SZTRIK JÁNOS

RAKTÁROZÁSI ÉS KISZOLGÁLÁSI PROBLÉMÁK MATEMATIKAI MODELLEZÉSE

mobiDIÁK könyvtár

Sztrik János

RAKTÁROZÁSI ÉS KISZOLGÁLÁSI

PROBLÉMÁK

MATEMATIKAI MODELLEZÉSE

mobiDIÁK könyvtár

SOROZATSZERKESZTŐ

Fazekas István

SZTRIK JÁNOS
egyetemi tanár
Debreceni Egyetem

RAKTÁROZÁSI ÉS KISZOLGÁLÁSI PROBLÉMÁK MATEMATIKAI MODELLEZÉSE

Egyetemi jegyzet

Első kiadás

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem

Lektor

Dr. Fazekas Gábor, egyetemi docens
Debreceni Egyetem

mobiDIÁK könyvtár
Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
4010 Debrecen, Pf. 12
http://mobidiak.inf.unideb.hu/

A mű „A mobiDIÁK önszervező mobil portál” (IKTA, OMFB-00373/2003)) projekt keretében készült.

Tartalomjegyzék

Előszó

Az operációkutatás az alkalmazott matematika egyik legdinamikusabban fejlődő ága. A gyakorlatban felmerülő problémák újabb és újabb megoldási módszerek kidolgozását igénylik. Jelen jegyzetben a készletgazdálkodásra és a sorbanállási problémákra koncentrálva a legfontosabbnak itélt eljárásokat és megközelítéseket tárgyaljuk. A 2 fejezetbe összegyűjtött modellek nem igényelnek különösebb matematikai előképzettséget. Próbálunk betekintést nyújtani a modellalkotásba, a képletek kiszámításába és az eredmények kiértékelésébe.
A tárgyalt anyag a **Az operációkutatás elemei** című, a Kossuth Egyetemi Kiadó által több ízben megjelentetett egyetemi jegyzet III és IV fejezete kisebb javításokkal és módosításokkal. A különböző sorbanállási rendszerek jellemzőit könnyen ki tudjuk számítani az erre a célra írt Java appletek segítségével, melyek a **Gyakorlati sorbanállási elmélet** elektronikus oktatási segédlet kisebb, de nagyon fontos részét alkotják és megtalálhatók a szerző honlapján. Hasonlóan Java appletek segítségével határozhatjuk meg a raktározási problémáknál felmerülő optimális értékeket is.
Jelen jegyzetet hatékonyan használhatják matematikus, alkalmazott matematikus, programozó, programtervező matematikus, informatika tanárszakos, valamint közgazdász hallgatók, akiket a gyakorlatban előforduló ilyen irányú problémák matematikai modellezése érdekel. A könnyebb érthetőség végett igyekeztünk példákkal szemléltetni a tárgyalt modelleket és feladatokat gyűjtöttünk össze az egyéni begyakorlás segítésére. A Java appletek használatával gyorsan ki tudjuk számítani a különböző numerikus értékeket.

A beépített Java appletekhez legalább Java 1.5-ös verzióra van szükség és a problémamentes használathoz legalább 6-os verziójú Adobe Acrobat Reader ajánlott. Szükség van továbbá Java-appletek futtatására alkalmas Internet böngészőre is (pl. Microsoft Internet Explorer 5.5).

Köszönetet mondok Dr. Fazekas Gábor egyetemi docensnek hasznos észrevételeiért és tanácsaiért, aki az említett nyomtatott jegyzetet lektorálta. A Latex szerkesztésben sok segítséket kaptam Kósa Márk, Roszik János és Balázsfalvi Gábor kollegáktól, akiknek ezúton is szeretném kifejezni hálámat.

Az előforduló hibákra vonatkozó észrevételeket és mindenfajta javító szándékú megjegyzést örömmel veszek az alábbi címen:

`jsztrik@inf.unideb.hu`
`http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/index.html`

Debrecen, 2005.

A Szerző

1 Készletgazdálkodási modellek

1.1 Bevezetés

Készleteket rendszerint azért tartunk, hogy valamely szükségletet, igényt kielégítsünk. A szóban forgó anyag, cikk iránti igény, kereslet a készlet fogyását idézheti elő. Gondoskodnunk kell tehát időben a raktárkészlet pótlásáról, feltöltéséről. A megrendelés feladásától a megrendelt mennyiség raktárba érkezéséig eltelt időt *utánpótlási időnek* vagy röviden *pótlási időnek* nevezik. Az utánpótlási idő alatt is történhet kivétel a raktárból, a megrendelési időpontokat tehát úgy kell megválasztani, hogy a raktárkészlet az utánpótlási idő alatt is fedezze a szükségletet.

Az árubeérkezés és az árukivét, más szóval a beáramlás és a kiáramlás együttesen meghatározzák a raktárkészlet időbeli alakulását, amelyet egy koordináta rendszerben is ábrázolhatunk.

A vízszintes tengelyen az idő t, a függőleges tengelyen pedig a raktárkészlet $y(t)$ szerepel (abban az egységben kifejezve, amely a vizsgált árucikk természetéből következik).

A készlettartás, a készlet pótlása, a beszerzési lehetőségek mérlegelése idő- és költségigényes, de ugyanúgy gazdasági konzekvenciái vannak az igények ki nem elégítésének is. A készletgazdálkodással kapcsolatos a költségek jelentős szerepet játszanak a készletmodellekben.

