(x)\right)\right|}, & \text{ha } x \in g(\mathbf{R}), \\ 0, & \text{ha } x \notin g(\mathbf{R}), \end{cases}$$

ahol g^{-1} a g inverzfüggvénye.

BIZONYÍTÁS. A g függvény differenciálható, ezért folytonos. Másrészt az 5.11. Megjegyzés és az 5.12. Tétel alapján $g(\xi)$ valószínűségi változó. A

g' folytonos és sehol sem nulla, így a jeltartás miatt $g'(x) > 0$ vagy $g'(x) < 0$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén. Ebből következik, hogy g szigorúan monoton növekvő vagy csökkenő, ami azt is jelenti, hogy g invertálható függvény. Tegyük fel, hogy g szigorúan monoton növekvő. Ekkor $g'(x) > 0$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén, így ha $x \in g(\mathbf{R})$, akkor $g'\left(g^{-1}(x)\right) > 0$. Ezért azt kell megmutatni, hogy az

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \dfrac{f_\xi\left(g^{-1}(x)\right)}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}, & \text{ha } x \in g(\mathbf{R}), \\ 0, & \text{ha } x \notin g(\mathbf{R}) \end{cases}$$

függvényre

$$F_\eta(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{6.7}$$

teljesül minden $x \in \mathbf{R}$ esetén. Az integrál létezik, mert f_ξ majdnem mindenütt folytonos, és a g függvény folytonosan differenciálható. A g függvény folytonossága és szigorú monotonitása miatt $g(\mathbf{R}) = (a, b)$ alakú, ahol $a, b \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

(1) Ha $a \neq -\infty$, akkor legyen $x \leq a$. Ekkor $x \notin g(\mathbf{R})$, így $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$. Másrészt $F_\eta(x) = P(\eta < x) = 0$, hiszen $R_\eta \subseteq g(\mathbf{R})$, így (6.7) teljesül.

(2) Ha $x \in g(\mathbf{R})$, akkor

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int_{a}^{x} \frac{f_\xi\left(g^{-1}(t)\right)}{g'\left(g^{-1}(t)\right)}dt =$$

$$= \int_{a}^{x} \frac{f_\xi\left(g^{-1}(t)\right)}{g'\left(g^{-1}(t)\right)}dt = \lim_{y \to a+0} \int_{g^{-1}(y)}^{g^{-1}(x)} f_\xi(u)du = F_\xi\Big(g^{-1}(x)\Big) -$$

$$- \lim_{y \to a+0} F_\xi\Big(g^{-1}(y)\Big) = F_\xi\Big(g^{-1}(x)\Big) - \lim_{y \to -\infty} F_\xi(y) =$$

$$= F_\xi\Big(g^{-1}(x)\Big) = P\Big(\xi < g^{-1}(x)\Big) = P(\eta < x) = F_\eta(x).$$

Így (6.7) teljesül. Az integrálásban $u = g^{-1}(t)$ helyettesítést alkalmaztunk.

(3) Ha $b \neq \infty$, akkor legyen $x \geq b$. Ekkor $x \notin g(\mathbf{R})$, így a (2) pont felhasználásával

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt + \int_{b}^{x} f(t)dt = \lim_{y \to b-0} \int_{-\infty}^{y} f(t)dt + \int_{b}^{x} 0dt =$$

$$= \lim_{y \to b-0} F_\eta(y) = F_\eta(b) = P(\eta < b) = 1.$$

Másrészt $F_\eta(x) = P(\eta < x) = 1$, így (6.7) teljesül. Ezzel szigorúan monoton növekvő g függvény esetén bizonyítottuk a tételt. Szigorúan monoton csökkenő esetben hasonlóan járhatunk el.

6.23. FELADAT. A 6.21. Feladat megoldásában láttuk, hogy létezik olyan ξ valószínűségi változó, melynek $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2/\pi(x^2 + 4)$ a sűrűségfüggvénye. Határozzuk meg az $\eta := \exp(\xi)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

MEGOLDÁS. Legyen $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) := \exp(x)$. Ekkor teljesülnek a 6.22. Tétel feltételei. Így az η abszolút folytonos valószínűségi változó. Felhasználva, hogy $g(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^+$, $g^{-1}(x) = \log x$ és $g'(x) = \exp(x)$, kapjuk, hogy

$$\frac{f_\xi\left(g^{-1}(x)\right)}{|g'\left(g^{-1}(x)\right)|} = \frac{2/\pi(4 + \log^2 x)}{|\exp(\log x)|},$$

így

$$f_\eta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(4 + \log^2 x)x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x \leq 0. \end{cases}$$

6.24. MEGJEGYZÉS. Az eloszlásra, eloszlásfüggvényre és sűrűségfüggvényre további példákat a 8. és 9. fejezetben találhat az olvasó.

7. Valószínűségi változó paraméterei

Várható érték

Egy szerencsejátékban 6 forint a nyeremény, ha dobókockán 6-ost dobunk. Minden más esetben annyi forint a veszteség, ahányast dobtunk. Kérdés, hogy érdemes-e játszani ezt a játékot, azaz hosszú távon átlagban nagyobb lesz-e a nyereség mint a veszteség? Például, ha ötször játszunk, és a dobássorozat eredménye $(2, 6, 1, 2, 3)$, akkor játékonként átlagban $(-2 + 6 - 1 - 2 - 3)/5 = -2/5$ forintot „nyertünk”, azaz $2/5$ forintot veszítettünk. A későbbiekben tárgyalt Bernoulli-féle nagy számok törvénye pontosan azt fejezi ki, mint a jegyzet bevezetésében leírt gyakorlati tapasztalat, vagyis nagy számú kísérlet esetén a relatív gyakoriság a valószínűség körül ingadozik. Így ha ezt a játékot n-szer játszottuk, ahol n nagy szám, akkor például 6-ost körülbelül $n \cdot 1/6$-szor dobtunk. Ebből következően n dobás után játékonként átlagban körülbelül

$$\frac{-1 \cdot n \cdot \frac{1}{6} - 2 \cdot n \cdot \frac{1}{6} - 3 \cdot n \cdot \frac{1}{6} - 4 \cdot n \cdot \frac{1}{6} - 5 \cdot n \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot n \cdot \frac{1}{6}}{n} =$$

$$-1 \cdot \frac{1}{6} - 2 \cdot \frac{1}{6} - 3 \cdot \frac{1}{6} - 4 \cdot \frac{1}{6} - 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{3}{2}$$

forint a nyereség, azaz $3/2$ forint a veszteség. Vagyis hosszú távon ezt nem érdemes játszani. Ezt a számot a nyeremény várható értékének nevezzük. A nagy számok gyenge törvénye fogja garantálni azt, hogy nagy számú független megfigyelés esetén az átlag a várható érték körül ingadozik. Ezért jogos az elnevezés. A példában leírtakat a következő definícióban foglaljuk össze.

7.1. DEFINÍCIÓ. Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó.

(1) Ha ξ diszkrét és $R_\xi = \{x_1, x_2, \ldots\}$, továbbá a $\sum\limits_i p_i |x_i| < \infty$, ahol $p_i := P(\xi = x_i)$, akkor az

$$E(\xi) := \sum_i p_i x_i$$

számot a ξ **várható értékének** nevezzük. Ha az abszolút konvergencia nem teljesül, akkor ξ-nek nem létezik várható értéke.

(2) Abszolút folytonos ξ esetén, ha $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\, f_\xi(x)dx < \infty$, akkor az

$$E(\xi) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx$$

számot a ξ **várható értékének** nevezzük. Ellenkező esetben ξ-nek nem létezik várható értéke.

7.2. MEGJEGYZÉS. (1) A 7.1. Definíció (1) pontjában az $\{x_1, x_2, \ldots\}$ jelölhet véges, vagy megszámlálhatóan végtelen halmazt is. Végtelen esetben $\sum\limits_i p_i x_i$ a $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i x_i$ sorösszeget jelöli. Ha ekkor nem kötnénk ki az abszolút konvergenciát, akkor nem biztos, hogy a sor egy átrendezésének az összege megegyezne az eredeti sorösszeggel. A sor átrendezhetőségére azért van szükség, mert az x_i elemek indexelése önkényes, és nem volna értelme definiálni ξ-nek egy olyan paraméterét, melynek értéke függ a ξ értékeinek sorrendbeállításától.

Véges esetben, azaz ha $R_\xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $\sum\limits_i p_i x_i$ a $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i$ összeget jelöli. Ekkor természetesen $\sum\limits_i p_i |x_i| < \infty$ mindig teljesül, ezért véges esetben mindig létezik a várható érték.

(2) Abszolút folytonos esetre a diszkrét eset közvetlenül nem vihető át, mert $P(\xi = x) = 0$ minden $x \in \mathbf{R}$-re. Azonban analóg formulát nyerhetünk, ha ξ-t kis intervallumokon egyetlen értékkel, például az intervallum alsó végpontjával helyettesítjük. Ekkor

$$E(\xi) \approx \sum_i x_i P(x_i \le \xi < x_{i+1}) = \sum_i x_i \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f_\xi(x)dx \approx \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx.$$

Ezt írtuk le a 7.1. Definíció (2) pontjában.

(3) Az $E(\xi)$ várható érték csak ξ eloszlásfüggvényétől függ. Vagyis ha ξ és η valószínűségi változók **azonos eloszlásúak** – ezalatt azt értjük, hogy megegyezik az eloszlásfüggvényük –, akkor $E(\xi) = E(\eta)$.

(4) A valószínűségszámítás általános tárgyalásában a várható értéket az $E(\xi) := \int\limits_\Omega \xi(\omega)dP(\omega)$ úgynevezett Lebesgue-féle integrállal definiálják, függetlenül attól, hogy ξ diszkrét, abszolút folytonos vagy kevert valószínűségi változó. (Lásd [4] 24. oldal és [1] 60. oldal.) Bizonyítható, hogy diszkrét

illetve abszolút folytonos valószínűségi változók esetén a 7.1. Definíció ezzel ekvivalens. (Lásd [4] 26. és 34. oldal.) A továbbiakban mi csak diszkrét illetve abszolút folytonos valószínűségi változókról beszélünk, és várható értéket is csak az ilyen valószínűségi változókhoz rendelünk.

7.3. FELADAT. Egy gép az indítógomb megnyomására 0,05 valószínűséggel kezd el működni. A gombot annyiszor nyomjuk meg, amíg a gép működésbe nem lép. Legyen ξ a gomb megnyomásának a száma. Határozzuk meg ξ várható értékét.

MEGOLDÁS. Legyen $p := 0{,}05$ és $q := 1 - p$. Feltesszük, hogy az egyes indítások egymástól függetlenek. Ekkor $x_i = i$, $(i \in \mathbf{Z}^+)$ és $p_i = pq^{i-1}$ teljesül. Ebből

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i|x_i| = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} pq^{i-1} \cdot i = p\sum_{i=1}^{\infty} (q^i)' =$$

$$= p\left(\sum_{i=1}^{\infty} q^i\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1}{p} = 20 < \infty$$

következik, azaz létezik a várható érték és $E(\xi) = 20$.

7.4. FELADAT. Legyen $\xi : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{R}$, $\xi(k) := 2^k$, és $\langle p_k \rangle : \mathbf{R} \to [0,1]$, $p_k = P(\xi = k) := 1/k$. Határozzuk meg ξ várható értékét.

MEGOLDÁS. A feladatban megadott $\langle p_k \rangle$ eloszlás, ugyanis

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1.$$

Másrészt

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i|x_i| = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot 2^k = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

amiből következik, hogy nem létezik várható érték.

7.5. FELADAT. Legyen $f_\xi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_\xi(x) := e^{-|x|}/2$. Határozzuk meg ξ várható értékét.

MEGOLDÁS. Az f_ξ nemnegatív és páros függvény, ezért

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1$$

teljesül, vagyis f_ξ sűrűségfüggvény. Másrészt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \int_{0}^{\infty} xe^{-x}dx = \Big[-e^{-x}(1+x)\Big]_0^\infty = 1 < \infty,$$

vagyis létezik a várható érték. Ezért $xf_\xi(x)$ páratlansága miatt

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx = 0.$$

7.6. FELADAT. Legyen $f_\xi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_\xi(x) := 2/\pi(x^2+4)$. Határozzuk meg ξ várható értékét.

MEGOLDÁS. A 6.21. Feladatban már bizonyítottuk, hogy f_ξ sűrűségfüggvény. Másrészt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2|x|}{\pi(x^2+4)}dx =$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} \frac{2x}{\pi(x^2+4)}dx = \frac{2}{\pi}\Big[\log(x^2+4)\Big]_0^\infty = \infty,$$

tehát ξ-nek nem létezik a várható értéke.

7.7. TÉTEL. *Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett diszkrét valószínűségi változó és $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Borel-mérhető függvény. Ha $R_\xi = \{x_1, x_2, \ldots\}$, akkor $p_i := P(\xi = x_i)$ jelöléssel*

$$E(g(\xi)) = \sum_i p_i g(x_i),$$

feltéve, hogy $\sum\limits_i p_i|g(x_i)| < \infty$.

BIZONYÍTÁS. A tétel feltételeiből következik, hogy $g(\xi)$ is diszkrét valószínűségi változó. Így a 7.1. Definícióból adódik az állítás.

7.8. TÉTEL. *Legyen ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett abszolút folytonos valószínűségi változó. Ha egy $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ függvény minden pontban folytonosan differenciálható, továbbá a differenciálhányados* *sehol sem nulla, akkor* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\, f_\xi(x)dx < \infty$ *esetén a* $g(\xi)$ *valószínűségi változónak is létezik várható értéke és*

$$E(g(\xi)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\xi(x) dx.$$

BIZONYÍTÁS. A 6.22. Tétel bizonyításában láttuk, hogy ekkor g szigorúan monoton. Legyen például g szigorúan monoton növekvő. A tétel feltételeiből a 6.22. Tétel alapján következik, hogy $\eta := g(\xi)$ is abszolút folytonos valószínűségi változó, és sűrűségfüggvénye

$$f_\eta : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \; f_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{f_\xi\left(g^{-1}(x)\right)}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}, & \text{ha } x \in g(\mathbf{R}), \\ 0, & \text{ha } x \notin g(\mathbf{R}). \end{cases}$$

Ekkor $g(\mathbf{R}) := (a, b)$ jelöléssel, ahol $a, b \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\eta(x) dx = \lim_{z \to b-0} \left(\lim_{y \to a+0} \int\limits_{y}^{z} x \frac{f_\xi\left(g^{-1}(x)\right)}{g'\left(g^{-1}(x)\right)} dx \right) =$$

$$= \lim_{z \to b-0} \left(\lim_{y \to a+0} \int\limits_{g^{-1}(y)}^{g^{-1}(z)} g(t) \frac{f_\xi(t)}{g'(t)} g'(t) dt \right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t) f_\xi(t) dt$$

teljesül. Hasonlóan bizonyítható, hogy $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| f_\eta(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, f_\xi(t) dt$, melyből adódik az állítás. Az integrálásnál $t = g^{-1}(x)$ helyettesítést alkalmaztunk, továbbá felhasználtuk, hogy

$$\lim_{z \to b-0} g^{-1}(z) = \infty, \quad \text{és} \quad \lim_{y \to a+0} g^{-1}(y) = -\infty.$$

Ha g szigorúan monoton csökkenő, akkor hasonlóan bizonyíthatjuk a tételt.

7.9. MEGJEGYZÉS. Bizonyítható, hogy a 7.7. Tétel minden $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ Borel-mérhető függvény esetén igaz. (Lásd [4] 34. oldal.)

7.10. TÉTEL. *Legyen ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó, melynek létezik a várható értéke. Ekkor $c \in \mathbf{R}$ esetén $c\xi$-nek is létezik várható értéke, továbbá*

$$E(c\xi) = cE(\xi),$$

azaz a várható érték **homogén**.

BIZONYÍTÁS. Ha $c = 0$, akkor az állítás triviális. Ha ξ diszkrét, akkor $c\xi$ is diszkrét, továbbá

$$\sum_i p_i |cx_i| = |c| \sum_i p_i |x_i| < \infty \quad \text{és} \quad \sum_i p_i (cx_i) = c \sum_i p_i x_i,$$

így a 7.7. Tétel alapján igaz az állítás. Ha $c \neq 0$ és ξ abszolút folytonos, akkor $c\xi$ is abszolút folytonos a 6.22. Tétel miatt. Másrészt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |cx|\, f_\xi(x) dx < \infty \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{\infty} (cx) f_\xi(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx,$$

így a 7.8. Tétel alapján $E(c\xi)$ létezik és $E(c\xi) = cE(\xi)$.

7.11. TÉTEL. *Legyen ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó, melynek létezik a várható értéke.*

(1) *Ha minden $\omega \in \Omega$ esetén $\xi(\omega) \geq 0$ és $E(\xi) = 0$, akkor $P(\xi = 0) = 1$.*

(2) *Ha $c \in \mathbf{R}$ esetén $P(\xi = c) = 1$ teljesül, akkor $E(\xi) = c$.*

BIZONYÍTÁS. (1) Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, akkor $E(\xi) = \sum_i p_i x_i = 0$, ami $p_i \geq 0$ és $x_i \geq 0$ miatt csak úgy lehet, ha $p_i x_i = 0$ minden i-re. De minden i esetén $x_i \neq 0$ nem teljesülhet, mert ekkor $p_i = 0$ miatt $\sum_i p_i = 1$ nem teljesül. Így létezik olyan j, melyre $x_j = 0$. Ebből $\sum_{i \neq j} p_i = 0$ következik, így $1 = \sum_i p_i = \sum_{i \neq j} p_i + p_j$ miatt $p_j = 1$, ami állításunkat igazolja.

Ha ξ abszolút folytonos, akkor $x \leq 0$ esetén $F_\xi(x) = P(\xi < x) = 0$ miatt $f_\xi(x) = F'_\xi(x) = 0$ következik majdnem mindenütt. Így az $E(\xi) = 0$ feltétel miatt

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx = \int_{0}^{\infty} x f_\xi(x) dx = 0,$$

melyből $f_\xi \geq 0$ miatt következik, hogy bármely $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ esetén

$$0 = \int_\varepsilon^\infty x f_\xi(x)dx \geq \varepsilon \int_\varepsilon^\infty f_\xi(x)dx$$

teljesül. Másrészt $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = \int_0^\infty f_\xi(x)dx$ miatt létezik $\varepsilon_0 \in \mathbf{R}^+$, melyre $\int_{\varepsilon_0}^\infty f_\xi(x)dx > 0$ teljesül, ami ellentmondás. Tehát ξ nem lehet abszolút folytonos valószínűségi változó.

(2) A 6.18. Megjegyzés (3) pontja miatt ξ nem abszolút folytonos valószínűségi változó. Másrészt létezik a várható érték, ezért ξ diszkrét valószínűségi változó. Ebből következően $R_\xi := \{c, x_1, x_2, \ldots\}$ és $p_i := P(\xi = x_i)$ jelöléssel

$$E(\xi) = 1 \cdot c + \sum_i p_i x_i = c + \sum_i 0 \cdot x_i = c$$

adódik, mert $p_i = P(\xi \neq c) = 0$.

7.12. TÉTEL. *Legyen ξ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó.*

(1) *Ha ξ diszkrét vagy abszolút folytonos, továbbá korlátos, azaz létezik $k, K \in \mathbf{R}$, hogy minden $\omega \in \Omega$ esetén $k \leq \xi(\omega) \leq K$, akkor létezik a várható értéke, továbbá $k \leq E(\xi) \leq K$.*

(2) *Ha ξ-nek létezik a várható értéke és létezik $k \in \mathbf{R}$, hogy minden $\omega \in \Omega$ esetén $k \leq \xi(\omega)$, illetve $\xi(\omega) \leq k$, akkor rendre $k \leq E(\xi)$, illetve $E(\xi) \leq k$.*

(3) *Ha ξ konstansfüggvény, azaz létezik olyan $c \in \mathbf{R}$, hogy minden $\omega \in \Omega$ esetén $\xi(\omega) = c$, akkor létezik a várható értéke, továbbá $E(\xi) = c$ teljesül.*

BIZONYÍTÁS. (1) Ha $R_\xi = \{x_1, x_2, \ldots\}$, azaz ξ diszkrét valószínűségi változó, akkor $k \leq x_i \leq K$ minden $x_i \in R_\xi$ esetén. $L := \max(|k|, |K|)$ jelöléssel $|x_i| \leq L$ miatt

$$\sum_i |x_i| p_i \leq \sum_i L p_i = L \sum_i p_i = L,$$

hiszen $\sum_i p_i = 1$. Tehát létezik a várható érték. Másrészt

$$k = k\sum_i p_i = \sum_i kp_i \leq \sum_i x_i p_i = E(\xi) \leq \sum_i Kp_i = K\sum_i p_i = K$$

teljesül, vagyis ekkor igaz az állítás.

Most legyen ξ abszolút folytonos valószínűségi változó. Ha $x \leq k$, akkor $F_\xi(x) = P(\xi < x) = 0$, illetve ha $x \geq K$, akkor $F_\xi(x) = P(\xi < x) = 1$. Ezért a 6.17. Tétel miatt $x \notin (k, K)$ esetén $f_\xi(x) = F'_\xi(x) = 0$ majdnem mindenütt. Így

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = \int_k^K f_\xi(x)dx.$$

Ekkor hasonlóan mint az előbb

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)dx \leq L \int_k^K f_\xi(x)dx = L,$$

vagyis létezik a várható érték. Emiatt

$$k = k\int_k^K f_\xi(x)dx = \int_k^K kf_\xi(x)dx \leq \int_k^K xf_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf_\xi(x)dx =$$

$$= E(\xi) \leq \int_k^K Kf_\xi(x)dx = K\int_k^K f_\xi(x)dx = K,$$

ami az állításunkat igazolja.

(2) Az (1) ponthoz hasonlóan bizonyítható.

(3) Mivel $c \leq \xi(\omega) \leq c$ teljesül minden $\omega \in \Omega$ esetén, így az (1) pont miatt $c \leq E(\xi) \leq c$, vagyis $E(\xi) = c$. A tétel közvetlenül definíció alapján is bizonyítható.

A várható érték további vizsgálatához szükségünk lesz a következő fogalmakra és tételekre.

7.13. DEFINÍCIÓ. Legyen ξ és η az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók.

(1) Ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók, akkor ξ és η **együttes eloszlásán** az

$$\langle p_{k,l}\rangle : \mathbf{R}_\xi \times \mathbf{R}_\eta \to [0,1], \quad p_{k,l} := P(\xi = k, \eta = l)$$

sorozatot értjük, ahol $\{\xi = k, \eta = l\} := \{\xi = k\}\{\eta = l\}$.

(2) ξ és η **együttes eloszlásfüggvényén** az

$$F_{\xi,\eta} : \mathbf{R}^2 \to [0,1], \quad F_{\xi,\eta}(x,y) := P\left(\xi < x, \eta < y\right)$$

kétváltozós függvényt értjük, ahol $\{\xi < x, \eta < y\} := \{\xi < x\}\{\eta < y\}$.

(3) ξ és η együttes eloszlását **abszolút folytonosnak** nevezzük, ha létezik olyan $f_{\xi,\eta} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ nemnegatív függvény, melyre

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\xi,\eta}(u,v)\,dv\,du$$

teljesül minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén. Az $f_{\xi,\eta}$ függvényt a ξ és η **együttes sűrűségfüggvényének** nevezzük.

7.14. TÉTEL. *Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett ξ és η valószínűségi változók együttes eloszlása abszolút folytonos, akkor ξ és η is abszolút folytonos, továbbá minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén*

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dy \quad \textit{és} \quad f_\eta(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dx.$$

7.15. DEFINÍCIÓ. Egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett ξ és η valószínűségi változókat **függetleneknek** nevezzük, ha minden $x, y \in \mathbf{R}$ esetén $F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$ teljesül.

7.16. MEGJEGYZÉS. Bizonyítható, hogy az előző definíció ekvivalens azzal, hogy minden $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ esetén

$$P\left(\xi \in B_1, \eta \in B_2\right) = P\left(\xi \in B_1\right) P\left(\eta \in B_2\right),$$

ahol $\{\xi \in B_1, \eta \in B_2\} := \{\xi \in B_1\}\{\eta \in B_2\}$.

7.17. TÉTEL. *Legyen az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn értelmezett* ξ *és* η *valószínűségi változók együttes eloszlása abszolút folytonos. A* ξ *és* η *akkor és csak akkor független valószínűségi változók, ha egy nullmértékű halmazt kivéve minden* $x, y \in \mathbf{R}$ *esetén* $f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x) f_\eta(y)$ *teljesül.*

Ezeknek a tételeknek a bizonyítására és az együttes eloszlások további részletesebb vizsgálatára még sor kerül egy önálló fejezetben. Most térjünk vissza a várható érték további tulajdonságaihoz.

7.18. TÉTEL. *Legyen* ξ *és* η *az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn értelmezett diszkrét valószínűségi változók és* $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *Borel-mérhető függvény. Ha* $\mathbf{R}_\xi = \{x_1, x_2, \ldots\}$ *és* $\mathbf{R}_\eta = \{y_1, y_2, \ldots\}$*, akkor* $p_{ij} := P(\xi = x_i, \eta = y_j)$ *jelöléssel*

$$E\Big(g(\xi,\eta)\Big) = \sum_{i,j} p_{ij} g(x_i, y_j),$$

feltéve, hogy $\sum\limits_{i,j} p_{ij} |g(x_i, y_j)| < \infty$.

BIZONYÍTÁS. Az 5.12. Tétel miatt $g(\xi,\eta)$ diszkrét valószínűségi változó, így a tétel a 7.1. Definíció következménye.

A következő fontos tételt bizonyítás nélkül mondjuk ki. (A bizonyítás megtalálható [4] 98. oldalán.)

7.19. TÉTEL. *Legyen az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn értelmezett* ξ *és* η *valószínűségi változók együttes eloszlása abszolút folytonos. Ha* $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *Borel-mérhető függvény, akkor*

$$E\Big(g(\xi,\eta)\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy,$$

feltéve, hogy az egyenlőség valamelyik oldalán levő mennyiség létezik.

7.20. TÉTEL. *Legyen az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn értelmezett* ξ *és* η *valószínűségi változók egyszerre diszkrétek vagy abszolút folytonosak. Ha* ξ*-nek és* η*-nak létezik a várható értéke, akkor* $\xi+\eta$*-nak is létezik, továbbá*

$$E(\xi + \eta) = E(\xi) + E(\eta),$$

azaz a várható érték **additív**.

BIZONYÍTÁS. Ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók, akkor legyen $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $g(x, y) := x + y$. Ez folytonos, tehát Borel-mérhető függvény. Ekkor $\sum\limits_i \{\xi = x_i\} = \sum\limits_j \{\eta = y_j\} = \Omega$ miatt

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} p_{ij}|g(x_i, y_j)| &= \sum_{i,j} p_{ij}|x_i + y_j| \leq \sum_{i,j} p_{ij}|x_i| + \sum_{i,j} p_{ij}|y_j| = \\ &= \sum_i P\Big(\sum_j \{\xi = x_i, \eta = y_j\}\Big)|x_i| + \\ &+ \sum_j P\Big(\sum_i \{\xi = x_i, \eta = y_j\}\Big)|y_j| = \\ &= \sum_i P(\xi = x_i)|x_i| + \sum_j P(\eta = y_j)|y_j| < \infty,\end{aligned}$$

hiszen létezik $E(\xi)$ és $E(\eta)$. Így a 7.18. Tétel miatt $E(\xi + \eta)$ létezik és az előző levezetéshez hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}E(\xi + \eta) = E\Big(g(\xi, \eta)\Big) &= \sum_{i,j} p_{ij} g(x_i, y_j) = \sum_{i,j} p_{ij}(x_i + y_j) = \\ = \sum_i P(\xi = x_i)x_i &+ \sum_j P(\eta = y_j)y_j = E(\xi) + E(\eta).\end{aligned}$$

Abszolút folytonos esetben csak akkor bizonyítjuk az állítást, ha létezik az együttes sűrűségfüggvény. Ekkor a 7.19. és 7.14. Tételekből következik, hogy

$$\begin{aligned}E(\xi + \eta) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f_{\xi,\eta}(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi,\eta}(x, y)dxdy + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_{\xi,\eta}(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)dy\right) dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)dx\right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y)dy = \\ &= E(\xi) + E(\eta).\end{aligned}$$

(Általános esetben a tétel bizonyítása megtalálható [1] 62. oldalán.)

7.21. KÖVETKEZMÉNY. *Ha az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn értelmezett egyszerre diszkrét vagy abszolút folytonos* $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ *valószínűségi változóknak létezik a várható értéke, akkor* $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\xi_i$ *valószínűségi változónak is létezik a várható értéke, ahol* $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbf{R}$*, továbbá*

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(\xi_i),$$

vagyis a várható érték **lineáris**.

7.22. TÉTEL. *Ha az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn értelmezett* ξ *valószínűségi változónak létezik a várható értéke, akkor* $\xi + c$*-nek is létezik a várható értéke minden* $c \in \mathbf{R}$ *esetén, továbbá*

$$E(\xi + c) = E(\xi) + c.$$

BIZONYÍTÁS. (1) Mivel c tekinthető egy diszkrét valószínűségi változónak, ezért ha ξ diszkrét, akkor a 7.20. Tételből és a 7.12. Tétel (3) pontja alapján $E(\xi + c) = E(\xi) + E(c) = E(\xi) + c$ teljesül.

(2) Ha ξ abszolút folytonos, akkor a 7.20. Tétel már nem alkalmazható. Viszont a 7.8. Tétel feltételei teljesülnek, így

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x + c| f_\xi(x) dx \le \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx + |c| < \infty$$

miatt $E(\xi + c)$ létezik, továbbá

$$E(\xi + c) = \int_{-\infty}^{\infty} (x + c) f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx + c \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) dx = E(\xi) + c.$$

7.23. TÉTEL. *Legyen* ξ *és* η *az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók. Ha* ξ*-nek és* η*-nak létezik a várható értéke, továbbá* $\xi(\omega) \ge \eta(\omega)$ *minden* $\omega \in \Omega$ *esetén, akkor* $E(\xi) \ge E(\eta)$ *teljesül.*

BIZONYÍTÁS. A tételt csak akkor bizonyítjuk, ha ξ és η egyszerre diszkrétek vagy abszolút folytonosak. Ekkor a várható érték linearitásából és a 7.12. Tétel (2) pontja alapján $0 \le \xi(\omega) - \eta(\omega)$ miatt $0 \le E(\xi - \eta) =$

$E(\xi) - E(\eta)$, ami állításunkat igazolja. (Általános esetben a tétel az [1] 54. oldal A Tételének következménye.)

7.24. TÉTEL. *Ha az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn értelmezett* ξ *és* η *független valószínűségi változók egyszerre diszkrétek vagy abszolút folytonosak, továbbá* ξ*-nek és* η*-nak létezik a várható értéke, akkor* $\xi\eta$*-nak is létezik, és*

$$E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta).$$

BIZONYÍTÁS. (1) Ha ξ és η diszkrét valószínűségi változók, akkor legyen $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $g(x,y) := xy$. Ez folytonos, tehát Borel-mérhető függvény. Legyen $R_\xi := \{x_1, x_2, \ldots\}$, $R_\eta := \{y_1, y_2, \ldots\}$, $p_i := P(\xi = x_i)$, $p_j := P(\eta = y_j)$ és $p_{ij} := P(\xi = x_i, \eta = y_j)$. Ekkor a függetlenség és a 7.16. Megjegyzés miatt $p_{ij} = p_i p_j$ teljesül. Ebből, továbbá az $E(\xi)$ és $E(\eta)$ létezéséből

$$\sum_{i,j} p_{ij}|g(x_i, y_j)| = \sum_{i,j} p_{ij}|x_i y_j| = \sum_{i,j} p_i p_j |x_i||y_j| =$$
$$= \sum_i p_i |x_i| \sum_j p_j |y_j| < \infty.$$

Így a 7.18. Tétel miatt $E(\xi\eta)$ létezik, és

$$E(\xi\eta) = \sum_{i,j} p_{ij} x_i y_j = \sum_{i,j} p_i p_j x_i y_j = \left(\sum_i p_i x_i\right)\left(\sum_j p_j y_j\right) = E(\xi)E(\eta).$$

(2) Ha ξ és η abszolút folytonosak, akkor csak abban az esetben bizonyítjuk az állítást, ha létezik az együttes sűrűségfüggvény. Ekkor a 7.19. és 7.17. Tételek alapján

$$E(\xi\eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_{\xi,\eta}(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f_\xi(x) f_\eta(y)\,dx\,dy =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y)\,dy\right) dx =$$
$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y f_\eta(y)\,dy\right) = E(\xi)E(\eta)$$

teljesül. (Általános esetben lásd [4] 88. oldal.)

Szórásnégyzet

Egy szerencsejátékban akkor nyerünk, ha érmével fejet dobunk, ellenkező esetben veszítünk. Bár ekkor a tét nagyságától függetlenül a nyeremény várható értéke mindig 0, ennek ellenére például 100 000 forintos tétnél nagyon meggondolnánk, hogy játszuk-e ezt a játékot. Nyilván azért, mert ekkor igaz sokat lehet nyerni, de veszíteni is. Vagyis minél nagyobb a tét, annál nagyobb a nyeremény eltérése, szóródása a várható értéktől.

Ebben a részben ezt a szóródást fogjuk jellemezni. De mit válasszunk a szóródás mértékének? Első ránézésre a szóródásról a $\xi - E(\xi)$ várható értéke, azaz az $E(\xi - E(\xi))$ ad felvilágosítást. A 7.22. Tétel alapján azonban ez mindig 0, vagyis ennek a kifejezésnek nincs információtartalma a szórásra vonatkozóan. Természetesen azért, mert a negatív irányú eltérések átlaga megegyezik a pozitív irányúval, így ezek kiegyenlítik egymást. Ebből következően a szórás mértékéül célszerű az $E(|\xi - E(\xi)|)$ értéket választani, ami már megfelelne, de technikai okok miatt praktikusabb a következő definíció.

7.25. DEFINÍCIÓ. Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó, melynek létezik a várható értéke. Ekkor ξ **szórása**

$$D(\xi) := \sqrt{E\left((\xi - E(\xi))^2\right)},$$

szórásnégyzete pedig

$$D^2(\xi) := E\left((\xi - E(\xi))^2\right),$$

feltéve hogy létezik ez a várható érték.

7.26. MEGJEGYZÉS. (1) Definíció szerint véges ξ valószínűségi változónak létezik várható értéke. Másrészt ekkor $(\xi - E(\xi))^2$ is véges, így ξ-nek a szórása is létezik.