Három alapvető csoportba oszthatók

a, Az utánpótlással, a raktárfeltöltéssel kapcsolatos költségek, ezek az ún. *beszerzési*, illetve *előállítási költségek*,

b, A raktár fenntartásának a költsége, a raktárkészletben lekötött eszközök költsége, kamat, eszközlekötési járulék, a készlet elévülésével, romlásával együttjáró veszteségek stb. melyeket gyűjtőnéven *raktározási költségnek* nevezünk,

c, A raktárhiány okozta termeléskiesés, pótlólagos beszerzéssel együttjáró többletköltség, vagy a hiány miatti nyereségkiesés stb. gyűjtőnéven a *hiányköltség.*

E költségek számszerű nagyságának, függvényalakjának a meghatározása nem egyszerű feladat, tény azonban, hogy e meggondolások hiányában optimális készletezési eljárásról csak nagyon kivételes és leszűkített esetekben beszélhetünk. A figyelembe veendő költségeket az is meghatározza, hogy milyen gazdasági célt, gazdasági eredményt kívánunk megvalósítani a készletezéssel. Előfordulhat pl., hogy mindenképpen 100%-os szükségletkielégítést kell elérnünk. Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben nem kell foglalkoznunk sem a hiányköltség számszerű nagyságával, sem azzal, hogy a raktárkészlet időbeli alakulásával ez milyen függvényszerű kapcsolatban áll. Bár meggondolásainkban a hiányköltség ekkor látszólag nem szerepel, mégis látni fogjuk, hogy bizonyos modellekben valójában nagyságrendileg nagyobb minden más tekintetbe vett költségfajtánál .

A beszerzési költségek két egyszerű típusa a tétel *nagyságától független*, és a tétel *nagyságával egyenes arányban* lévő költség. Az előbbire példa a tétel átvizsgálási költsége, sorozatgyártásnál a sorozat beindítási költsége stb. Az utóbbi lehet pl. egy termék anyagköltsége vagy az áru egy egységének beszerzési ára. A raktározási költséget többnyire a készlet raktáron eltöltött idejével arányos költségként definiáljuk, mégpedig a készlet egységnyi mennyisége vagy egységnyi értéke időegységre eső költségét adjuk meg. Ekkor egy $[0, T]$ időintervallum (pl. negyedév, félév) raktározási költségét úgy számoljuk ki, hogy a raktárkészlet (illetve annak értéke) időbeli alakulását reprezentáló görbe és az időtengely $[0, T]$ intervalluma által meghatározott területet kiszámítjuk és megszorozzuk az idő és áruegységre (idő és értékegységre) eső raktározási költséggel. Ez a következőképpen látható be:

A vizsgált $[0, T]$ időtartam alatti raktározási időt megkapjuk, ha a készlet (illetve értéke) minden egységéről megállapítjuk, mennyi ideig tartózkodott a raktárban, azaz megállapítjuk, hogy mennyi idő telt el a raktárba érkezése idő pontjától a T időpontig, illetve a kivét időpontjáig. Ezeket az időtartamokat összegezve megkapjuk az összes raktározási időt. Ennél az eljárásnál azonban célszerűbb a következőképpen okoskodnunk. Osszuk be az időtengelyt egységekre és nézzük meg, hogy mindegyik időegység alatt mennyi áru volt a raktáron. E mennyiségeknek az időegységgel való szorzata megadja az illető időegységre eső raktározási időt, s ezek összege T időpontig a raktározási időt. Ha az időtengely felbontását minden határon túl finomítjuk, s $y(t)$ jelenti a raktárkészlet pillanatnyi nagyságát, akkor a T időszakra eső összes raktározási idő nem más, mint $\int_0^T y(t)dt$, azaz a raktárkészlet görbének az időtengellyel bezárt területe a T időpontig. Hasonlóképpen határozható meg a hiányköltség is, ha ez az egységnyi hiány időegységre eső költségként van megadva. Valójában tehát folytatnunk kellene a raktárkészlet görbét akkor is, midőn a készlet kifogyott, tehát a „hiány görbéjét”, a „túlkereslet görbéjét” kell felvennünk, mégpedig az időtengelyt reprezentáló vízszintes alatt. A készletgörbe negatív ágának az időtengellyel bezárt területe szorozva a hiányköltség idő- és áruegységre eső értékével adja a hiányköltséget.

A raktározás tárgyát képező anyag, cikk iránti kereslet, szükséglet, tehát az *output folyamata*, valamint az elérendő cél — pl. teljes igénykielégítés, csak részleges igénykielégítés — s az utánpótlási, feltöltési lehetőségek, tehát az *input* *folyamata* együttesen határozzák meg a készletáramlás lehetséges alakulásait. A készletáramlás szóba jövő, lehetséges alakulásait a *készletezési modellek* írják le. A készletezési modellek alapján — a kitűzött cél szem előtt tartásával — meghozzuk azokat a döntéseket, amelyek a lehetséges *készletezési politikák*, *készletezési eljárások* (pl. mikor és mennyit rendeljünk) közül azt a készletezési eljárást politikát alakítják ki, melyek a tekintetbe vett körülmények között a célt legjobban megvalósítja. Ezt az eljárást *optimális készletezési* eljárásnak fogjuk nevezni.