(2) Várható értékkel rendelkező valószínűségi változónak nem mindig van szórása. Például legyen $\Omega := \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$, $\mathcal{A}$ az Ω hatványhalmaza és $P : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ olyan valószínűség, melyre $p_i := P(\{i\}) := 3/4^{i+1}$ teljesül. Ekkor p_i eloszlást határoz meg, ugyanis $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i = \sum\limits_{i=0}^{\infty} 3/4^{i+1} = 1$. Legyen

$$\xi : \mathbf{Z}^+ \cup \{0\} \to \mathbf{R}, \quad \xi(i) := x_i := \frac{2^{i+1}}{3} - 1.$$

Ekkor ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben egy valószínűségi változó, melynek létezik a várható értéke. Ugyanis

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i| p_i = \sum_{i=0}^{\infty} \left| \frac{2^{i+1}}{3} - 1 \right| \frac{3}{4^{i+1}} = \frac{1}{4} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2^{i+1}}{3} - 1 \right) \frac{3}{4^{i+1}} =$$

$$= \frac{1}{4} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{i+1}} - \frac{3}{4^{i+1}} \right) = \frac{1}{4} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{4^{i+1}} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{3}{16}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

tehát a $\sum\limits_{0}^{\infty} x_i p_i$ sor abszolút konvergens. Így

$$E(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p_i = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2^{i+1}}{3} - 1 \right) \frac{3}{4^{i+1}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{i+1}} - \frac{3}{4^{i+1}} \right) = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 0,$$

melyből $(\xi - E(\xi))^2 = \xi^2$, vagyis ξ-nek pontosan akkor létezik a szórásnégyzete, ha ξ^2-nek van várható értéke. Ez viszont nem teljesül, mert

$$\lim_{i\to\infty} x_i^2 p_i = \lim_{i\to\infty} \left(\frac{2^{i+1}}{3} - 1 \right)^2 \frac{3}{4^{i+1}} =$$

$$= \lim_{i\to\infty} \left(\frac{4}{9} 4^i - \frac{4}{3} 2^i + 1 \right) \frac{3}{4^{i+1}} = \lim_{i\to\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^i} + \frac{3}{4^{i+1}} \right) = \frac{1}{3},$$

vagyis $x_i^2 p_i$ nem nullsorozat, így $\sum\limits_{0}^{\infty} x_i^2 p_i$ sor nem konvergens.

(3) Az előző példában arra a következtetésre jutottunk, hogy a várható értékkel rendelkező ξ-nek pontosan akkor van szórásnégyzete, ha ξ^2-nek is létezik a várható értéke. Ez természetes ha $E(\xi) = 0$, mint ebben az esetben is. De mi van akkor, ha $E(\xi) \neq 0$? Vajon ekkor milyen feltétel $D^2(\xi)$ létezéséhez az $E(\xi^2)$ létezése? Erre ad feleletet a következő tétel.

7.27. TÉTEL. *Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy várható értékkel rendelkező valószínűségi változója.*

(1) *A ξ valószínűségi változónak pontosan akkor létezik szórása, ha ξ^2-nek létezik a várható értéke, és ekkor*

$$D^2(\xi) = E\left(\xi^2\right) - E^2(\xi).$$

(2) *Általánosítva, ξ-nek pontosan akkor létezik szórása, ha $(\xi - c)^2$-nek létezik a várható értéke, ahol $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges konstans, és ekkor*

$$D^2(\xi) = E\Big((\xi - c)^2\Big) - \Big(E(\xi) - c\Big)^2.$$

BIZONYÍTÁS. (1) Először tegyük fel, hogy létezik $E\left(\xi^2\right)$. Ekkor a várható érték linearitásából következik, hogy

$$\begin{aligned} E\left(\xi^2\right) - E^2(\xi) &= E\left(\xi^2\right) - 2E(\xi)E(\xi) + E^2(\xi) = \\ &= E\Big(\xi^2 - 2\xi E(\xi) + E^2(\xi)\Big) = E\left(\Big(\xi - E(\xi)\Big)^2\right) = D^2(\xi). \end{aligned}$$

Megfordítva, ha ξ-nek létezik a szórásnégyzete, akkor először be kell látni, hogy létezik $E\left(\xi^2\right)$. Ha ξ diszkrét valószínűségi változó, akkor azt kell belátnunk, hogy $\sum\limits_i (x_i - m)^2 p_i < \infty$-ből $\sum\limits_i x_i^2 p_i < \infty$ következik, ahol $m := E(\xi)$, $R_\xi := \{x_1, x_2, \ldots\}$ és $p_i := P\left(\xi = x_i\right)$. Tegyük fel, hogy ez nem teljesül, vagyis $\sum\limits_i x_i^2 p_i = \infty$. Ekkor

$$\sum_i m^2 p_i = m^2 \quad \text{és} \quad \sum_i -2m x_i p_i = -2m^2$$

teljesül. Ebből következik, hogy $\sum\limits_i (-2m x_i p_i + m^2 p_i) = -m^2$. Mivel feltevésünk szerint $\sum\limits_i x_i^2 p_i = \infty$, így az előzőek miatt

$$\begin{aligned} \sum_i (x_i - m)^2 p_i &= \sum_i \left(x_i^2 p_i - 2m x_i p_i + m^2 p_i\right) = \\ &= \sum_i x_i^2 p_i + \sum_i \left(-2m x_i p_i + m^2 p_i\right) = \infty, \end{aligned}$$

ami ellentmondás.

Folytonos esetben azt kell bizonyítani, hogy $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f_\xi(x)dx < \infty$ esetén $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx < \infty$ teljesül. Itt is indirekt úton bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx = \infty$. Ekkor

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} m^2 f_\xi(x)dx = m^2 \quad \text{és} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} -2mx f_\xi(x)dx = -2m^2$$

teljesül. Így $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(-2mxf_\xi(x) + m^2 f_\xi(x)\Big)dx = -m^2$. Ebből viszont az következik, hogy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(x^2 f_\xi(x) - 2mxf_\xi(x) + m^2 f_\xi(x)\Big)dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(-2mxf_\xi(x) + m^2 f_\xi(x)\Big)dx = \infty,$$

ami ellentmondás. Tehát $D^2(\xi)$ létezéséből következik $E\left(\xi^2\right)$ létezése. Már csak az egyenlőséget kell megmutatni, ami pontosan úgy történik mint a bizonyítás elején.

(2) Hasonlóan bizonyíthatjuk mint az előbb, hogy $E((\xi-c)^2$ létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy $E\left(\xi^2\right)$ létezzen, ami szükséges és elégséges feltétele a $D^2(\xi)$ létezésének. Így már csak az egyenlőséget kell megmutatni. Ez viszont teljesül, mert

$$E\Big((\xi-c)^2\Big) - \Big(E(\xi)-c\Big)^2 = E\left(\xi^2 - 2c\xi + c^2\right) - E^2(\xi) + 2cE(\xi) - c^2 =$$

$$= E\left(\xi^2\right) - 2cE(\xi) + c^2 - E^2(\xi) + 2cE(\xi) - c^2 = E\left(\xi^2\right) - E^2(\xi) = D^2(\xi)$$

a linearitás és az előző pont miatt.

7.28. Megjegyzés. A 7.27., 7.7. Tételek és a 7.9. Megjegyzés szerint ξ-nek pontosan akkor létezik a szórásnégyzete, ha ξ-nek és ξ^2-nek létezik a várható értéke, és ekkor $D^2(\xi)$ a következőképpen számolható ki.

$$D^2(\xi) = \sum_i p_i x_i^2 - \Big(\sum_i p_i x_i\Big)^2$$

vagy

$$D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)dx \right)^2$$

aszerint, hogy ξ diszkrét vagy abszolút folytonos.

Például számoljuk ki a 7.3. Feladatban definiált ξ szórásnégyzetét. Az ottani jelölésekkel

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i|x_i^2| = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i^2 = \sum_{i=1}^{\infty} pq^{i-1} \cdot i^2 =$$
$$= p \left(\sum_{i=1}^{\infty} iq^i \right)' = p \left(\frac{q}{(1-q)^2} \right)' = \frac{2-p}{p^2} < \infty,$$

vagyis létezik $E(\xi^2)$ és egyenlő $(2-p)/p^2$-el. Így az előzőek értelmében létezik a szórásnégyzet is, és

$$D^2(\xi) = \frac{2-p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2} = 380.$$

7.29. TÉTEL. *Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy szórással rendelkező valószínűségi változója és $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges konstans. Ekkor*

(1) $D^2(\xi) \le E\Big((\xi - c)^2\Big)$, továbbá egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $c = E(\xi)$.

(2) $D(\xi) \ge 0$, továbbá egyenlőség pontosan $P\Big(\xi = E(\xi)\Big) = 1$ esetén áll fenn.

BIZONYÍTÁS. A 7.27. Tétel miatt egyrészt $E\Big((\xi-c)^2\Big)$ létezik, másrészt

$$E\Big((\xi - c)^2\Big) = D^2(\xi) + \Big(E(\xi) - c\Big)^2 \ge D^2(\xi),$$

továbbá egyenlőség pontosan $(E(\xi)-c)^2 = 0$ esetén áll fenn, ami az állítással ekvivalens.

(2) A $D(\xi) \ge 0$ egyenlőtlenség közvetlenül a definícióból következik. Másrészt $\eta := (\xi - E(\xi))^2$ jelöléssel $\eta(\omega) \ge 0$ minden $\omega \in \Omega$ esetén, így $D^2(\xi) = E(\eta) = 0$ akkor és csak akkor teljesül a 7.11. Tétel értelmében, ha $P(\eta = 0) = 1$, mely az állítást bizonyítja.

7.30. TÉTEL. *Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy szórással rendelkező valószínűségi változója és $a, b, c \in \mathbf{R}$ tetszőleges konstansok. Ekkor $a\xi + b$ és c valószínűségi változóknak is létezik a szórásuk, továbbá*

(1) *$D^2(a\xi + b) = a^2 D^2(\xi)$, azaz $D(a\xi + b) = |a| D(\xi)$ és*

(2) *$D^2(c) = 0$, vagyis $D(c) = 0$.*

BIZONYÍTÁS. (1) A várható érték linearitása miatt

$$\begin{aligned} D^2(a\xi + b) &= E\left(\left(a\xi + b - E(a\xi + b)\right)^2\right) = \\ &= E\left(\left(a\xi + b - aE(\xi) - E(b)\right)^2\right) = \\ &= E\left(\left(a\xi + b - aE(\xi) - b\right)^2\right) = \\ &= E\left(a^2\left(\xi - E(\xi)\right)^2\right) = a^2 E\left(\left(\xi - E(\xi)\right)^2\right) = a^2 D^2(\xi). \end{aligned}$$

(2) Definíció szerint $D^2(c) = E\left((c - E(c))^2\right) = E(0) = 0$.

A fejezet további részeiben valószínűségi változók kapcsolatainak a mérőszámaival, nevezetesen a kovarianciával és a korrelációs együtthatóval foglalkozunk. Ezek során a várható érték és a szórás további fontos tulajdonságait ismerhetjük meg.

Kovariancia

7.31. DEFINÍCIÓ. Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett ξ és η valószínűségi változók **kovarianciája**

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) := E\left(\left(\xi - E(\xi)\right)\left(\eta - E(\eta)\right)\right),$$

feltéve, hogy ezek a várható értékek léteznek.

A következő két tétel a kovariancia definíciójának következményei.

7.32. TÉTEL. *Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett ξ és η valószínűségi változóknak létezik a kovarianciája, akkor*

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi),$$

azaz a kovariancia **szimmetrikus**.

7.33. TÉTEL. *Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező ξ valószínűségi változójának pontosan akkor létezik a szórása, ha létezik az önmagára vonatkozó kovarianciája, továbbá ekkor*

$$D^2(\xi) = \operatorname{cov}(\xi, \xi).$$

7.34. TÉTEL. *Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett ξ és η valószínűségi változók egyszerre diszkrétek vagy abszolút folytonosak, továbbá ξ-nek, η-nak és $\xi\eta$-nak is létezik a várható értéke, akkor létezik ξ-nek η-ra vonatkozó kovarianciája, továbbá*

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta).$$

BIZONYÍTÁS. Az állítás a várható érték linearitása miatt igaz, ugyanis

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\xi, \eta) &= E\Big(\big(\xi - E(\xi)\big)\big(\eta - E(\eta)\big)\Big) = \\ &= E\big(\xi\eta - \eta E(\xi) - \xi E(\eta) + E(\xi)E(\eta)\big) = E(\xi\eta) - \\ &- E(\eta)E(\xi) - E(\xi)E(\eta) + E(\xi)E(\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta).\end{aligned}$$

7.35. MEGJEGYZÉS. A kovarianciát a **függetlenség mértékszámának** is szokták nevezni, ugyanis a 7.34. Tétel szerint általános esetben

$$E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta) + \operatorname{cov}(\xi, \eta),$$

míg ha ξ és η függetlenek, akkor $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$ teljesül. Erre vonatkozik a következő tétel.

7.36. TÉTEL. *Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett ξ és η független valószínűségi változók egyszerre diszkrétek vagy abszolút folytonosak, továbbá létezik a várható értékük, akkor létezik a kovarianciájuk is, és* $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$ *teljesül.*

BIZONYÍTÁS. A 7.24. Tétel alapján $\xi\eta$-nak is létezik a várható értéke, továbbá $E(\xi\eta) = E(\xi)E(\eta)$, így a 7.34. Tételből létezik a kovarianciájuk is, melyre $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = 0$ teljesül.

7.37. MEGJEGYZÉS. A tétel megfordítása nem igaz. Például válasszunk egy 32 lapos kártyacsomagból véletlenszerűen egy lapot. Legyen $\xi = 0$ ha pirosat vagy zöldet, $\xi = -1$ ha tököt, $\xi = 1$ ha makkot húzunk. Másrészt legyen $\eta = 0$ ha tököt vagy makkot, $\eta = -1$ ha pirosat, $\eta = 1$ ha zöldet választunk. Ekkor $R_\xi = R_\eta := \{-1, 0, 1\}$,

$$P(\xi = -1) = \frac{1}{4}, \quad P(\xi = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(\xi = 1) = \frac{1}{4},$$

$$P(\eta = -1) = \frac{1}{4}, \quad P(\eta = 0) = \frac{1}{2}, \quad P(\eta = 1) = \frac{1}{4},$$

továbbá $R_{\xi\eta} = \{-1, 0, 1\}$. Mivel $\{\xi\eta = 0\} = \Omega$, $\{\xi\eta = 1\} = \{\xi\eta = -1\} = \emptyset$, ezért $P(\xi\eta = -1) = 0$, $P(\xi\eta = 0) = 1$ és $P(\xi\eta = 1) = 0$ teljesül. Így

$$E(\xi) = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0,$$
$$E(\eta) = -1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0,$$

és

$$E(\xi\eta) = -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0.$$

Mindezekből a 7.34. Tétel alapján létezik a kovariancia, és egyenlő nullával. Másrészt

$$F_{\xi,\eta}(0,0) = P(\xi < 0, \eta < 0) = 0 \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = P(\xi < 0)P(\eta < 0) = F_\xi(0)F_\eta(0),$$

vagyis ξ és η nem függetlenek.

7.38. TÉTEL. *Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett egyszerre diszkrét vagy abszolút folytonos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ valószínűségi változókra minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ és $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ esetén létezik a $\operatorname{cov}(\xi_i, \eta_j)$, és $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathbf{R}$ tetszőleges konstansok, akkor $\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i$-nek létezik a $\sum_{j=1}^{m} b_j\eta_j$-re vonatkozó kovarianciája, továbbá*

$$\operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\xi_i, \sum_{j=1}^{m} b_j\eta_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j \operatorname{cov}(\xi_i, \eta_j),$$

azaz a kovariancia **bilineáris**.

BIZONYÍTÁS. $\xi := \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$ jelöléssel

$$\operatorname{cov}\left(\xi, \sum_{j=1}^{m} b_j \eta_j\right) = E\left(\left(\xi - E(\xi)\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j \eta_j - E\left(\sum_{j=1}^{m} b_j \eta_j\right)\right)\right) =$$

$$= E\left(\left(\xi - E(\xi)\right)\sum_{j=1}^{m} b_j\left(\eta_j - E(\eta_j)\right)\right) =$$

$$= E\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\left(\xi - E(\xi)\right)\left(\eta_j - E(\eta_j)\right)\right) = \sum_{j=1}^{m} b_j \operatorname{cov}(\xi, \eta_j)$$

adódik, melybe visszaírva a $\xi = \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i$ alakot, az előzőhöz hasonló átalakításokkal kapjuk a tételt.

7.39. TÉTEL. *Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett egyszerre diszkrét vagy abszolút folytonos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változókra minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén létezik a* $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)$, *akkor $\sum_{i=1}^{n} \xi_i$-nek létezik a szórásnégyzete, továbbá*

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D^2(\xi_i) + \sum_{i \neq j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j).$$

BIZONYÍTÁS. A kovariancia bilinearitása miatt $\sum_{i=1}^{n} \xi_i$-nek létezik az önmagára vonatkozó kovarianciája, vagyis a szórásnégyzete, továbbá

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i, \sum_{j=1}^{n} \xi_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_i) + \sum_{i \neq j} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j),$$

mely a tételt igazolja.

7.40. KÖVETKEZMÉNY. *Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett egyszerre diszkrét vagy abszolút folytonos, páronként független*

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változóknak léteznek a szórásnégyzeteik, akkor a $\sum_{i=1}^{n} \xi_i$ valószínűségi változónak is van szórásnégyzete, továbbá

$$D^2\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D^2(\xi_i).$$

Korrelációs együttható

7.41. DEFINÍCIÓ. Legyen ξ és η az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változók. Ha létezik ξ és η kovarianciája és szórásaik, továbbá $D(\xi)D(\eta) \neq 0$, akkor ξ és η **korrelációs együtthatója**

$$\operatorname{corr}(\xi, \eta) := \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{D(\xi)D(\eta)}.$$

Ha $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$, akkor ξ-t és η-t **korrelálatlanoknak** nevezzük.

7.42. MEGJEGYZÉS. A korrelációs együtthatóval rendelkező valószínűségi változó párok körében, melyek egyszerre diszkrétek vagy abszolút folytonosak, a korrelálatlanság általánosabb fogalom mint a függetlenség. Ugyanis a függetlenségből következik, hogy $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$, de megfordítva ez nem igaz. Például a 7.37. Megjegyzésben definiált ξ és η valószínűségi változókról könnyen beláthatja az olvasó, hogy $D(\xi)D(\eta) = 1/2$, így az ott bizonyított $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$ miatt $\operatorname{corr}(\xi, \eta) = 0$. Másrészt viszont azt is bizonyítottuk, hogy ξ és η nem függetlenek.

7.43. DEFINÍCIÓ. Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy valószínűségi változója, melynek létezik a szórása és $D(\xi) \neq 0$. Ekkor ξ **standardizáltján** a

$$\widetilde{\xi} = \frac{\xi - E(\xi)}{D(\xi)}$$

valószínűségi változót értjük.

7.44. TÉTEL. *Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy standardizáltal rendelkező valószínűségi változója. Ekkor $\widetilde{\xi}$-nek létezik a várható értéke és a szórásnégyzete, továbbá $E\left(\widetilde{\xi}\right) = 0$ és $D^2\left(\widetilde{\xi}\right) = 1$.*

BIZONYÍTÁS. $E\left(\widetilde{\xi}\right)$ létezése a 7.10. és a 7.22. Tételből, míg $D^2\left(\widetilde{\xi}\right)$ létezése a 7.30. Tétel (1) pontjából következik. Ugyanezen tételek alapján

$$E\left(\widetilde{\xi}\right)=E\left(\frac{\xi-E(\xi)}{D(\xi)}\right)=\frac{1}{D(\xi)}E\Big(\xi-E(\xi)\Big)=\frac{1}{D(\xi)}\Big(E(\xi)-E(\xi)\Big)=0,$$

és

$$D^2\left(\widetilde{\xi}\right)=D^2\left(\frac{\xi-E(\xi)}{D(\xi)}\right)=\frac{1}{D^2(\xi)}D^2\Big(\xi-E(\xi)\Big)=\frac{D^2(\xi)}{D^2(\xi)}=1$$

teljesül.

7.45. TÉTEL. *Legyen ξ és η standardizálható valószínűségi változói az $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőnek. Ha $E\left(\widetilde{\xi}\widetilde{\eta}\right)$, $\operatorname{corr}(\xi,\eta)$, $\operatorname{cov}\left(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}\right)$ közül valamelyik létezik, akkor a másik kettő is létezik, továbbá*

$$E\left(\widetilde{\xi}\widetilde{\eta}\right)=\operatorname{corr}(\xi,\eta)=\operatorname{cov}\left(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}\right).$$

BIZONYÍTÁS. Egyrészt

$$E\left(\widetilde{\xi}\widetilde{\eta}\right)=E\left(\frac{\xi-E(\xi)}{D(\xi)}\cdot\frac{\eta-E(\eta)}{D(\eta)}\right)=$$

$$=\frac{E\Big(\Big(\xi-E(\xi)\Big)\Big(\eta-E(\eta)\Big)\Big)}{D(\xi)D(\eta)}=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D(\xi)D(\eta)}=\operatorname{corr}(\xi,\eta),$$

másrészt

$$\operatorname{cov}\left(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}\right)=E\Big(\Big(\widetilde{\xi}-E(\widetilde{\xi})\Big)\Big(\widetilde{\eta}-E(\widetilde{\eta})\Big)\Big)=E\Big((\widetilde{\xi}-0)(\widetilde{\eta}-0)\Big)=E\left(\widetilde{\xi}\widetilde{\eta}\right)$$

teljesül, melyekből következik az állítás.

7.46. TÉTEL. *Ha az $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mező ξ és η egyszerre diszkrét vagy abszolút folytonos valószínűségi változóinak létezik a korrelációs együtthatója, akkor $|\operatorname{corr}(\xi,\eta)|\le 1$.*

BIZONYÍTÁS. A korreláció létezéséből következik, hogy ξ és η standardizálható valószínűségi változók, így a 7.39., 7.44. és a 7.45. Tételek alapján

$$0\le D^2\left(\widetilde{\xi}\pm\widetilde{\eta}\right)=D^2\left(\widetilde{\xi}\right)+D^2\left(\widetilde{\eta}\right)\pm 2\operatorname{cov}\left(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}\right)=2\Big(1\pm\operatorname{corr}(\xi,\eta)\Big)$$

teljesül, melyből következik az állítás.

7.47. KÖVETKEZMÉNY. *Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező ξ és η egyszerre diszkrét vagy abszolút folytonos valószínűségi változóinak létezik a korrelációs együtthatója, akkor $|\mathrm{cov}(\xi,\eta)| \leq D(\xi)D(\eta)$.*

7.48. TÉTEL. *Legyen ξ egy valószínűségi változó az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ha ξ-nek létezik a szórása mely nem nulla, és $\eta := a\xi + b$, ahol $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbf{R}$, akkor ξ-nek létezik az η-ra vonatkozó korrelációs együtthatója, továbbá*

$$\mathrm{corr}(\xi,\eta) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a > 0, \\ -1, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

BIZONYÍTÁS. Mivel létezik $D(\xi)$, ezért a 7.30. Tétel (1) pontja miatt $D(\eta)$ is létezik, továbbá $D(\xi) \neq 0$ és $a \neq 0$ miatt $D(\xi)D(\eta) \neq 0$. Másrészt könnyen látható, hogy létezik $E(\eta)$ és $E(\xi\eta)$, így a 7.34. Tételből létezik $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$. Mindezekből következik, hogy $\mathrm{corr}(\xi,\eta)$ is létezik, továbbá

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(\xi,\eta) &= E(\xi\eta) - E(\xi)E(\eta) = E\Big(\xi(a\xi+b)\Big) - E(\xi)E(a\xi+b) = \\ &= aE\left(\xi^2\right) + bE(\xi) - aE^2(\xi) - bE(\xi) = a\Big(E\left(\xi^2\right) - E^2(\xi)\Big) = \\ &= aD^2(\xi).\end{aligned}$$

Ebből $D(\xi)D(\eta) = D(\xi)D(a\xi+b) = |a|D^2(\xi)$ alapján kapjuk az állítást.

7.49. TÉTEL. *Ha ξ és η olyan valószínűségi változók az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, melyeknek létezik a korrelációs együtthatója, továbbá $|\mathrm{corr}(\xi,\eta)| = 1$, akkor léteznek $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ és $b \in \mathbf{R}$ konstansok, melyekre*

$$P(\eta = a\xi + b) = 1.$$

BIZONYÍTÁS. A feltételek miatt $|\mathrm{cov}(\xi,\eta)| = D(\xi)D(\eta)$ teljesül, így $4\,\mathrm{cov}^2(\xi,\eta) - 4D^2(\xi)D^2(\eta) = 0$. Ebből következik, hogy a

$$D^2(\xi)x^2 - 2\,\mathrm{cov}(\xi,\eta)x + D^2(\eta) = 0$$

másodfokú egyenletnek pontosan egy gyöke van, mely $D(\eta) \neq 0$ miatt nullától különbözik. Jelöljük ezt a gyököt a-val. Ekkor

$$0 = D^2(\xi)a^2 - 2\operatorname{cov}(\xi,\eta)a + D^2(\eta) = a^2 E\left(\left(\xi - E(\xi)\right)^2\right) -$$
$$- 2aE\left(\left(\xi - E(\xi)\right)\left(\eta - E(\eta)\right)\right) + E\left(\left(\eta - E(\eta)\right)^2\right) =$$
$$= E\left(a^2\left(\xi - E(\xi)\right)^2 - 2a\left(\xi - E(\xi)\right)\left(\eta - E(\eta)\right) + \left(\eta - E(\eta)\right)^2\right) =$$
$$= E\left(\left(a\left(\xi - E(\xi)\right) - \left(\eta - E(\eta)\right)\right)^2\right)$$

teljesül. Legyen $\mu := \left(a\left(\xi - E(\xi)\right) - \left(\eta - E(\eta)\right)\right)^2$. Így $\mu(\omega) \geq 0$ minden $\omega \in \Omega$ esetén. Másrészt $E(\mu) = 0$ miatt a 7.11. Tételből $P(\mu = 0) = 1$ következik. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$P\left(a\left(\xi - E(\xi)\right) = \eta - E(\eta)\right) = 1,$$

vagyis

$$P\left(\eta = a\xi + \left(E(\eta) - aE(\xi)\right)\right) = 1$$

teljesül, melyből $b := E(\eta) - aE(\xi)$ választással adódik a tétel.

7.50. Megjegyzés. Könnyű ellenőrizni, hogy ha $P(\eta = a\xi + b) = 1$ teljesül, ahol $a \neq 0$, akkor ξ és η nem függetlenek, azaz **függőek**. Vagyis azt kell megmutatnunk, hogy létezik olyan $x, y \in \mathbf{R}$, hogy

$$P(\xi < x, \eta < y) \neq P(\xi < x)P(\eta < y).$$

Tegyük fel, hogy $a, b > 0$. Legyen $x \in \mathbf{R}$ olyan, hogy $P(\xi < x) < 1$. Ilyen x mindig létezik. Ekkor $y := ax$ választással

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x, a\xi + b < ax) = P\left(\xi < x, \xi < x - \frac{b}{a}\right) =$$
$$= P\left(\xi < x - \frac{b}{a}\right) > P(\xi < x)P\left(\xi < x - \frac{b}{a}\right) = P(\xi < x)P(\eta < y).$$

Az a és b egyéb eseteire hasonlóan járhatunk el.

A 7.48. és a 7.49. Tételekből következően a ξ és η valószínűségi változók függősége – pontosabban hogy az egyik a másiknak lineáris függvénye 1 valószínűséggel – és a $|\operatorname{corr}(\xi, \eta)| = 1$ feltételek ekvivalensek. Ezért a korrelációs együtthatót a **függőség mértékszámának** is szokták nevezni.

8. Diszkrét valószínűségi változók nevezetes eloszlásai

Karakterisztikus eloszlás

8.1. DEFINÍCIÓ. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező. Az $A \in \mathcal{A}$ esemény **indikátorváltozójának** a

$$I(A) : \Omega \to \mathbf{R}, \quad I(A)(\omega) := \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega \in A, \\ 0, & \text{ha } \omega \notin A, \end{cases}$$

valószínűségi változót nevezzük.

8.2. MEGJEGYZÉS. (1) Az indikátorváltozó értéke tehát 1, ha az A esemény bekövetkezett, ellenkező esetben 0.

(2) Könnyen látható, hogy a definíció korrekt, vagyis az indikátorváltozó valóban valószínűségi változó, ugyanis

$$\{I(A) < k\} = \begin{cases} \Omega, & \text{ha } k > 1, \\ \overline{A}, & \text{ha } 0 < k \leq 1, \\ \emptyset, & \text{ha } k \leq 0, \end{cases}$$

így minden $k \in \mathbf{R}$ esetén $\{I(A) < k\} \in \mathcal{A}$.

(3) Az $I(A)$ eloszlása $p_0 = P(A)$ és $p_1 = P\left(\overline{A}\right)$.

8.3. DEFINÍCIÓ. Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező, továbbá $I(A)$ az $A \in \mathcal{A}$ esemény indikátorváltozója. Ekkor $I(A)$ eloszlását $P(A)$ paraméterű **karakterisztikus eloszlásnak** nevezzük.

8.4. TÉTEL. *Legyen $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ egy valószínűségi mező, $I(A)$ az $A \in \mathcal{A}$ esemény indikátorváltozója, $p := P(A)$ és $q := P(\overline{A})$. Ekkor $I(A)$-nak létezik a várható értéke és a szórásnégyzete, továbbá*

$$E\left(I(A)\right) = p \quad \text{és} \quad D^2\left(I(A)\right) = pq.$$

BIZONYÍTÁS. (1) A várható érték véges esetben létezik, továbbá

$$E\left(I(A)\right) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p.$$

(2) Az $I(A)$ véges, ezért $I^2(A)$ is az, így $E\left(I^2(A)\right)$ létezik, melyből a 7.27. Tétel alapján

$$D^2\left(I(A)\right) = E\left(I^2(A)\right) - E^2\left(I(A)\right) = E\left(I^2(A)\right) - p^2 = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q - p^2 = pq.$$

Binomiális eloszlás

8.5. DEFINÍCIÓ. Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy diszkrét valószínűségi változója, továbbá $R_\xi := \{0, 1, \ldots, n\}$, ahol $n > 0$ rögzített egész szám. Ha a ξ valószínűségi változó eloszlása

$$\langle p_k \rangle : R_\xi \to [0,1], \quad p_k = P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

ahol $0 < p < 1$ és $q = 1 - p$, akkor ξ-t n-ed rendű p paraméterű **binomiális eloszlású** valószínűségi változónak nevezzük.

8.6. MEGJEGYZÉS. (1) A binomiális eloszlás valóban eloszlás, ugyanis a binomiális tétel alapján

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

teljesül, ami az eloszlás szükséges és elégséges feltétele.

(2) A gyakoriság az 5.16. Tétel szerint binomiális eloszlású. Példaként tekintsük a következő kísérletet. Legyen egy urnában 3 darab golyó, egy piros, egy fekete és egy fehér. Vegyünk ki az urnából véletlenszerűen egy golyót, majd tegyük vissza. Ezt ismételjük meg tízszer. Legyen ξ azon esetek száma, amikor pirosat vettünk ki. Ez az úgynevezett **visszatevéses mintavétel**. Ekkor ξ gyakoriságot jelöl, így ez 10-ed rendű $1/3$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó. Tehát például annak a valószínűsége, hogy a 10 esetből pontosan kétszer választottunk piros golyót

$$p_2 = P(\xi = 2) = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^8 \approx 0{,}1951.$$

A visszatavés nélküli mintavételről a hipergeometrikus eloszlásnál lesz szó.

8.7. TÉTEL. *Legyen $n \in \mathbf{Z}^+$, $0 < p < 1$ és $q = 1 - p$, továbbá legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy n-ed rendű p paraméterű binomiális* *eloszlású valószínűségi változója. Ekkor ξ-nek létezik a várható értéke és a szórásnégyzete, továbbá*

$$E(\xi) = np \quad \textit{és} \quad D^2(\xi) = npq.$$

Bizonyítás. (1) A várható érték véges esetben létezik, továbbá a definíció és a binomiális tétel alapján

$$\begin{aligned}
E(\xi) &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} pnk\frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k} = \\
&= pn\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k} = pn\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-k} = \\
&= pn\sum_{u=0}^{n-1}\binom{n-1}{u}p^u q^{n-1-u} = pn(p+q)^{n-1} = pn
\end{aligned}$$

teljesül. A bizonyítás során az $u = k-1$ helyettesítést alkalmaztuk.

(2) A ξ véges, ezért ξ^2 is az, így $E\left(\xi^2\right)$ létezik, melyből a 7.27. Tétel alapján

$$\begin{aligned}
D^2(\xi) &= E\left(\xi^2\right) - E^2(\xi) = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k q^{n-k} - (np)^2 = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(k^2 - k + k\right)\binom{n}{k}p^k q^{n-k} - (np)^2 = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\Big(k(k-1) + k\Big)\binom{n}{k}p^k q^{n-k} - (np)^2 = \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k q^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k} - (np)^2 = \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k q^{n-k} + np - (np)^2 = \\
&= p^2 n(n-1)\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\frac{(n-2)!}{k!(n-k)!}p^{k-2}q^{n-k} + np - (np)^2 = \\
&= p^2 n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}q^{n-k} + np - (np)^2 =
\end{aligned}$$

$$= p^2 n(n-1) \sum_{u=0}^{n-2} \binom{n-2}{u} p^u q^{n-2-u} + np - (np)^2 =$$
$$= p^2 n(n-1)(p+q)^{n-2} + np - (np)^2 = p^2 n(n-1) + np - (np)^2 =$$
$$= pn\Big(p(n-1) + 1 - np\Big) = pn(1-p) = npq$$

teljesül. A bizonyításban $u = k-2$ helyettesítést, az (1) pontot és a binomiális tételt alkalmaztuk. Feltételeztük még, hogy $n > 1$, amit megtehetünk, ugyanis $n = 1$ esetén

$$D^2(\xi) = E(\xi^2) - E^2(\xi) = \sum_{k=0}^{1} k^2 \binom{1}{k} p^k q^{1-k} - p^2 = pq,$$

vagyis ekkor is igaz a tétel.

8.8. Megjegyzés. Az elsőrendű binomiális eloszlás a karakterisztikus eloszlással egyezik meg.

Hipergeometrikus eloszlás

8.9. Definíció. Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy diszkrét valószínűségi változója, továbbá $R_\xi := \{0, 1, \ldots, n\}$, ahol $n > 0$ rögzített egész szám. Ha a ξ valószínűségi változó eloszlása

$$\langle p_k \rangle : R_\xi \to [0,1], \quad p_k = P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

ahol M és N pozitív egész számokra $M < N$ és $n \leq \min(M, N-M)$ áll fenn, akkor ξ-t **hipergeometrikus eloszlású** valószínűségi változónak nevezzük.