A készletezési modellek osztályozási szempontjai igen különbözőek. Egyik alapvető osztályozási elv az, hogy mind a beáramlással, mind a kiáramlással, valamint a költségekkel kapcsolatos minden információ megadható-e előre teljes bizonyossággal, vagy pedig ezek között szerepelnek-e olyanok is, amelyekre csupán statisztikai törvényszerűségek állnak fenn. Az előbbi esetben ugyanis ún. *determinisztikus modellel* van dolgunk, míg az utóbbi esetben az ún. *sztochasztikus modellel*.

A véletlen (sztochasztikus) jelenségekre vonatkozó ismereteink, ítéleteink csupán valószínűségi jellegűek; nagyszámú megfigyelés, kísérleti tapasztalat s a kísérleteknek a matematikai statisztika és a valószínűségszámítás törvényein alapuló értékelése teszi lehetővé törvényszerűségeinek megismerését, feltárását. Valószínűségi ítéleten, következtetésen azt értjük, hogy állításunk nem logikai bizonyossággal, csak valószínűségi biztonsággal, azaz legfeljebb igen nagy valószínűséggel érvényes. Ha például egy véletlen mennyiségről, valószínűségi változóról azt állítjuk, hogy 0.95 valószínűséggel esik 100 és 150 közé, akkor ez azt jelenti, hogy a jelenségre vonatkozó megfigyeléseinket, méréseinket egymástól függetlenül sokszor megismételve, a szóban forgó véletlen mennyiség ezen megfigyelések kb. 95% -ban fog az említett határok közé esni.

Az osztályozás másik szempontja az, hogy az optimális készletezési politika egy vagy több időszakasz egymásutánjára vonatkozik-e. Az egy időszakaszt átfogó modellt *statikus modellnek*, a döntés egymásutánjaira vonatkozó modellt pedig *dinamikus modellnek* nevezzük.

Szokásos osztályozási elv még az is, amely aszerint tesz különbséget az egyes modellek között, hogy az idő, illetve döntési változó (amely rendszerint a raktárkészlettel kapcsolatos) *folytonos* vagy *diszkrét* értéket vesz-e fel. Ilyen értelemben beszélnek *folytonos időparaméterű diszkrét*, *folytonos időparaméterű folytonos* készletmodellekről, illetve *diszkrét időparaméterű folytonos* és *diszkrét időparaméterű diszkrét* modellekről.

Sok más osztályozási elv is ismeretes a szakirodalomban, ilyen pl. a költségtípusok szerinti megkülönböztetés, továbbá a hiány kezelése szerinti különbözőségek. Készlethiány esetén ugyanis két eljárás lehetséges. Az egyiknél a korábbi hiányt pótolják a beérkező készletből, a másiknál a kielégítetlen kereslet elvész, tehát a tervezettnél nagyobb zárókészlettel kell számolni.

A készletezési modellek sok fajtája és típusa alakult ki, már csak a fellépő véletlen törvényszerűségek sokféleségét tekintve is, nem beszélve a gyakorlati élet bonyolult szituációiról, a költségek, célok különbözőségeiről stb. A készletgazdálkodási modell - mint általában minden modell - a sokrétű valóságnak csak néhány jellemzőjét ragadhatja meg, hogy azután matematikai módszerek és logikai következtetések útján olyan mennyiségi összefüggéseket tárjon fel, amelyek elemzése, értékelése alapján a döntésre sor kerül.

A következő részekben néhány alapvető egyszerű statikus és sztochasztikus modellt mutatunk be, melyek segítségével megadunk néhány optimális eljárást.

1.2 Determinisztikus modellek

1.2.1 Optimális tételnagyság (sorozatnagyság) modellje

Valamely árucikkből, anyagból egy T időszak alatt összesen R egységre van szükség, mégpedig időegységenként mindig r egységre. A kivét, a raktárból való kiáramlás tehát időben egyenletes, hiány nem engedett meg.
A következő költségeket vesszük figyelembe:

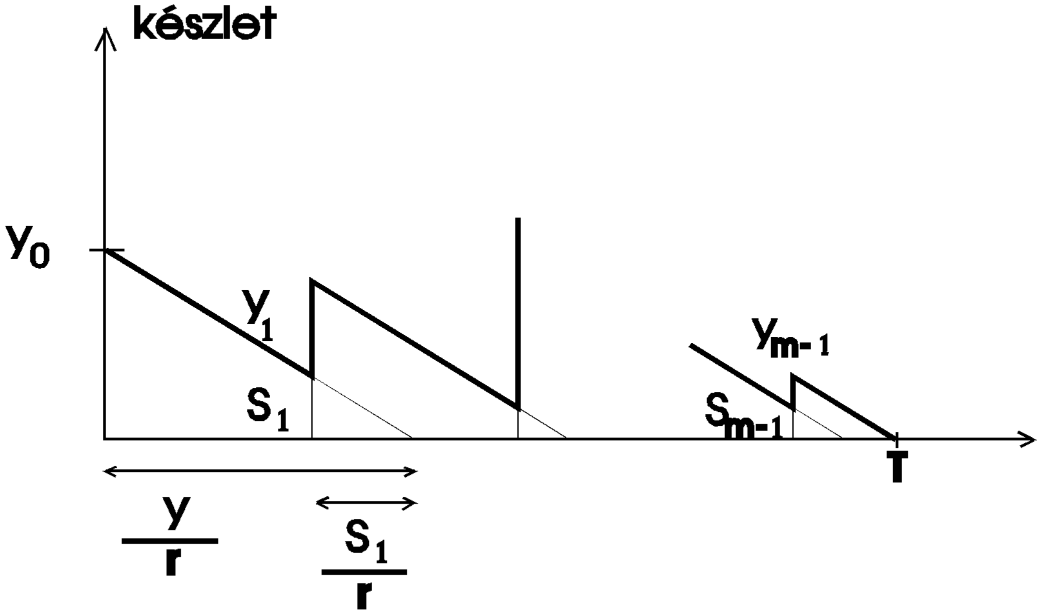
a, Egy tétel beszerzésének – előállításának – tételben foglalt mennyiségtől független költsége, jelölje c_1; (c_1 Ft)

b, A szóban forgó anyag, cikk egy egységének időegységre eső raktározási költsége, jelölje c_2 (c_2 Ft/db/idő)