8.10. Megjegyzés. (1) A hipergeometrikus eloszlás valóban eloszlás, vagyis

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = 1,$$

ugyanis a kombinációs számok Cauchy-féle tulajdonsága szerint

$$\binom{N}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}.$$

(2) Legyen N darab termék között $0 < M < N$ selejtes. Az N termék közül válasszunk ki visszatevés nélkül $0 < n \le \min(M, N-M)$ darab terméket. Jelentse ξ az n kiválasztott termék között található selejtes termékek számát. Ekkor ξ hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó.

(3) Ez a modell lehetőséget ad a kombinációs számok Cauchy-féle tulajdonságának bizonyítására. Ugyanis N termék közül kiválasztva n darabot, melyek között k darab selejtes, $\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}$-féleképpen fordulhat elő. Viszont k lehetséges értékei $0, 1, \ldots, n$, így

$$\binom{N}{n} = \binom{M}{0}\binom{N-M}{n} + \binom{M}{1}\binom{N-M}{n-1} + \cdots + \binom{M}{n}\binom{N-M}{0}.$$

8.11. TÉTEL. *Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változója N, M és n paraméterekkel. Ekkor ξ-nek létezik a várható értéke és a szórásnégyzete, továbbá $p := M/N$ és $q := 1 - p$ jelöléssel*

$$E(\xi) = np \quad \text{és} \quad D^2(\xi) = npq\frac{N-n}{N-1}.$$

BIZONYÍTÁS. (1) A várható érték definíciójából és a kombinációs számok Cauchy-féle tulajdonságából

$$\begin{aligned}
E(\xi) &= \sum_{k=0}^{n} k\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{M}{\binom{N}{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(M-1)!}{(k-1)!(M-k)!}\binom{N-M}{n-k} = \\
&= \frac{M}{\binom{N}{n}}\sum_{k=1}^{n}\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k} = \\
&= \frac{M}{\binom{N}{n}}\sum_{u=0}^{n-1}\binom{M-1}{u}\binom{N-1-(M-1)}{n-1-u} = \\
&= \frac{M}{\binom{N}{n}}\binom{N-1}{n-1} = \frac{M\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \frac{Mn}{N} = np
\end{aligned}$$

következik. $E(\xi)$ létezése hasonlóan az előzőekhez ξ végességéből adódik.

(2) Az (1) pont felhasználásával és az előző eloszlások szórásnégyzeteinél leírt indok alapján

$$D^2(\xi) = \sum_{k=0}^{n} k^2\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} - \left(\frac{nM}{N}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} Mk\frac{\binom{M-1}{k-1}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} - \left(\frac{nM}{N}\right)^2 =$$

$$= M\sum_{u=0}^{n-1}(u+1)\frac{\binom{M-1}{u}\binom{N-1-(M-1)}{n-1-u}}{\binom{N}{n}} - \left(\frac{nM}{N}\right)^2 =$$

$$= \frac{M\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}\left(\sum_{u=0}^{n-1} u\frac{\binom{M-1}{u}\binom{N-1-(M-1)}{n-1-u}}{\binom{N-1}{n-1}} + \sum_{u=0}^{n-1}\frac{\binom{M-1}{u}\binom{N-1-(M-1)}{n-1-u}}{\binom{N-1}{n-1}}\right) -$$

$$-\left(\frac{nM}{N}\right)^2 = \frac{Mn}{N}\left(\frac{(M-1)(n-1)}{N-1}+1\right) - \left(\frac{nM}{N}\right)^2 =$$

$$= \frac{Mn}{N}\left(\frac{(M-1)(n-1)}{N-1}+1-\frac{nM}{N}\right) = \frac{Mn}{N}\cdot\frac{N^2-Nn-MN+Mn}{N(N-1)} =$$

$$= \frac{Mn}{N}\cdot\frac{(N-M)(N-n)}{N(N-1)} = \frac{Mn}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1} = npq\frac{N-n}{N-1}$$

adódik. A bizonyításban $u = k-1$ helyettesítést alkalmaztuk.

8.12. TÉTEL. *Legyenek $N, M, n \in \mathbf{Z}^+$ és $k \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$, melyekre $M < N$ és $k \le n \le \min(M, N-M)$ teljesül. Ha $p := M/N$ állandó marad miközben $N \to \infty$ és $M \to \infty$, akkor $q := 1-p$ jelöléssel*

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}.$$

BIZONYÍTÁS. Azonos átalakításokkal kapjuk, hogy

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{M!}{k!(M-k)!}\cdot\frac{(N-M)!}{(n-k)!(N-M-n+k)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{M!}{(M-k)!}\cdot\frac{\frac{(N-M)!}{(N-M-n+k)!}}{\frac{N!}{(N-n)!}} =$$

$$= \binom{n}{k}\frac{M(M-1)\cdots(M-k+1)}{N(N-1)\cdots(N-k+1)}\cdot\frac{\frac{(N-M)!}{(N-M-n+k)!}}{\frac{(N-k)!}{(N-n)!}} =$$

$$= \binom{n}{k}\underbrace{\frac{M}{N}\frac{M-1}{N-1}\cdots\frac{M-k+1}{N-k+1}}_{k \text{ darab tényező}}\cdot\underbrace{\frac{N-M}{N-k}\frac{N-M-1}{N-k-1}\cdots\frac{N-M-n+k+1}{N-n+1}}_{n-k \text{ darab tényező}}.$$

Ha t egy tetszőleges N-től különböző konstans, akkor

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}\frac{M-t}{N-t} = \lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty}}\frac{\frac{M}{N}-\frac{t}{N}}{1-\frac{t}{N}} = \frac{p-0}{1-0} = p,$$

illetve ha t egy tetszőleges $N-k$-tól különböző konstans, akkor

$$\lim_{\substack{N\to\infty\\M\to\infty}} \frac{N-M-t}{N-k-t} = \lim_{\substack{N\to\infty\\M\to\infty}} \frac{1-\frac{M}{N}-\frac{t}{N}}{1-\frac{k}{N}-\frac{t}{N}} = \frac{1-p-0}{1-0-0} = 1-p = q.$$

Mindezeket felhasználva adódik a tétel.

8.13. MEGJEGYZÉS. Ez a tétel azt jelenti, hogy nagy N és M esetén a $p := M/N$ paraméterű n-ed rendű binomiális eloszlás jól közelíti hipergeometrikus eloszlást. Például legyen 10 000 termék között 10% selejt. A termékek közül 10 darabot válasszunk ki véletlenszerűen visszatevés nélkül. Ha ξ a 10 termék közötti selejtesek számát jelöli, akkor az a 8.10. Megjegyzés (2) pontja alapján $N = 10\,000$, $M = 1000$, $n = 10$ paraméterű hipergeometrikus eloszlású valószínűségi változó. Azaz például annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott 10 termék között pontosan 3 selejtes van

$$p_3 = P(\xi = 3) = \frac{\binom{1000}{3}\cdot\binom{9000}{7}}{\binom{10\,000}{10}}.$$

Ezt elég körülményes lenne kiszámolni, de mivel nagy az N és az M is, ezért alkalmazhatjuk a binomiális közelítést. Tehát

$$p_3 \approx \binom{n}{k}\cdot\left(\frac{M}{N}\right)^k\left(1-\frac{M}{N}\right)^{n-k} = \binom{10}{3}\cdot 0{,}1^3\cdot 0{,}9^7 \approx 0{,}0574.$$

Poisson-eloszlás

8.14. DEFINÍCIÓ. Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy diszkrét valószínűségi változója, továbbá $R_\xi := \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$. Ha a ξ valószínűségi változó eloszlása

$$\langle p_k\rangle : R_\xi \to [0,1], \quad p_k = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},$$

ahol λ pozitív konstans, akkor ξ-t λ paraméterű **Poisson-eloszlású** valószínűségi változónak nevezzük.

8.15. MEGJEGYZÉS. A Poisson-eloszlás valóban eloszlás, ugyanis

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

8.16. TÉTEL. *Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változója. Ekkor ξ várható értéke és szórásnégyzete is létezik, továbbá*

$$E(\xi) = D^2(\xi) = \lambda.$$

BIZONYÍTÁS. (1) A várható érték definíciója szerint

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \text{ha} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |k| \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} < \infty.$$

Mivel $k \geq 0$, ezért elég a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ sorösszeget vizsgálni. Így

$$\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\lambda^u}{u!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda$$

teljesülése miatt igaz a tétel.

(2) A szórásnégyzet létezésének bizonyításához a 7.27. Tétel alapján elég az $E\left(\xi^2\right)$ létezését vizsgálni. Ehhez a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ sorösszeget kell kiszámítani. Tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \big(k(k-1) + k\big) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} +$$
$$+ e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{u=0}^{\infty} \frac{\lambda^u}{u!} + e^{-\lambda} \lambda \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\lambda^v}{v!} = \lambda^2 + \lambda,$$

vagyis $E\left(\xi^2\right) = \lambda^2 + \lambda$. A levezetésben az $u = k - 2$ és $v = k - 1$ helyettesítéseket vezettük be. Így

$$D^2(\xi) = E\left(\xi^2\right) - E^2(\xi) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda,$$

ami állításunkat igazolja.

8.17. TÉTEL. *Legyen $n \in \mathbf{Z}^+$, $0 < p < 1$, $q := 1 - p$, $0 \leq k \leq n$ egész és $\lambda := np$. Ha a λ értéke állandó marad, miközben $n \to \infty$ és $p \to 0$, akkor*

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p \to 0}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

BIZONYÍTÁS.

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ p\to 0}} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

8.18. MEGJEGYZÉS. (1) Ezen tétel szerint nagy n és kis p esetén $\lambda = np$ választással a Poisson-eloszlás jól közelíti a binomiális eloszlást. Például, ha $n = 1000$ lövést adunk le egy célra, és minden lövés egymástól függetlenül $p = 0{,}004$ valószínűséggel talál, akkor mi annak a valószínűsége, hogy pontosan $k = 3$-szor találunk célba? A találatok száma binomiális eloszlású, így

$$p_3 = \binom{1000}{3} \cdot 0{,}004^3 \cdot 0{,}996^{997}.$$

Ezt elég körülményes kiszámolni, de most használhatjuk a Poisson-eloszlással való közelítést. Mivel $\lambda = np = 4$, ezért

$$p_3 \approx \frac{4^3}{3!} e^{-4} \approx 0{,}1954.$$

(2) Ha az előző példában $n = 1000$, $p = 0{,}996$ és $k = 997$, akkor már nem alkalmazható a $\lambda = np$ paraméterű Poisson-eloszlású közelítés, hiszen p közel 1. A 8.17. Tétel azonban ilyenkor is alkalmazható, ugyanis az, hogy 997-szer találunk, azt jelenti, hogy 3-szor elhibáztuk a célt. A hibázás valószínűsége minden lövésnél $1 - p = 0{,}004$, ami már kicsi, így alkalmazhatjuk a $\lambda = n(1-p) = 4$ paraméterű Poisson-közelítést. Tehát η-val jelölve a hibázások számát,

$$p_{997} = \binom{1000}{997} \cdot 0{,}996^{997} \cdot 0{,}004^3 = P(\eta = 3) \approx \frac{4^3}{3!} e^{-4} \approx 0{,}1954$$

teljesül.

Geometriai eloszlás

8.19. DEFINÍCIÓ. Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy diszkrét valószínűségi változója, továbbá $R_\xi := \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$. Ha a ξ valószínűségi változó eloszlása

$$\langle p_k\rangle : R_\xi \to [0,1], \quad p_k = P(\xi = k) = p^k q,$$

ahol $0 < p < 1$ és $q = 1 - p$, akkor ξ-t p paraméterű **geometriai eloszlású** valószínűségi változónak nevezzük.

8.20. MEGJEGYZÉS. A geometriai eloszlás valóban eloszlás, ugyanis

$$\sum_{k=0}^{\infty} p^k q = q \sum_{k=0}^{\infty} p^k = q \frac{1}{1-p} = \frac{q}{q} = 1.$$

8.21. TÉTEL. *Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy $0 < p < 1$ paraméterű geometriai eloszlású valószínűségi változója. Ekkor ξ-nek létezik a várható értéke és a szórásnégyzete, továbbá $q := 1 - p$ jelöléssel*

$$E(\xi) = \frac{p}{q} \quad \text{és} \quad D^2(\xi) = \frac{p}{q^2}.$$

BIZONYÍTÁS. (1) A várható érték definíciója szerint

$$E(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k p^k q, \quad \text{ha} \quad \sum_{k=0}^{\infty} |k| p^k q < \infty.$$

Mivel $k \geq 0$, így elég a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k p^k q$ sorösszeget vizsgálni. Ezért

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p^k q = q \sum_{k=1}^{\infty} k p^k = qp \sum_{k=1}^{\infty} k p^{k-1} = qp \frac{d}{dp} \left(\sum_{k=1}^{\infty} p^k \right) =$$
$$= qp \frac{d}{dp} \left(\frac{p}{1-p} \right) = qp \frac{1 - p + p}{(1-p)^2} = \frac{qp}{q^2} = \frac{p}{q}$$

teljesülése miatt igaz az állítás. A bizonyításban felhasználtuk, hogy a $\sum\limits_{1}^{\infty} p^k$ hatványsor konvergenciasugara 1, így p lehetséges értékei esetén $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p^k$ összegfüggvény végtelen sokszor differenciálható.

(2) A szórásnégyzet létezésének bizonyításához a 7.27. Tétel alapján elég az $E\left(\xi^2\right)$ létezését vizsgálni. Ehhez a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2 p^k q$ sorösszeget kell kiszámítani. Tehát

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p^k q &= q \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p^k = qp \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p^{k-1} = qp \frac{d}{dp} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k p^k \right) = \\
&= qp \frac{d}{dp} \left(\frac{p}{(1-p)^2} \right) = qp \frac{(1-p)^2 + 2p(1-p)}{(1-p)^4} = \\
&= (1-p)p(1-p) \frac{1-p+2p}{(1-p)^4} = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \frac{p^2+p}{q^2},
\end{aligned}$$

vagyis

$$E\left(\xi^2\right) = \frac{p^2+p}{q^2}.$$

A levezetésben felhasználtuk, hogy az előző pont bizonyításából következően $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k p^k = \frac{p}{q^2}$ teljesül, másrészt hogy a $\sum\limits_{1}^{\infty} k p^k$ hatványsor konvergenciasugara 1. Így

$$D^2(\xi) = E\left(\xi^2\right) - E^2(\xi) = \frac{p^2+p}{q^2} - \frac{p^2}{q^2} = \frac{p}{q^2},$$

ami állításunkat igazolja.

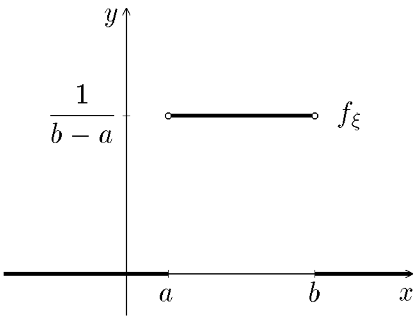
9. Folytonos valószínűségi változók nevezetes eloszlásai

Egyenletes eloszlás

9.1. DEFINÍCIÓ. Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy abszolút folytonos valószínűségi változója, továbbá $a < b$ valós számok. Ha ξ sűrűségfüggvénye

$$f_\xi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 0 & \text{egyébként}, \end{cases}$$

akkor ξ-t **egyenletes eloszlású** valószínűségi változónak nevezzük az (a, b) intervallumon. (Lásd 6. ábra.)



6. ábra

9.2. MEGJEGYZÉS. Ez valóban sűrűségfüggvény, hiszen $f_\xi(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén, továbbá

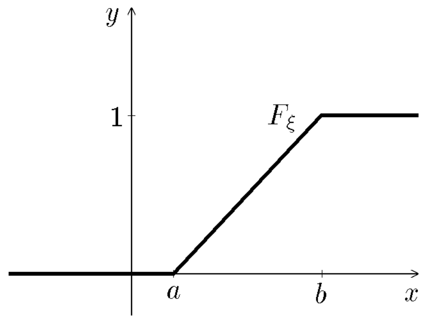
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

9.3. TÉTEL. *Legyen $a < b$ valós számok és ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy egyenletes eloszlású valószínűségi változója az (a, b) intervallumon.*

Ekkor ξ eloszlásfüggvénye

$$F_\xi : \mathbf{R} \to [0,1], \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x < b, \\ 1\,, & \text{ha } x \ge b. \end{cases}$$

(Lásd 7. ábra.)