Célunk olyan raktározási politika kialakítása, amely egyfelől biztosítja az időegységenként r árumennyiség meglétét, másfelől a beszerzéssel és raktározással kapcsolatos költségeket minimalizálja.

Induljunk ki abból, hogy a feltöltések szabálytalan időközönként, szabálytalan mennyiségben történnek. Tegyük fel, hogy T idő alatt m feltöltés történik. Akkor a rendelési költség $m \cdot c_1$. Ehhez adódik hozzá a raktározási költség, amely egyenlő az összraktározási idő$\cdot c_2$. A 0 időpontban y_0 készlet áll rendelkezésre, továbbá $m-1$ alkalommal $y_1, y_2, ..., y_{m-1}$ készlet érkezik a raktárba. A rendelések érkezésekor raktáron lévő mennyiségek legyenek $S_1, ..., S_{m-1}$. A készletszintet egy „fűrészfoggörbe” jelzi. A raktározási időt a „fűrészfoggörbe” alatti terület adja meg. Az egyenesek meredeksége állandó (r), ami egységnyi idő alatt elvitt mennyiséget jelent. (Lásd az alábbi ábrát.)

A görbe alatti területet úgy kapjuk meg, hogy az $y_i + S_i, \frac{y_i+S_i}{r}$ befogókkal rendelkező derékszögű háromszögek területéből kivonjuk az



$S_{i+1}, \frac{S_{i+1}}{r}$ befogókkal rendelkező derékszögű háromszög területét $i = 0, ..., m - 1,$
$S_0 = 0, \ S_m = 0$. Könnyű látni, hogy a teljes terület

$$t = \frac{y_0^2}{2r} - \frac{S_1^2}{2r} + \frac{(S_1 + y_1)^2}{2r} - \frac{S_2^2}{2r} + ... + \frac{(S_{m-1} + y_{m-1})^2}{2r} =$$

$$\frac{1}{2r}\sum_{i=0}^{m-1} y_i^2 + \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m-1} S_i y_i.$$

Így a teljes költség:

$$K_T(y_0, y_1, ...y_{m-1}; S_1, ..., S_{m-1}) = m \cdot c_1 + t \cdot c_2 =$$

$$mc_1 + c_2\frac{1}{2r}\sum_{i=0}^{m-1} y_i^2 + c_2\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{m-1} S_i y_i.$$

Nyilván ez a költség csökken ha $S_i = 0, \qquad i = 1, ..., m - 1$, ami azt jelenti, hogy akkor történik szállítás, ha az árukészlet elfogyott, vagyis nincs maradék raktárkészlet. Kérdés, hogy a

$$K_T(y_0, y_1, ..., y_{m-1}) = m \cdot c_1 + c_2\frac{1}{2r}\sum_{i=0}^{m-1} y_i^2$$

függvény mikor lesz minimális. Vizsgáljuk meg a

$$\sum_{i=0}^{m-1} y_i^2$$

függvényt. Mellékfeltételként

$$\sum_{i=0}^{m-1} y_i = R,$$

ami a beszerzendő készlet nagysága. Az y_i értékek matematikai közepe, vagy átlaga $\frac{R}{m}$.
Legyen $x_i \doteq y_i - \frac{R}{m}$, így $y_i = x_i + \frac{R}{m}$, továbbá

$$\sum_{i=0}^{m-1} y_i = \sum (x_i + \frac{R}{m}) = \sum x_i + R = R,$$

vagyis $\sum x_i = 0$.
Ezt felhasználva

$$\sum y_i^2 = \sum (\frac{R}{m} + x_i)^2 = m\frac{R^2}{m^2} + \frac{2R}{m}\sum x_i + \sum x_i^2 = \frac{R^2}{m} + \sum x_i^2.$$

Látszik, hogy $\sum y_i^2$ akkor minimális, ha $\sum x_i^2 = 0$, ebből $x_i = 0$ következik. Így $y_i = \frac{R}{m},\ \ i = 0, ..., m-1$.
Jelölje ezt az állandó tételnagyságot $q \doteq \frac{R}{m}$. Könnyű látni, hogy a készletgörbe szabályos fűrészfoggörbe q ugrásokkal, az időköz $\frac{q}{r}$. Ekkor

$$K_T(m) = mc_1 + \frac{c_2}{2r}\frac{R^2}{m}.$$

Meg kell határozni $K_T(m)$ minimumát!