7. ábra

Bizonyítás. Ha $x \le a$, akkor $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 dt = 0$ teljesül. Ha $a < x < b$, akkor

$$F_\xi(x) = \int\limits_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a}[t]_a^x = \frac{x-a}{b-a},$$

így ekkor is igaz az állítás. Végül ha $x \ge b$, akkor

$$F_\xi(x) = \int\limits_a^b \frac{1}{b-a} dt = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

9.4. Tétel. *Legyen $a < b$ valós számok és ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy egyenletes eloszlású valószínűségi változója az (a,b) intervallumon. Ekkor ξ-nek létezik a várható értéke és a szórásnégyzete, továbbá*

$$E(\xi) = \frac{a+b}{2} \quad \textit{és} \quad D^2(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

BIZONYÍTÁS. (1) A várható érték létezik, mivel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x) dx = \int_a^b |x| \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b |x| dx < \infty$$

teljesül. Így

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

(2) A szórásnégyzet létezéséhez elég megmutatni, hogy $E\left(\xi^2\right)$ létezik. Ez viszont teljesül, mert

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x^2| f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)},$$

melyből az is látható, hogy $E\left(\xi^2\right) = \dfrac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$. Így

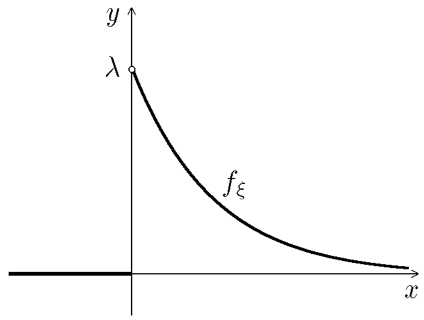
$$\begin{aligned} D^2(\xi) = E\left(\xi^2\right) - E^2(\xi) &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Exponenciális eloszlás

9.5. DEFINÍCIÓ. Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy abszolút folytonos valószínűségi változója, továbbá $\lambda > 0$ valós szám. Ha ξ sűrűségfüggvénye

$$f_\xi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$$

akkor ξ-t λ paraméterű **exponenciális eloszlású** valószínűségi változónak nevezzük. (Lásd 8. ábra.)



8. ábra

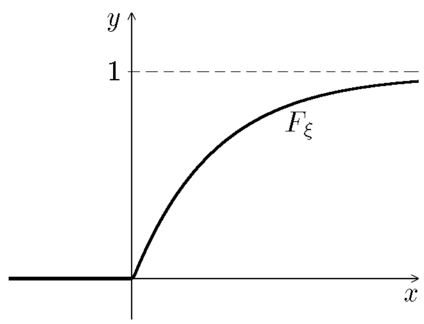
9.6. Megjegyzés. Ez valóban sűrűségfüggvény, hiszen $f_\xi(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén, továbbá

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = -\left[e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = -\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\lambda x}} - 1\right) = 1.$$

9.7. Tétel. *Legyen $\lambda > 0$ valós szám és ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változója. Ekkor ξ eloszlásfüggvénye*

$$F_\xi : \mathbf{R} \to [0,1), \quad F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

(Lásd 9. ábra.)



9. ábra

BIZONYÍTÁS. Ha $x \leq 0$, akkor $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0$ teljesül, másrészt ha $x > 0$, akkor

$$\begin{aligned} F_\xi(x) &= \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt = \int\limits_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = \lambda \left[\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\right]_0^x = \\ &= -\left[e^{-\lambda t}\right]_0^x = -\left(e^{-\lambda x} - 1\right) = 1 - e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

9.8. TÉTEL. *Legyen $\lambda > 0$ valós szám és ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változója. Ekkor ξ-nek létezik a várható értéke és a szórásnégyzete, továbbá*

$$E(\xi) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{és} \quad D^2(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

BIZONYÍTÁS. (1) Először megmutatjuk, hogy létezik a várható érték. Behelyettesítve a konkrét sűrűségfüggvényt az integrálba, azt kapjuk, hogy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)dx = \int\limits_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \int\limits_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x}dx.$$

Ezt az improprius integrált a parciális integrálás módszerével fogjuk kiszámolni. Legyen

$$f(x) := x \quad \text{és} \quad g'(x) := e^{-\lambda x}.$$

Ekkor

$$f'(x) = 1 \quad \text{és} \quad g(x) = -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x},$$

így

$$\begin{aligned} \lambda \int\limits_{0}^{\infty} xe^{-\lambda x}dx &= \lambda \left[-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty - \lambda \int\limits_{0}^{\infty} -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}dx = \\ &= -\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} + \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^\infty = \\ &= 0 - \frac{1}{\lambda}\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\lambda x}} - 1\right) = -\frac{1}{\lambda}(0-1) = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

teljesül. Ebből már következik, hogy $E(\xi)$ létezik, sőt az is látható, hogy $E(\xi) = \frac{1}{\lambda}$, ami az állítás volt. A $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}}$ határértéket a L'Hospital-szabály segítségével számoltuk ki.

(2) A szórásnégyzet létezésének megmutatásához az $E\left(\xi^2\right)$ létezését kell megmutatni. Tehát

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x^2| f_\xi(x)dx = \int\limits_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx,$$

melyet szintén parciális integrálással határozhatunk meg. Legyen

$$f(x) := x^2 \quad \text{és} \quad g'(x) := e^{-\lambda x}.$$

Ekkor

$$f'(x) = 2x \quad \text{és} \quad g(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$$

teljesül, így

$$\lambda \int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{x^2}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} - \lambda \int\limits_0^{\infty} -2x \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} dx = -\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{\lambda x}} +$$

$$+ 2 \int\limits_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = -\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\lambda e^{\lambda x}} + \frac{2}{\lambda^2} = -\lim_{x\to\infty} \frac{2}{\lambda^2 e^{\lambda x}} + \frac{2}{\lambda^2} = 0 + \frac{2}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$$

áll fenn. A levezetésben a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{\lambda x}}$ határértéket a L'Hospital-szabály kétszeri alkalmazásával számoltuk ki, továbbá az $\int\limits_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = 1/\lambda^2$ egyenlőség az (1) pont bizonyításából látható. Mindezek alapján $E\left(\xi^2\right)$ létezik és $E\left(\xi^2\right) = 2/\lambda^2$. Ebből pedig kapjuk, hogy

$$D^2(\xi) = E\left(\xi^2\right) - E^2(\xi) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

9.9. MEGJEGYZÉS. Vizsgáljuk egy olyan alkatrész élettartamát, mely bármikor meghibásodhat függetlenül attól, hogy milyen régen állítottuk üzembe. Például ilyenek lehetnek a véletlen törések. A ξ valószínűségi változó jelentse az alkatrész élettartamát. Megmutatjuk, hogy ξ exponenciális eloszlású. Legyen

$$G : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ G(x) := P(\xi \geq x) = 1 - F_\xi(x).$$

Vizsgáljuk meg annak a valószínűségét, hogy x élettartam után az alkatrész még további legalább y ideig működőképes. Ez a valószínűség egyrészt $G(y)$-al egyenlő, hiszen az öregedést nem vettük figyelembe. Másrészt, ahhoz hogy ez teljesüljön, feltétel hogy x ideig jó legyen az alkatrész. Vagyis

$$G(y) = P\Big(\{\xi \geq x + y\}\Big|\{\xi \geq x\}\Big). \tag{9.1}$$

A szorzás tételt alkalmazva

$$P(\xi \geq x)P\Big(\{\xi \geq x + y\}\Big|\{\xi \geq x\}\Big) = P(\xi \geq x + y)$$

adódik, melyből (9.1) és G definíciója alapján

$$G(x)G(y) = G(x + y) \tag{9.2}$$

teljesül, mely egy fajtája az úgynevezett Cauchy-féle függvényegyenletek-nek. A megoldásnál feltesszük, hogy G differenciálható. Először (9.2)-t átalakítjuk a feltételek melletti ekvivalens differenciálegyenletbe. Parciálisan deriválva (9.2) mindkét oldalát y szerint

$$\frac{\partial G(x+y)}{\partial y} = G(x)\frac{\partial G(y)}{\partial y}$$

adódik. Ebbe az egyenletbe $y = 0$ helyettesítve

$$\left.\frac{\partial G(x+y)}{\partial y}\right|_{y=0} = \lim_{y\to 0}\frac{G(x+y) - G(x+0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0}\frac{G(x+y) - G(x)}{y} = G'(x)$$

miatt

$$G'(x) = G(x)G'(0)$$

teljesül. Vezessük be a $\lambda := -G'(0)$ jelölést. Ekkor

$$G'(x) = -\lambda G(x)$$

áll fenn. Tegyük fel, hogy létezik olyan $x_0 \in \mathbf{R}$, hogy $G(x_0) = 0$. Ekkor $x = x_0$ helyettesítve (9.2)-be $G(x_0 + y) = 0$ adódik, ami azt jelenti, hogy G konstans nulla függvény. Ez viszont nem lehet, mert ekkor $F_\xi(x) = 1$ ha $x > 0$, míg $x \leq 0$ esetén a ξ jelentése miatt $F_\xi(x) = P(\xi < x) = 0$, melyből $P(\xi = 0) = 1$ következik, ami nem lehet. Így egyenletünket

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = -\lambda$$

módon alakíthatjuk tovább, ami már egy szeparált differenciálegyenlet. Ennek megoldásánál vegyük figyelembe, hogy $F_\xi(0) = P(\xi < 0) = 0$ miatt $G(0) = 1$ teljesül. Így a differenciálegyenlet megoldása

$$G(x) = e^{-\lambda x},$$

ahol $\lambda > 0$. Ugyanis $\lambda = 0$ esetén $G(x) \equiv 1$, vagyis $F_\xi(x) \equiv 0$, ami ellentmondás, hiszen $\lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$. Másrészt ha $\lambda < 0$, akkor G szigorúan monoton növekvő, melyből F_ξ szigorúan monoton csökkenő lenne, ami szintén ellentmondás. A $\lambda > 0$ eset viszont megfelel, mert ekkor G szigorúan monoton csökken, vagyis F_ξ szigorúan monoton nő, és $G'(x) = -\lambda e^{-\lambda x}$ miatt $-G'(0) = \lambda$, ami szintén követelmény volt.

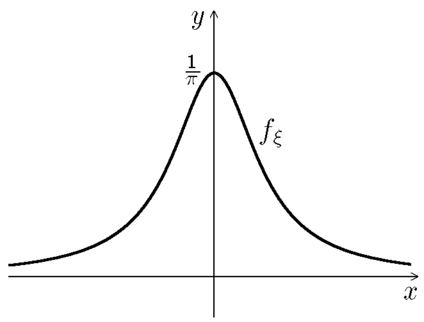
Végül vegyük figyelembe, hogy a G-re kapott megoldás, valójában csak $x > 0$ esetben megoldás, hiszen x időtartamot jelöl. Tehát ha $x > 0$, akkor $F_\xi(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, míg $x \le 0$ esetén $F_\xi(x) = P(\xi < 0) = 0$, ami feltevésünket igazolja.

Cauchy-eloszlás

9.10. Definíció. Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy abszolút folytonos valószínűségi változója. Ha ξ sűrűségfüggvénye

$$f_\xi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f_\xi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)},$$

akkor ξ-t **Cauchy-eloszlású** valószínűségi változónak nevezzük. (Lásd 10. ábra.)



10. ábra

9.11. Megjegyzés. Ez valóban sűrűségfüggvény, ugyanis $f_\xi(x) > 0$

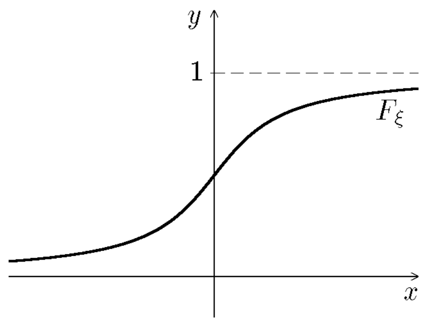
minden $x \in \mathbf{R}$ esetén, továbbá

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}(x)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

9.12. Tétel. *Ha ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy Cauchy-eloszlású valószínűségi változója, akkor az eloszlásfüggvénye*

$$F_\xi : \mathbf{R} \to (0,1), \quad F_\xi(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}(x) + \frac{1}{2}.$$

(Lásd 11. ábra.)



11. ábra

Bizonyítás. A sűrűségfüggvény definíciójából

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}dt = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}(t)\right]_{-\infty}^{x} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}(x) + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}(x) + \frac{1}{2}.$$

9.13. Tétel. *A Cauchy-eloszlású valószínűségi változóknak nem létezik várható értéke.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítása érdekében vizsgáljuk az $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)dx$ integrált. Ekkor kapjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{\pi}\left[\log\left(1+x^2\right)\right]_0^{\infty} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\lim_{x\to\infty}\log\left(1+x^2\right) - \log(1)\right) = \frac{1}{\pi}(\infty - 0) = \infty,$$

azaz $E(\xi)$ valóban nem létezik.

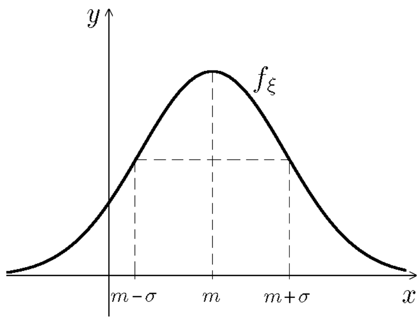
9.14. MEGJEGYZÉS. Természetesen ezen tétel alapján Cauchy-eloszlású valószínűségi változónak szórásnégyzete sem létezik.

Normális eloszlás

9.15. DEFINÍCIÓ. Legyen ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy abszolút folytonos valószínűségi változója, továbbá $m \in \mathbf{R}$ és $\sigma \in \mathbf{R}^+$. Ha ξ sűrűségfüggvénye

$$f_\xi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

akkor ξ-t m és σ paraméterű **normális eloszlású** valószínűségi változónak nevezzük. (Lásd 12. ábra.)

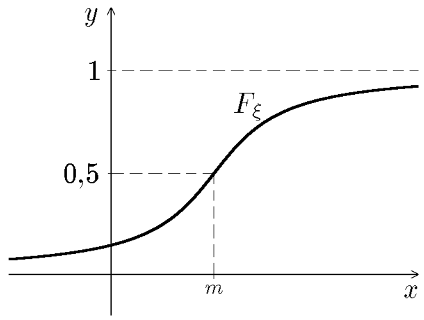


12. ábra

9.16. MEGJEGYZÉS. (1) A normális eloszlású ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_\xi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

(Lásd 13. ábra.)



13. ábra

(2) A 9.15. Definíció korrekt, azaz az ott definiált függvény valóban sűrűségfüggvény. Ennek belátása érdekében számoljuk ki a $W := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$ integrál értékét. Mivel

$$W^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy,$$

így $x := r\cos\omega$ és $y := r\sin\omega$ $(0 \le r < \infty,\ 0 \le \omega \le 2\pi)$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$W^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}drd\omega = 2\pi\int_0^{\infty} re^{-r^2}dr = 2\pi\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \pi.$$

A helyettesítés során felhasználtuk, hogy a Jacobi-determináns

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \omega} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\omega & -r\sin\omega \\ \sin\omega & r\cos\omega \end{vmatrix} = r\cos^2\omega + r\sin^2\omega = r.$$

Mivel $e^{-x^2} > 0$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén, ezért W is pozitív. Ebből $W^2 = \pi$ alapján kapjuk, hogy $W = \sqrt{\pi}$. Most számoljuk ki az $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx$ integrál értékét. Alkalmazzunk $u := x/\sqrt{2}$ helyettesítést. Ekkor $\frac{dx}{du} = \sqrt{2}$ miatt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2}e^{-u^2}du = \sqrt{2}W = \sqrt{2\pi}.$$

Ebből már megmutathatjuk, hogy a normális eloszlás valóban eloszlás. Egyrészt $f_\xi(x) > 0$ minden $x \in \mathbf{R}$ esetén, másrészt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi} = 1.$$

melyet a $t := (x - m)/\sigma$ helyettesítéssel számoltunk ki.

(3) A 12. ábrán látható görbe az úgynevezett **Gauss-féle haranggörbe**.

9.17. TÉTEL. *Legyen $m \in \mathbf{R}$, $\sigma \in \mathbf{R}^+$ és ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy m és σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változója. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén*

(1) $f_\xi(m - x) = f_\xi(m + x)$ *és*

(2) $F_\xi(m - x) = 1 - F_\xi(m + x)$ *áll fenn, továbbá*

(3) F_ξ *szigorúan monoton növekedő, míg*

(4) f_ξ *a $(-\infty, m]$ intervallumon szigorúan monoton növekedő, az $[m, \infty)$ intervallumon pedig szigorúan monoton csökkenő függvény.*

BIZONYÍTÁS. (1) Az állítást behelyettesítéssel ellenőrizhetjük.

(2) Az előző pont miatt

$$F_\xi(m-x) = \int_{-\infty}^{m-x} f_\xi(x)dx = \int_{m+x}^{\infty} f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx - \int_{-\infty}^{m+x} f_\xi(x)dx = 1 - F_\xi(m+x).$$

(3) A definícióból $f_\xi(t) > 0$ minden $t \in \mathbf{R}$ esetén. Ezért ha $x_1 < x_2$, akkor $\int_{x_1}^{x_2} f_\xi(t)dt > 0$. Ebből pedig

$$F_\xi(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f_\xi(t)dt < \int_{-\infty}^{x_1} f_\xi(t)dt + \int_{x_1}^{x_2} f_\xi(t)dt = \int_{-\infty}^{x_2} f_\xi(t)dt = F_\xi(x_2).$$

(4) Az állítás a természetes alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekedéséből következik.

9.18. DEFINÍCIÓ. Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy $m = 0$ és $\sigma = 1$ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változóját **standard normális eloszlású** valószínűségi változónak nevezzük, melynek sűrűségfüggvényét φ-vel, az eloszlásfüggvényét pedig Φ-vel jelöljük. Tehát

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{és} \quad \Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

9.19. TÉTEL. *Ha ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy standard normális eloszlású valószínűségi változója, akkor az eloszlásfüggvényére illetve a sűrűségfüggvényére minden $x \in \mathbf{R}$ esetén*

(1) $\varphi(-x) = \varphi(x)$ *és*

(2) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ *áll fenn, továbbá*

(3) Φ *szigorúan monoton növekedő, míg*

(4) φ *az $\mathbf{R}^-$-on szigorúan monoton növekedő, az $\mathbf{R}^+$-on pedig szigorúan monoton csökkenő függvény.*

BIZONYÍTÁS. A 9.17. Tétel speciális esete.

9.20. MEGJEGYZÉS. (1) A 9.19. Tétel (3) és (4) pontjai lehetővé teszik, hogy Φ és φ értékeit táblázatba rendezzük. Az (1) és (2) pont pedig azért hasznos, mert így a táblázatban elég a pozitív x-ek helyettesítési értékeit feltüntetni.

(2) A tétel szerint φ páros, míg $\Phi - 1/2$ páratlan függvény.

9.21. TÉTEL. *Legyen $m \in \mathbf{R}$, $\sigma \in \mathbf{R}^+$ és ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy m és σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változója. Ekkor minden $x \in \mathbf{R}$ esetén*

(1) $f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ *és*

(2) $F_\xi(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ *teljesül.*

BIZONYÍTÁS. (1) φ definíciójából

$$\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = f_\xi(x).$$

(2) Az $u := (t-m)/\sigma$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$F_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

9.22. MEGJEGYZÉS. A 9.21. Tétel felhasználásával a 9.20. Megjegyzésben említett táblázat tetszőleges normális eloszlásra alkalmazható.

9.23. TÉTEL. *Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező η valószínűségi változója pontosan akkor standard normális eloszlású, ha a $\xi := \sigma\eta + m$ valószínűségi változó $(\sigma \in \mathbf{R}^+, m \in \mathbf{R})$ m és σ paraméterű normális eloszlású.*

BIZONYÍTÁS. Az 5.5. Tétel miatt ξ és η valószínűségi változók. Ha η standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor $\sigma \in \mathbf{R}^+$ miatt

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = P(\sigma\eta + m < x) = P\left(\eta < \frac{x-m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

teljesül, melyből a 9.21. Tétel (2) pontja alapján a ξ valószínűségi változó m és σ paraméterű normális eloszlású.

Megfordítva, ha a ξ valószínűségi változó m és σ paraméterű normális eloszlású, akkor ismét a $\sigma \in \mathbf{R}^+$ és a 9.21. Tétel (2) pontja alapján

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = P\left(\frac{x-m}{\sigma} < x\right) = P(\xi < \sigma x + m) = F_\xi(\sigma x + m) = \Phi(x)$$

következik, azaz az η standard normális eloszlású valószínűségi változó.

9.24. TÉTEL. *Legyen $m \in \mathbf{R}$, $\sigma \in \mathbf{R}^+$ és ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy m és σ paraméterű normális eloszlású valószínűségi változója. Ekkor ξ-nek létezik a várható értéke és a szórásnégyzete, továbbá*

$$E(\xi) = m \quad \text{és} \quad D^2(\xi) = \sigma^2.$$

BIZONYÍTÁS. (1) Legyen η standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $E(\eta)$ létezik, mert

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^\infty = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} < \infty.$$

Az integrálásban felhasználtuk, hogy $xe^{-x^2/2}$ páros. Így a várható érték az $x\varphi(x)$ páratlansága miatt $E(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx = 0$. A 9.23. Tétel szerint, ha a ξ valószínűségi változó m és σ paraméterű normális eloszlású, akkor felírható $\xi = \sigma\eta + m$ alakban, ahol η standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ezért a várható érték linearitásából $E(\xi)$ létezik, továbbá az előző eredményből következik, hogy

$$E(\xi) = E(\sigma\eta + m) = \sigma E(\eta) + m = m.$$

(2) Most ismét legyen η standard normális eloszlású valószínűségi változó. Legyen $f(x) := x$ és $g'(x) := xe^{-x^2/2}$. Ekkor parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x^2||\varphi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{\infty} -$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}}dx = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\frac{x^2}{2}}} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx =$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xe^{\frac{x^2}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1.$$

Ezért $E(\eta^2)$ létezik, és $E(\eta^2) = 1$. Ebből $D^2(\eta) = E(\eta^2) - E^2(\eta) = 1$. Ha a ξ valószínűségi változó m és σ paraméterű normális eloszlású, akkor az (1) ponthoz hasonlóan kapjuk, hogy $D^2(\xi)$ létezik, és

$$D^2(\xi) = D^2(\sigma\xi + m) = \sigma^2.$$

9.25. FELADAT. Egy gyár izzókat készít. Ezek élettartama normális eloszlású valószínűségi változó, 1170 óra várható értékkel és 100 óra szórással. A gyár az izzókra garanciát vállal. Hány órás működésre szóljon a garancia, ha a gyár legfeljebb 5% garanciaigényt kíván kielégíteni?

MEGOLDÁS. Ha t órára vállalnak garanciát, akkor a feladat szerint

$$P(\xi < t) \le 0{,}05$$
$$F_\xi(t) \le 0{,}05$$

$$\Phi\left(\frac{t-1170}{100}\right) \leq 0{,}05$$
$$1-\Phi\left(\frac{1170-t}{100}\right) \leq 0{,}05$$
$$0{,}95 \leq \Phi\left(\frac{1170-t}{100}\right).$$

Ebből Φ kölcsönösen egyértelműsége és $\Phi(1{,}64) \approx 0{,}95$ alapján

$$1{,}64 \leq \frac{1170-t}{100}$$
$$t \leq 1006.$$

Tehát legfeljebb 1006 órára szóljon a garancia.

10. Többdimenziós eloszlások

A gyakorlatban sok olyan esettel találkozhatunk, amikor több valószínűségi változó együttes viselkedését kell figyelembe venni. Azonban a valószínűségi változók külön–külön vett eloszlása ezt nem határozza meg. Ezért vezetjük be az együttes eloszlásfüggvény fogalmát.

Ehhez a fejezethez tartozó fogalmakkal és néhány tétellel – bizonyítás nélkül – már találkoztunk a 7. fejezetben. Ezeket az áttekinthetőség kedvéért itt ismét leírjuk általánosított formában.

Együttes eloszlásfüggvény

10.1. Definíció. Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező valószínűségi változói.

(1) A $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ vektort n-dimenziós **valószínűségi vektorváltozónak** nevezzük.

(2) A $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók **együttes eloszlásfüggvényén**, illetve a $\vec{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó **eloszlásfüggvényén** az

$$F_{\vec{\xi}} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \quad F_{\vec{\xi}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) := P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n)$$

n-változós valós értékű függvényt értjük.

(3) Az F_{ξ_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ függvényeket a $\vec{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó **perem-eloszlásfüggvényeinek** nevezzük.

10.2. Megjegyzés. (1) Az együttes eloszlásfüggvény definíciójában

$$P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_n < x_n) = P\left(\prod_{i=1}^{n} \{\xi_i < x_i\}\right).$$

(2) $F_{\vec{\xi}}$ helyett szoktak $F_{\xi_1,\ldots,\xi_n}$-et is írni.

10.3. Tétel. *Legyen $\vec{\xi}$ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező n-dimenziós valószínűségi vektorváltozója. Ekkor a perem-eloszlásfüggvényekre fennáll az*

$$F_{\xi_k}(x_k) = \lim_{\substack{x_i \to \infty \\ i \neq k}} F_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n)$$

összefüggés minden $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *és* $x_k \in \mathbf{R}$ *esetén.*

BIZONYÍTÁS. Mivel $\{\xi_i < \infty\}$ biztos esemény, ezért

$$\{\xi_k < x_k\} \prod_{i \neq k} \{\xi_i < \infty\} = \{\xi_k < x_k\}.$$

Így a valószínűség folytonossága miatt

$$\lim_{\substack{x_i \to \infty \\ i \neq k}} F_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) = P\left(\{\xi_k < x_k\} \prod_{i \neq k} \{\xi_i < \infty\}\right) = P(\xi_k < x_k) = F_{\xi_k}(x_k).$$

10.4. TÉTEL. *Az* $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvénye valamely* n*-dimenziós* $\vec{\xi}$ *valószínűségi vektorváltozónak, ha egyszerre teljesülnek a következő tulajdonságok.*

(1) F *minden változójában monoton növekedő,*

(2) $\lim\limits_{x_1, \ldots, x_n \to \infty} F(x_1, \ldots, x_n) = 1,$

(3) $\lim\limits_{x_i \to -\infty} F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ *minden* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *esetén,*

(4) F *minden változójában balról folytonos,*

(5) *minden* $a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n$ *esetén*

$$\sum (-1)^{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i} F(c_1, c_2, \ldots, c_n) \geq 0$$

teljesül, ahol az összegzés a 0 *és* 1 *számokból álló összes lehetséges* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ *véges sorozatra kiterjed, továbbá*

$$c_i := \begin{cases} a_i, & \text{ha } \varepsilon_i = 1, \\ b_i, & \text{ha } \varepsilon_i = 0. \end{cases}$$

Speciálisan, ha n=2, akkor

$$F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2) \geq 0.$$

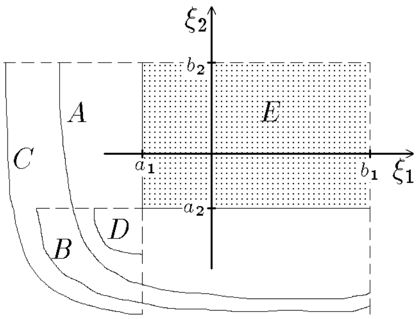
BIZONYÍTÁS. (Lásd [6] 139. oldal.) Az (1)–(4) tulajdonságok szükségessége következik a 6.6. Tételből. Az (5) szükségességét csak $n = 2$ esetén látjuk be. Ehhez azt fogjuk megmutatni, hogy

$$P(a_1 \leq \xi_1 < b_1, a_2 \leq \xi_2 < b_2) = F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2),$$

ami valóban nem lehet negatív. A bizonyításhoz definiáljuk az

$$
\begin{aligned}
A &:= \{\xi_1 < b_1\}\{\xi_2 < b_2\}, \\
B &:= \{\xi_1 < b_1\}\{\xi_2 < a_2\}, \\
C &:= \{\xi_1 < a_1\}\{\xi_2 < b_2\}, \\
D &:= \{\xi_1 < a_1\}\{\xi_2 < a_2\}, \\
E &:= \{a_1 \le \xi_1 < b_1\}\{a_2 \le \xi_2 < b_2\}
\end{aligned}
$$

halmazokat. (Lásd 14. ábra.)



14. ábra

Ekkor $A = E + B + (C - D)$, mely diszjunkt felbontás, így

$$P(A) = P(E) + P(B) + P(C - D).$$

Ebből $D \subseteq C$ alapján

$$P(E) = P(A) - P(B) - P(C) + P(D)$$

következik, ami ekvivalens az állítással. Tetszőleges n esetén be lehet bizonyítani, hogy

$$P(a_1 \le \xi_1 < b_1, \ldots, a_n \le \xi_n < b_n) = \sum (-1)^{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i} F(c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

teljesül, amiből következik az állítás. (Tetszőleges $n \in \mathbf{Z}^+$ esetén a bizonyítást lásd [4] 48. oldal.)

Megfordítva, most teljesüljönek az (1)–(5) tulajdonságok. Ekkor legyen $\Omega := \mathbf{R}^n$ és $\mathcal{A} := \mathcal{B}^n$, továbbá

$$P\Big([a_1, b_1) \times \cdots \times [a_n, b_n)\Big) := \sum (-1)^{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i} F(c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Ekkor belátható, hogy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, továbbá hogy a

$$\xi_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \quad \xi_i(x_1, \ldots, x_n) := x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye F. (Lásd [5] 55. oldal.)

Együttes sűrűségfüggvény

10.5. DEFINÍCIÓ. Az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozóját **abszolút folytonosnak**, illetve a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók együttes eloszlását abszolút folytonosnak nevezzük, ha létezik olyan $f_{\vec{\xi}} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ nemnegatív függvény, melyre

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\vec{\xi}}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \cdots dt_n$$

teljesül minden $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ esetén. Ekkor az $f_{\vec{\xi}}$ függvényt a $\vec{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó **sűrűségfüggvényének**, illetve a $\xi_1, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók **együttes sűrűségfüggvényének** nevezzük.

Az f_{ξ_i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ függvényeket a $\vec{\xi}$ valószínűségi vektorváltozó **perem-sűrűségfüggvényeinek** nevezzük.

10.6. TÉTEL. *Legyen $\vec{\xi}$ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy n-dimenziós abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozója. Ekkor ξ_i valószínűségi változó is abszolút folytonos minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén, vagyis léteznek a perem-sűrűségfüggvények, továbbá fennáll az*

$$f_{\xi_k}(x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_{k-1} dx_{k+1} \cdots dx_n$$

összefüggés minden $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ és $x_k \in \mathbf{R}$ esetén.

BIZONYÍTÁS. A valószínűség folytonossága miatt

$$F_{\xi_k}(x_k) = P(\xi_k < x_k) = P(\xi_k < x_k, \Omega) = P\left(\{\xi_k < x_k\} \prod_{i \neq k} \{\xi_i < \infty\} \right) =$$

$$= \lim_{\substack{x_i \to \infty \\ i \neq k}} P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n) = \lim_{\substack{x_i \to \infty \\ i \neq k}} F_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) =$$

$$= \lim_{\substack{x_i \to \infty \\ i \neq k}} \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\vec{\xi}}(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \cdots dt_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_k} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_{k-1} dx_{k+1} \cdots dx_n \right) dt,$$

ami a ξ_k sűrűségfüggvényének definíciója szerint pontosan az állítással ekvivalens.

10.7. MEGJEGYZÉS. Hasonlóan az egydimenziós esethez, itt is teljesül minden $B \in \mathcal{B}^n$ esetén, hogy

$$P\left(\vec{\xi} \in B\right) = \int \cdots \int_B f_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

10.8. TÉTEL. *Az $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ nemnegatív integrálható függvény akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye valamely n-dimenziós $\vec{\xi}$ valószínűségi vektorváltozónak, ha*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1.$$

BIZONYÍTÁS. A feltétel szükségessége a 10.6. Tételből következik, hiszen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x_1) dx_1 = 1.$$

Megfordítva, ha f rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, akkor legyen $\Omega := \mathbf{R}^n$ továbbá $\mathcal{A} := \mathcal{B}^n$, valamint

$$P : \mathcal{A} \to \mathbf{R}, \quad P(B) = \int \cdots \int_B f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Ekkor könnyen belátható, hogy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, továbbá hogy a

$$\xi_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \quad \xi_i(x_1, \ldots, x_n) := x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye f.

Feltételes sűrűségfüggvény

10.9. Definíció. Legyen ξ és η az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező valószínűségi változói, és $H := \{y : y \in \mathbf{R} \text{ és } f_\eta(y) \neq 0\}$. Ha ξ és η együttes eloszlása abszolút folytonos, akkor az

$$f : \mathbf{R} \times H \to \mathbf{R}, \qquad f(x,y) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)}$$

függvényt a ξ valószínűségi változó $\{\eta = y\}$ feltételre vonatkozó **feltételes sűrűségfüggvényének** nevezzük, továbbá az előbbi hányadost $f_{\xi|\eta}(x|y)$ módon jelöljük.

10.10. Tétel. **(Teljes valószínűség tétele folytonos esetre.)** *Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben a ξ és η valószínűségi változók, és ξ-nek létezik az $\{\eta = y\}$ feltételre vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye egy nullmértékű halmazt kivéve minden $y \in \mathbf{R}$ esetén, akkor*

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi|\eta}(x|y) f_\eta(y)\,dy$$

teljesül minden $x \in \mathbf{R}$ esetén.

Bizonyítás. A feltételes sűrűségfüggvény definíciója és a 10.6. Tétel alapján

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi|\eta}(x|y) f_\eta(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)} f_\eta(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dy = f_\xi(x).$$

10.11. Tétel. **(Bayes tétele folytonos esetre.)** *Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben a ξ és η valószínűségi változók, és ξ-nek majdnem mindenütt létezik az $\{\eta = y\}$ $(y \in \mathbf{R})$ feltételre vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye, továbbá egy $x \in \mathbf{R}$ esetén $f_\xi(x) \neq 0$, akkor η-nak is létezik a $\{\xi = x\}$ feltételre vonatkozó feltételes sűrűségfüggvénye, és*

$$f_{\eta|\xi}(y|x) = \frac{f_{\xi|\eta}(x|y) f_\eta(y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi|\eta}(x|y) f_\eta(y)\,dy}.$$

BIZONYÍTÁS. Az $f_{\eta|\xi}(y|x)$ létezése a definícióból következik, így elég az egyenlőséget bizonyítani. Mivel definíció szerint

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = f_{\xi|\eta}(x|y)f_\eta(y) \quad \text{és} \quad f_{\xi,\eta}(x,y) = f_{\eta|\xi}(y|x)f_\xi(x),$$

így

$$f_{\eta|\xi}(y|x)f_\xi(x) = f_{\xi|\eta}(x|y)f_\eta(y)$$

adódik. Ebből azt kapjuk, hogy

$$f_{\eta|\xi}(y|x) = \frac{f_{\xi|\eta}(x|y)f_\eta(y)}{f_\xi(x)},$$

melybe az előző tételből $f_\xi(x)$-et beírva kapjuk az állítást.

Valószínűségi változók függetlensége

10.12. DEFINÍCIÓ. Egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ valószínűségi vektorváltozó komponenseit **teljesen függetleneknek**, vagy röviden **függetleneknek** nevezzük, ha

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdots F_{\xi_n}(x_n)$$

teljesül minden $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ esetén. A $\xi_1, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változók **páronként függetlenek**, ha közülük bármely kettő független.