$$\frac{d}{dm}K_T(m) = c_1 - \frac{c_2}{2r}R^2\frac{1}{m^2} \ \ ,$$

melynek zérushelye

$$m_0 = R\sqrt{\frac{c_2}{c_1 2r}},$$

$$K_T''(m_0) = \frac{c_2 R^2}{rm^3} \ \ , \ \ K_T''(R\sqrt{\frac{c_2}{c_1 2r}}) \geq 0,$$

ezért a minimumhely az $m_0 = R\sqrt{\frac{c_2}{c_1 2r}}$ $q_0 = \frac{R}{m_0} = \sqrt{\frac{2rc_1}{c_2}}$. Így az optimális tételnagyság $q_0 = \sqrt{\frac{2rc_1}{c_2}}$. **Más megoldás:**
A számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenség miatt

$$K_T(m) = \frac{2mc_1 + \frac{c_2R^2}{rm}}{2} \geq \sqrt{2mc_1 \cdot \frac{c_2R^2}{rm}} = R\sqrt{2\frac{c_2c_1}{r}} = \sqrt{2c_1c_2RT}$$

$$K_T(m) \text{ minimális } \iff 2mc_1 = \frac{c_2R^2}{rm}.$$

Így

$$m_0 = R\sqrt{\frac{c_2}{2rc_1}}\ .$$

$$\text{Ebből } m_0 = R\sqrt{\frac{c_2}{2rc_1}} \text{ és } q_0 = \sqrt{\frac{rTc_1}{\frac{c_2T}{2}}} = \sqrt{2r\frac{c_1}{c_2}}.$$

Így az optimális tételnagyság $q_0 = \sqrt{\frac{2rc_1}{c_2}}$,
melyet szokás **Wilson-formula**, **Andler-formula**, **négyzetgyök-törvénynek** is nevezni.
Ebből az optimális rendelési időhöz

$$t_0 = \frac{q_0}{r} = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}},$$

míg a minimális költség

$$K_0 = \sqrt{2RTc_1 \cdot c_2} = \sqrt{2rtT^2c_1 \cdot c_2}.$$

Összefoglalva eddigi eredményeinket megállapíthatjuk, hogy ha

(i) Ismert egy T időtartam összszükséglete,

(ii) Az igénykielégítés konstans intenzitású,

(iii) Két költségtényezőt veszünk figyelembe (beszerzés, raktározás),

(iv) A beáramlási folyamat determinisztikus,

akkor az optimális a raktárfeltöltési eljárás az hogy, szabályos időközönként az optimális tételnagyságra töltjük a készletet.

Az optimális eljárás megkeresése az esetek túlnyomó részében nem ilyen egyszerű és sokszor csak közelítő algoritmussal határozható meg. A közelítő megoldások is hasznosak, de lényegesen mélyebb matematikai módszereket és meggondolásokat igényelnek, mint a most bemutatott. Mégis az itt követett eljárás sok szempontból jellegzetes. Nevezetesen:

(i) Meg kell ismerkedni a beáramlás és a kiáramlás sajátosságaival, a vizsgálatba vonható költségekkel,

(ii) Meg kell határoznunk az elérni kívánt célt vagy célokat,

(iii) Matematikai összefüggések segítségével felírjuk a feltételeket és az célfüggvényt,

(iv) A lehetséges eljárások közül kiválasztjuk az optimálisat,

(v) Meghatározzuk az optimális eljárás azon paramétereit, amelyek az ezen eljáráshoz tartozó célfüggvényt optimalizálják.

A készletgazdálkodási modellek az esetek túlnyomó részében valamely optimumszámítási feladatra vezetnek, gyakran lineáris és nem lineáris programozási feladatra.

Vegyük észre, hogy ha a beszerzési költség $by + c_1$ alakú, ahol b Ft/db dimenziójú költség, akkor a költségfüggvény $K^* = K + b \cdot R,$ ahol K az előző modell költségfüggvénye. Így az optimális beszerzési politika változatlan marad. Vagyis ha egy db áru eladási ára h Ft, akkor látható, hogy a teljes mennyiség eladási ára $K \cdot h.$ Így a nyereség

$$K \cdot h - K^*,$$

vagyis a nyereség akkor maximális, ha a kiadás minimális.

Példák

1. 5 hónap alatt 100 db árucikk szükséges, a fogyasztó rendelése egyenletes, havonta 20 db-ot igényel. Egy tétel rendelési költsége 400 Ft, havi raktározási költsége 10 Ft. Mi a minimális költséggel járó politika?

   Megoldás:

$$q_0 = \sqrt{2\frac{100}{5} \cdot \frac{400}{10}} = 40 \text{ db},$$

$$t_0 = \frac{40}{20} = 2 \text{ havonként},$$

$$K_0 = \sqrt{2 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 400 \cdot 10} = 20000 \text{ Ft}.$$

2. Előállítandó 12000 db alkatrész 1 év alatt folyamatosan, sorozatgyártással. Egy-egy sorozat legyártásával kapcsolatos állandó költség — a sorozatnagyságtól függetlenül — 20000 Ft, raktározási költség 30 fillér/db naponta. Meghatározandó az optimális sorozatnagyság!

   Megoldás: Vegyük észre, hogy a gyártási folyamat a rendelési folyamat fordítottja, ezért ugyanazok érvényesek. Így

$$q_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{12000}{365} \cdot \frac{20000}{0,3}} = 662 \text{ db},$$

$$t_0 = \sqrt{2 \cdot \frac{365}{12000} \cdot \frac{2000}{0,3}} = 20,14 \text{ nap},$$

$$K_0 = \sqrt{2 \cdot 365 \cdot 12000 \cdot 2000 \cdot 0,3} = 72498,28 \text{ Ft}.$$

3. Elkészítendők egy árucikknél az utánrendelési idők, ha az utánpótlási időtartam 30 nap, március 1-től napi 20 egységű fogyasztást kell ellátni, egy tétel rendelési költsége (tételmennyiségtől függetlenül) 500 Ft, a raktározási költség 0,5 Ft.

   Megoldás: $(r = 20, c_1 = 500, c_2 = 0,5)$ $q_0 = 200\ db, t_0 = 10$, mivel a rendeléstől számított 30 nap múlva érkezik az áru, ezért az előző 200 tételt 30 nappal, a másodikat 20 nappal, a harmadikat 10 nappal március 1-e előtt rendeljük meg. Március 1-én ettől kezdve 10 naponként egy-egy tételt rendelünk.

Java applet m_0, q_0, t_0 és K_0 meghatározására.

1.2.2 Optimális tételnagyság modell az önköltségi beszerzési árral arányos raktározási költséggel

Feltételek:

- A $[0, T]$ időszakban összszükséglete R,

- Minden időegységben pontosan r egység áramlik ki a raktárból,
- Egy y tétel beszerzési (előállítási költsége) $by + c_1$, ahol b a tétel egy egységének beszerzési ára és c_1 a tételben foglalt mennyiségtől független költség,
- A raktározási költség w, a raktárkészlet 1Ft értékének egy időegységre eső költsége (Ft/Ft/idő),
- A rendelési és utánrendelési politika tőlünk függ.

Az a körülmény, hogy egy adott időintervallum minden időegységében r egység áramlik ki a raktárból, meghatározza a kiáramló görbéjét. Most a függvényértékek nem mennyiséget, hanem Forintban kifejezett pénzösszeget jelentenek. Nem nehéz belátni, hogy az optimális készletezési eljárás most is az, hogy szabályos időközönként mindig ugyanarra a szintre töltjük fel a raktárkészletet. Ehhez az optimális eljáráshoz tartozó $K_T(q)$ összköltség kiszámítási módja jelen esetben egy kicsit módosul. A raktározási költségtényező most ugyanis nem áru- és időegységre, hanem a beszerzési költség egy egységének időegységre eső részeként van megadva. Egy q tétel beszerzése $bq+c_1$ Ft, s minthogy időegységenként r egység hagyja el raktárunkat, $\frac{q}{r}$ idő múlva ennek a tételnek 0 az értéke. Ehhez a tételnagysághoz tartozó átlagos lekötött forintérték, tehát $\frac{bq+c_1+0}{2}$, amelyet $\frac{q}{T}$ idővel szorozva megkapjuk a raktárkészlet átlagos értékét, s ennek w-szerese adja a raktározási költséget. Abban az esetben, ha m alkalommal kerül sor raktárfeltöltésre, tehát $R = mq$, az optimális eljáráshoz tartozó összköltség

$$K_T(q) = mc_1 + m(\frac{q}{r} \cdot \frac{bq + c_1}{2})w + bR.$$

A $b \cdot R$ tag független attól, hogy m ill. q mekkora értéket vesz fel. Az $m = \frac{rT}{q}$ helyettesítés után T-vel osztva az egyenlet mindkét oldalát, megkapjuk az időegységre eső költséget:

$$k(q) = \frac{K_T(q)}{T} = \frac{rc_1}{q} + \frac{1}{2}bwq + \frac{1}{2}c_1 w + br.$$

Nem nehéz megmutatni, hogy a $k(q)$ függvény akkor veszi fel minimumát, ha $q_0 = \sqrt{2r\frac{c_1}{bw}}$, illetve $q_0 = \sqrt{2\frac{R}{T}\frac{c_1}{bw}}$. Ennek megfelelően

$$t_0 = \frac{q_0}{r} = \sqrt{2\frac{c_1}{rbw}} = \sqrt{2\frac{T}{R}\frac{c_1}{bw}}.$$

Innen $k(q_0) = \sqrt{2rbc_1w} + br + \frac{1}{2}c_1w$.
A T idő alatti összköltséget megkapjuk, ha mindkét oldalt T-vel megszorozzuk. Így $K_T(q_0) = \sqrt{2RTbc_1w} + bR + \frac{T}{2}c_1w$. Könnyű észrevenni, hogy a q_0, t_0-nál az előző feladatbeli c_2 szerepét a $b \cdot w$ mennyiség vette át.

Java applet m_0, q_0, t_0 és K_0 meghatározására.

1.2.3 Az optimális tételnagyság modell árengedménnyel

Ismét tételezzük fel, hogy a T idő alatti összszükséglet R, amelyet $r = \frac{R}{T}$ időegységre eső intenzitással elégítünk ki az egész T időtartam folyamán. Jelölje Q azt a mennyiséget, amely felett árengedményt adnak, vagyis kapunk. Tegyük fel, hogy egy y tétel beszerzése a következő költséggel jár:

$$\begin{aligned} &b_1y + c_1, \quad \text{ha } 0 < y < Q, \\ &b_2y + c_1, \quad \text{ha } Q \leq y, \ \ b_1 > b_2. \end{aligned}$$

A készlettartás időre és forintra eső költsége legyen ismét w.
Határozzuk meg az optimális beszerzési politikát.
A következőképpen kell eljárnunk: Mintmár az előző modelleknél is megállapítottuk, hogy az adott feltételek mellett az optimális eljárás az, ha szabályos időközönként q_0 tétel raktárba érkezéséről gondoskodunk. Tudjuk továbbá, hogy ezen eljáráshoz tartozó összköltséget a

$$K_T(q_0) = \sqrt{2RTbwc_1} + bR + \frac{T}{2}c_1w$$

összefüggés adja meg. Határozzuk meg ezért a b_2 egységárhoz tartozó optimális tételnagyságot, jelölje ezt q_2. Ekkor $q_2 = \sqrt{2r\frac{c_1}{b_2w}}$.
Két eset lehetséges:

a, $q_2 \geq Q$, ekkor q_2 optimális tételnagyság,

b, $q_2 < Q$.