10.13. MEGJEGYZÉS. Ez a definíció ekvivalens azzal, hogy minden $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$ esetén

$$P(\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1) \cdots P(\xi_n \in B_n)$$

teljesül. (Lásd [4] 84. oldal és 90. oldal.)

10.14. TÉTEL. *Legyen $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy abszolút folytonos valószínűségi vektorváltozója. Ekkor $\vec{\xi}$ komponensei akkor és csak akkor függetlenek, ha*

$$f_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdots f_{\xi_n}(x_n)$$

teljesül egy nullmértékű halmazt kivéve, minden $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ pontban.

BIZONYÍTÁS. Lásd [4] 95. oldal.

10.15. TÉTEL. *Legyenek az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mező* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *valószínűségi változói függetlenek. Ha* $g_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *Borel-mérhető függvények, akkor a* $g_1(\xi_1), g_2(\xi_2), \ldots, g_n(\xi_n)$ *valószínűségi változók is függetlenek.*

BIZONYÍTÁS. Először is megjegyezzük, hogy a $g_i(\xi_i)$ függvények az 5.12. Tétel alapján valóban valószínűségi változók.

Tekintsük a valós számok halmazának $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tetszőlegesen rögzített Borel-halmazait. Ekkor az 5.9. Tétel alapján $g_i^{-1}(B_i)$ is Borel-halmaz, minden $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén. Így

$$\{g_i(\xi_i) \in B_i\} = \left\{\xi_i \in g_i^{-1}(B_i)\right\}$$

miatt és a 10.13. Megjegyzés alapján

$$P\left(\prod_{i=1}^{n} \{g_i(\xi_i) \in B_i\}\right) = P\left(\prod_{i=1}^{n} \left\{\xi_i \in g_i^{-1}(B_i)\right\}\right) =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} P\Big(\xi_i \in g_i^{-1}(B_i)\Big) = \prod_{i=1}^{n} P\Big(g_i(\xi_i) \in B_i\Big)$$

teljesül, amiből következik az állítás.

10.16. MEGJEGYZÉS. Ha $g_1(x) = x$ és $g_2(x) = c$, ahol $c \in \mathbf{R}$ egy konstans, továbbá ξ és η független valószínűségi változók, akkor az előző tétel értelmében $g_1(\xi) = \xi$ független a $g_2(\eta) = c$ valószínűségi változótól. Vagyis egy konstans minden valószínűségi változótól független.

10.17. TÉTEL. *Legyenek az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mező* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *valószínűségi változói függetlenek. Ha* $g : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ *Borel-mérhető függvény, ahol* $k < n$, *akkor a* $g(\xi_1, \ldots, \xi_k), \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n$ *valószínűségi változók is függetlenek.*

BIZONYÍTÁS. Az előző tétel bizonyításához hasonlóan járhatunk el.

11. A nagy számok törvényei

11.1. Tétel. **(Markov-egyenlőtlenség.)** *Ha ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy várható értékkel rendelkező nemnegatív valószínűségi változója, akkor minden $c \in \mathbf{R}^+$ esetén*

$$P(\xi \geq c) \leq \frac{E(\xi)}{c}.$$

Bizonyítás. (1) Legyen ξ diszkrét, és $R_\xi := \{x_1, x_2, \ldots\}$, ahol teljesül, hogy $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots$, továbbá $p_i := P(\xi = x_i)$. Ha $c \leq x_1$, akkor $P(\xi \geq c) = 1 = \sum\limits_i p_i$ teljesül, így

$$E(\xi) = \sum_i x_i p_i \geq \sum_i c p_i = c \sum_i p_i = cP(\xi \geq c)$$

miatt igaz a tétel. Ha létezik olyan i_0 index, melyre $x_{i_0} < c \leq x_{i_0+1}$ teljesül, akkor

$$E(\xi) = \sum_i x_i p_i \geq \sum_{i > i_0} x_i p_i \geq \sum_{i > i_0} c p_i = c \sum_{i > i_0} p_i = cP(\xi \geq c),$$

így ekkor is igaz a tétel. Végül, ha minden $\omega \in \Omega$ esetén $c > \xi(\omega)$, akkor

$$P(\xi \geq c) = 0 \leq \frac{E(\xi)}{c},$$

hiszen nemnegatív ξ valószínűségi változó esetén $E(\xi) \geq 0$ teljesül.

(2) Ha ξ abszolút folytonos valószínűségi változó, akkor $x < 0$ esetén $F_\xi(x) = 0$, így $f_\xi(x) = 0$ egy nullmértékű halmazt kivéve. Ezért

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx = \int_0^{\infty} x f_\xi(x) dx \geq \int_c^{\infty} x f_\xi(x) dx \geq \int_c^{\infty} c f_\xi(x) dx =$$

$$= c \int_c^{\infty} f_\xi(x) dx = cP(\xi \geq c),$$

ami az állítást igazolja.

11.2. TÉTEL. **(Csebisev-egyenlőtlenség.)** *Ha ξ az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező egy szórással rendelkező valószínűségi változója, akkor minden $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ esetén*

$$P\Big(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $c := \varepsilon^2$ és $\eta := (\xi - E(\xi))^2$. Ekkor c-re és η-ra teljesülnek a Markov-egyenlőtlenség feltételei. Így

$$P\Big(\left|\xi - E(\xi)\right| \geq \varepsilon\Big) = P\left(\eta \geq \varepsilon^2\right) \leq \frac{E(\eta)}{\varepsilon^2} = \frac{D^2(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

11.3. FELADAT. Egy gyárban apró szögeket készítenek, melyeket egy automata gép csomagol. Egy csomagban a szögek számának várható értéke 1000, szórása 10. A szögek számának eloszlását nem ismerjük. Legfeljebb mekkora a valószínűsége annak, hogy egy csomagban a szögek száma a várható értéktől 20-al vagy annál többel tér el?

MEGOLDÁS. A Csebisev-egyenlőtlenség alapján

$$P(|\xi - 1000| \geq 20) \leq \frac{10^2}{20^2} = \frac{1}{4},$$

ahol ξ a szögek számát jelöli.

11.4. DEFINÍCIÓ. Legyenek $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ valószínűségi változók. Ha minden $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ esetén

$$\lim_{n \to \infty} P\Big(\left|\xi_n - \xi\right| \geq \varepsilon\Big) = 0$$

teljesül, akkor azt mondjuk, hogy ξ_n **sztochasztikusan konvergál** ξ-hez.

11.5. TÉTEL. **(Bernoulli-féle nagy számok törvénye.)** *Legyen adott egy Bernoulli-féle valószínűségi mező az $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$ eseménytérrel, továbbá $p := P(\{\omega_1\})$ és $q := 1 - p$. Ha ϱ_n/n az $\{\omega_1\}$ relatív gyakorisága, akkor minden $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ esetén*

$$P\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}, \tag{11.1}$$

amiből következik, hogy a relatív gyakoriság sztochasztikusan konvergál a valószínűséghez.

BIZONYÍTÁS. Legyen $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ adott. Ekkor a Csebisev-egyenlőtlenség feltételeit $n\varepsilon$ és ϱ_n teljesítik, így

$$P\Big(|\varrho_n - E(\varrho_n)| \geq n\varepsilon\Big) \leq \frac{D^2(\varrho_n)}{n^2\varepsilon^2}$$

teljesül. Másrészt a 8.6. Megjegyzés (1) pontjából tudjuk, hogy ϱ_n binomiális eloszlású, így $E(\varrho_n) = np$ és $D^2(\varrho_n) = npq$. Ezeket beírva

$$0 \leq P\Big(|\varrho_n - np| \geq n\varepsilon\Big) = P\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{npq}{n^2\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

adódik. Ebből $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0$ miatt következik, hogy a relatív gyakoriság sztochasztikusan konvergál a valószínűséghez.

11.6. MEGJEGYZÉS. (1) A Bernoulli-féle nagy számok törvényében akkor is tudunk felső becslést adni, ha p értéke nem ismert. Ugyanis az mindig teljesül, hogy $pq \leq 1/4$, így

$$P\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

(2) A feladatokban gyakran használható a következő becslés, ami ekvivalens a (11.1) formulával:

$$P\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \quad \left(\geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2}\right).$$

(3) A Bernoulli-féle nagy számok törvényének jelentősége, hogy a bevezetésben leírt tapasztalatot fejezi ki. Vagyis a valószínűségszámításban mint a véletlen tömegjelenségeket leíró modellben, a valószínűség és a relatív gyakoriság hasonló kapcsolatban van, mint amit a gyakorlati axiómánk feltételez.

Vigyázat, a tétel sztohasztikus konvergenciát állít! Tehát nem arról van szó, hogy a relatív gyakoriság konvergál a valószínűséghez, hanem hogy a ennek a két számnak a távolsága egy tetszőleges pozitív értéknél nagyobbat nullához konvergáló valószínűséggel vehet fel.

11.7. FELADAT. Hány dobást kell végeznünk egy szabályos kockával, hogy a 6-os dobás valószínűségét a 6-os relatív gyakorisága legalább 0,9 valószínűséggel 0,01-nél kisebb hibával megközelítse? Oldjuk meg a feladatot akkor is, ha a kocka cinkelt, azaz a 6-os dobásának a valószínűségét nem ismerjük.

MEGOLDÁS. Szabályos kocka esetén a 6-os dobásának valószínűsége $p = 1/6$. Így a Bernoulli-féle nagy számok törvénye és a 11.6. Megjegyzés (2) pontja alapján

$$P\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{n \cdot 0{,}01^2} \geq 0{,}9$$

teljesül. Ebből következően $n \geq 13\,889$, azaz legalább 13 889-szer kell dobni.

Ha a kocka cinkelt, akkor használjuk a $pq \leq 1/4$ egyenlőtlenséget. Így

$$P\left(\left|\frac{\varrho_n}{n} - p\right| < 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{1}{4n \cdot 0{,}01^2} \geq 0{,}9,$$

melyből $n \geq 25\,000$ adódik.

11.8. TÉTEL. **(A nagy számok gyenge törvénye.)** *Legyen az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőben* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *szórással rendelkező azonos eloszlású és páronként független valószínűségi változók, továbbá*

$$S_n := \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n.$$

Ekkor $m := E(\xi_i)$ *és* $\sigma := D(\xi)$ *jelöléssel minden* $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ *esetén*

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

teljesül, melyből következik, hogy S_n/n *sztochasztikusan konvergál* m*-hez.*

BIZONYÍTÁS. Az m és σ definíciója korrekt az azonos eloszlás miatt. Az S_n/n valószínűségi változóra teljesülnek a Csebisev-egyenlőtlenség feltételei, ezért

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D^2\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

teljesül. Másrészt

$$E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(\xi_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n m = \frac{1}{n}nm = m$$

és a páronkénti függetlenség miatt

$$D^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}D^2\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D^2(\xi_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n},$$

melyből kapjuk a tételben szereplő egyenlőtlenséget. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0$, ezért ebből következik, hogy S_n/n sztochasztikusan konvergál m-hez.

11.9. MEGJEGYZÉS. (1) Ennek a tételnek speciális eseteként kapjuk a Bernoulli-féle nagy számok törvényét, ugyanis a Bernoulli-féle valószínűségi mezőben $m = p$ és $\sigma^2 = pq$.

(2) A tételben a szórás létezése helyett elég csak a várható érték létezését feltételezni, melyet először A. Hincsin bizonyított.

A hipergeometrikus eloszlás bizonyos feltételek mellett konvergál a binomiális eloszláshoz. A binomiális eloszlás a Poisson-eloszláshoz konvergál. Az úgynevezett centrális határeloszlási tételek is ilyen jellegű állítások, de speciálisan a normális eloszlásra vonatkoznak. Ezek a tételek rávilágítanak a normális eloszlás központi jelentőségére, továbbá arra, hogy miért lehet bizonyos feltételek esetén egy ismeretlen eloszlást normális eloszlással közelíteni. Ezen állítások közül egyet mutatunk be, amely a legegyszerűbbek közé tartozik, ennek ellenére nem fogjuk bizonyítani, ugyanis ez a karakterisztikus függvények elméletére támaszkodik, mely túlmutat e jegyzet keretein. (A bizonyítást lásd például [2] 148. oldal.)

11.10. TÉTEL. **(Centrális határeloszlási tétel.)** *Ha az* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőben* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *nemnulla szórással rendelkező, azonos eloszlású és független valószínűségi változók, továbbá*

$$S_n := \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n,$$

akkor az S_n *standardizáltjának határeloszlása standard normális, vagyis*

$$\lim_{n\to\infty} F_{\widetilde{S}_n}(x) = \Phi(x).$$

11.11. MEGJEGYZÉS. (1) Az azonos eloszlás miatt az m és σ definíciója korrekt.

(2) Ha a ξ_i valószínűségi változók közös eloszlása a p paraméterű karakterisztikus eloszlás, azaz S_n minden n-re n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, akkor a centrális határeloszlási tételből speciálisan a Moivre-Laplace-tételt kapjuk. Ezek szerint tehát

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < x\right) = \Phi(x). \qquad (11.2)$$

(3) A Moivre-Laplace-tétel $p = 1/2$ esetben kísérletileg is igazolható az úgynevezett Galton-deszkával. (Lásd [5] 143. oldal.)

(4) A (11.2) formula ekvivalens azzal, hogy

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n < x) = \Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Azaz nagy n esetén a binomiális eloszlást jól közelíti a normális eloszlás. Például, ha $n = 1000$ lövést adunk le egy célra, és minden lövés egymástól függetlenül $p = 0{,}11$ valószínűséggel talál, akkor mi annak a valószínűsége, hogy 100-nál kevesebbszer találunk célba?

A találatok számát jelöljük ξ-vel, mely binomiális eloszlású. Ebből következően

$$P(\xi < 100) = \sum_{k=0}^{99} \binom{1000}{k} \cdot 0{,}11^k \cdot 0{,}89^{1000-k},$$

amit kiszámolni elég nehéz lenne. Viszont alkalmazhatjuk a normális eloszlással való közelítést. Eszerint

$$P(\xi < 100) \approx \Phi\left(\frac{100 - 110}{\sqrt{110 \cdot 0{,}89}}\right) \approx \Phi(-1{,}01) = 1 - \Phi(1{,}01) \approx 0{,}1562.$$

Irodalom

[1] Daróczy Zoltán, *Mérték és integrál*, Jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1984.

[2] Fazekas István, *Bevezetés a valószínűségszámításba*, Jegyzet, Eger,1993.

[3] Halmos, P. R., *Mértékelmélet*, Gondolat, Budapest, 1984.

[4] Mogyoródi József, Somogyi Árpád, *Valószínűségszámítás I.*, Jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.

[5] Rényi Alfréd, *Valószínűségszámítás*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1954, 1966.

[6] Vincze Endre, *Valószínűségszámítás (Műszaki matematika V. kötet)*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1972.

Jelölések

$A \subseteq B$	A részhalmaza B–nek; A maga után vonja B–t
$A \subset B$	$A \subseteq B$ és $A \neq B$
$A + B = A \cup B$	A és B halmazok egyesítése; A vagy B következik be
$AB = A \cap B$	A és B halmazok metszete; A és B is bekövetkezik
$\overline{A}$	A komplementere; A nem következik be
$A - B = A \setminus B = A\overline{B}$	A és B halmazok különbsége; A bekövetkezik, de B nem
$\emptyset$	üreshalmaz; lehetetlen esemény
Ω	alaphalmaz; eseménytér; biztos esemény
$\mathcal{A}$	az események halmaza; σ-algebra
$\sigma(H)$	a H halmazrendszer által generált σ-algebra
$\mathbf{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbf{R}^+$	a pozitív valós számok halmaza
$\mathbf{R}^-$	a negatív valós számok halmaza
$\mathbf{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbf{Z}^+$	a pozitív egész számok halmaza

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$	valószínűségi mező
$\mathcal{B}$	a Borel-halmazok halmaza
$\mathcal{B}_n$	az n-dimenziós Borel-halmazok halmaza
$P(A)$	az A esemény valószínűsége
$P(A \mid B)$	A-nak B-re vonatkozó feltételes valószínűsége
$f : A \to B$	az f függvény, melynek értelmezési tartománya A és értékkészlete részhalmaza B-nek
R_f	az f függvény értékkészlete
$F_\xi, F_{\vec{\xi}}$	a ξ illetve $\vec{\xi}$ eloszlásfüggvénye
$F_{\xi,\eta}$	ξ és η együttes eloszlásfüggvénye
$f_\xi, f_{\vec{\xi}}$	a ξ illetve $\vec{\xi}$ sűrűségfüggvénye
$f_{\xi,\eta}$	ξ és η együttes sűrűségfüggvénye
$f_{\xi\|\eta}(x\|y)$	feltételes sűrűségfüggvény
$f(x_0+0), \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$	f-nek x_0-beli jobboldali határértéke
$f(x_0-0), \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$	f-nek x_0-beli baloldali határértéke
$\sum\limits_1^\infty a_i$	valós számsor
$\sum\limits_{i=1}^\infty a_i$	sorösszeg

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$	az a halmaz, melynek minden eleme valamelyik A_i-nek is eleme
$\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$	az a halmaz, melynek minden eleme minden A_i-nek is eleme
$E(\xi)$	ξ várható értéke
$D(\xi), D^2(\xi)$	a ξ szórása illetve szórásnégyzete
$\mathrm{cov}(\xi, \eta)$	kovariancia
$\mathrm{corr}(\xi, \eta)$	korrelációs együttható
$\widetilde{\xi}$	a ξ standardizáltja
φ, Φ	standard normális sűrűség és eloszlásfüggvény
$I(A)$	az A esemény indikátorváltozója