Ez esetben q_2 nem lehet az optimális tételnagyság, hiszen $q_2 < Q$ tételnagyságot b_2 egységáron nem vásárolhatunk. Ki kell számítani tehát a b_1 árhoz tartozó tételnagyságot. Ez $q_1 = \sqrt{2r\frac{c_1}{b_1w}}$. Nyilvánvaló, hogy ha q_2 már kisebbnek bizonyult Q-nál, akkor a $b_1 > b_2$ reláció miatt

$$Q > q_2 = \sqrt{2r\frac{c_1}{b_2w}} > \sqrt{2r\frac{c_1}{b_1w}} = q_1.$$

A már ismert képletek alapján q_1 és Q tételnagysághoz tartozó időegységre jutó összköltségek

$$k(q_1) = \frac{rc_1}{q_1} + \frac{1}{2}c_1 w + \frac{1}{2}b_1 w q_1 + b_1 r \ ,$$

$$k(Q) = \frac{rc_1}{Q} + \frac{1}{2}c_1 w + \frac{1}{2}b_2 w Q + b_2 r.$$

A $b_1 > b_2, q_1 < q_2 < Q$ reláció miatt

$$\frac{rc_1}{q_1} > \frac{rc_1}{Q}, \qquad b_1 r > b_2 r,$$

de

$$\frac{1}{2}b_1 w q_1 \overset{\le}{\underset{\ge}{=}} \frac{1}{2}b_2 w Q$$

relációk bármelyike fennállhat.
Így ismét két esetet kell megkülönböztetnünk:

(i) $k(q_1) \ge k(Q)$,

(ii) $k(q_1) < k(Q)$.

Tekintettel arra, hogy költségminimumra törekszünk, az (i) esetben Q az optimális tételnagyság, (ii) esetben pedig q_1. Így az érkezési időközöket is a megfelelő tételnagyság alapján határozzuk meg.

Példák

1. Valamely cikkből összesen 2400 db-ra van szükség 12 hónap alatt: T=12 hónap, R=2400, c_1=350 Ft, w=0,02(Ft/Ft/idő),

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = 10 \ \text{Ft, ha } 1 \le q < 500 \\ b_2 = 9,25 \ \text{Ft, ha } q \ge 500 \end{array}\right\} \ Q = 500.$$

Így

$$q_2 = \sqrt{2\frac{2400}{12}\frac{350}{9,25 \cdot 0,02}} \approx 870.$$

Tehát $q_2 > Q$, az optimális tételnagyság 870 db. Ezzel az értékkel már továbbszámolható az optimális időköz és a minimális költségfüggvény.

2. Az első példa adatai közül egyedül a c_1=100 Ft adatot változtassuk meg. Ekkor

$$q_2 = \sqrt{2\frac{2400}{12}\frac{100}{9,25 \cdot 0,02}} \approx 465 < Q = 500.$$

Ezért meg kell határozni q_1-et is

$$q_1 = \sqrt{2\frac{2400}{12}\frac{100}{9,25 \cdot 0,02}} \approx 447.$$

Hasonlítsuk össze a $K_T(q_1)$ és K(Q) értékeket!

$$K_T(q_1) = K_T(447) = \sqrt{2 \cdot 2400 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 100 \cdot 0,02} +$$

$$+2400 + \frac{1}{2}100 \cdot 12 \cdot 0,02 = 25085,$$

míg

$$K_T(500) = \frac{100 \cdot 2400}{500} + 9,25 \cdot 2400 + \frac{1}{2}100 \cdot 12 \cdot 0,02 +$$

$$+\frac{1}{2}9,25 \cdot 12 \cdot 0,02 \cdot 500 = 23247.$$

Azt kaptuk, hogy $K_T(500) < K_T(447)$ így az optimális tételnagyság Q=500. Ebből számolható ki az optimális időköz is.

$t_0 = \frac{500}{200} = \frac{5}{2}$ hónap.

3. Az első példa adataival dolgozunk kivéve

$$c_1 = 100, \quad Q = 3000.$$

Ezért $q_2 = 465 < 3000$, $q_1 = 447$, $K(447) = 25085$, $K(3000) = 25622, K(447) < K(3000)$.

Az optimális tételnagyság 447. $b = \frac{447}{200}$ hónap.

Megjegyzés:
Három esetben következzen be mennyiségi korláttól függő árengedmény, mégpedig

$$\begin{array}{ll} b_1,\ \text{ha}\ 0 < q < Q_1\ , & \\ b_2,\ \text{ha}\ Q_1 \le q < Q_2\ , & b_1 > b_2 > b_3, \\ b_3,\ \text{ha}\ Q_2 \le q\ . & \end{array}$$

A követendő eljárás most a következő:

a, Kiszámítjuk q_3-t, azaz a b_3 egységárhoz tartozó optimális tételnagyságot. Ha $q_3 \ge Q_2$, akkor q_3 a keresett optimális nagyság.

b, Ha $q_3 < Q_2$, akkor kiszámítjuk a q_2-t. Minthogy $b_3 < b_2$, így $q_2 < q_3$. Ennek következtében $q_2 < Q_1$ vagy $Q_1 \leq q_2 < Q_2$. Ha $q_3 < Q_2$ és $Q_1 \leq q_2 < Q_2$, akkor a helyzet ugyanaz, mint a már tárgyalt előző esetben, vagyis össze kell hasonlítani a $K(q_2)$ költségeit a $K(Q_2)$ költséggel, eldöntendő, hogy a q_2 vagy a Q_2 a keresett optimális tételnagyság.

c, Ha $q_3 < Q_2$ és $q_2 < Q_1$, akkor ki kell számítani a q_1-t, amire szükségképpen igaz $q_1 < q_2 < Q_1$. Ebben a helyzetben $K(q_1)$-et kell összehasonlítani $K(Q_1)$-el, és eldönteni melyik a keresett optimális tételnagyság.

Java applet q_2, q_1, $k(q1)$ és $k(Q)$ meghatározására.

1.2.4 Az optimális tételnagyság modell hiány esetén

Tekintsük ismét az 1.2.1 részben tárgyalt feladatot, azzal a különbséggel, hogy most nem törekszünk az $R = r \cdot T$ szükségletet T idő alatti teljes, hanem csak részbeni kielégítésére. A raktárhiány tehát megengedett, és jelöljük a hiány áru és időegységre eső költségét c_3-mal. (c_3 Ft/db/idő)

Foglaljuk össze az adott feltételeket:

- A $[0, T]$ időszakasz össz-szükséglete R,
- Minden időegység alatt pontosan r egységre van szükség,
- c_1 Ft a tételben foglalt egységektől függetlenül, állandó beszerzési költség,
- A készlet egységének időegységre eső raktározási költsége c_2 Ft (c_2 Ft/db/idő),
- A hiány időegységre eső raktározási költsége (kára) c_3 Ft (c_3 Ft/db/idő),

Az a körülmény, hogy ha rendelkezünk készlettel, ez időegységként r egységnyi intenzitással áramlik ki a raktárunkból, ismét determinálja a kiáramlási görbét. Az időtengely alatti görbeterületnek a c_3 költségtényezővel való szorzata adja a hiányköltséget. A készlet mennyisége megnő, ha beérkezés történik, de ha a hiányt ekkor sem elégítjük ki, elvész. Az 1.2.1 részben követett gondolatmenet alapján nem nehéz belátni, hogy az optimális készletezési eljárás most is a szabályos fűrészfog-görbével ábrázolható raktárfeltöltési politika, csakhogy most nem az egész R igényt elégítjük ki, hanem annak egy részét. Nyilvánvaló, hogy az x tengely alatt elhelyezkedő derékszögű háromszög területe a hiánnyal kapcsolatos raktározási idő. Az optimális készletezési eljárás tehát most is az, hogy egyenlő időközönként ugyanarra a szintre töltjük fel raktárkészletünket, csakhogy most nem q, hanem valamely q-nál kisebb S mennyiséget szerzünk be. S és q aránya a költségtényezők egymáshoz való arányától függ.

Meghatározandó S és q azon mennyisége (jelöljük ezt S_0, q_0-val) amely mellett az összköltség mint e két mennyiség függvénye minimális. A költségfüggvényt a következő módon számolhatjuk ki. Ha q egységet szerzünk be, akkor $\frac{q}{r}$ időközönként $\frac{rT}{q}$ számú beszerzéssel a teljes igényt ki tudjuk elégíteni. Most azonban $\frac{q}{r}$ időközönként csupán $S < q$ mennyiséget szerzünk be, ez $\frac{S}{r}$ ideig fedezi a szükségletet. Ebből nyilvánvaló, hogy készlet az $\frac{S}{r}$ időtartam felett, hiányt pedig a $\frac{q}{r} - \frac{S}{r} = \frac{q-S}{r}$ időszak alatt jelentkezik. Az előbbiek figyelembevételével könnyen felírhatjuk az összköltséget

$$K(q,S) = \frac{rT}{q}\left[c_1 + \frac{S^2}{2r}c_2 + \frac{(q-S)^2}{2r}c_3\right].$$

Az analízis ismert módszereivel megoldva ezen minimalizálási feladatot a minimumhelyekre a következő értékek adódnak:

$$q_0 = \sqrt{2r\frac{c_1}{c_2}}\sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}},$$

illetve az $r = \frac{R}{T}$ helyettesítéssel

$$q_0 = \sqrt{2\frac{Rc_1}{Tc_2}}\sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}},$$

$$S_0 = \sqrt{2r\frac{c_1}{c_2}} \cdot \sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}},$$

illetve

$$S_0 = \sqrt{2\frac{Rc_1}{Tc_2}} \cdot \sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}}.$$

Ezeket az értékeket az

$$\frac{\partial K(q,S)}{\partial S} = \frac{STc_2}{q} - \frac{T(q-S)}{q}c_3 = 0,$$

$$\frac{\partial K(q,S)}{\partial q} = \frac{rTc_1}{q^2} - \frac{S^2Tc_2}{2q^2} + \frac{2q(q-S)-(q-S)^2}{2q^2}Tc_3 = 0$$

egyenletrendszer megoldásaiként kaptunk. Raktárfeltöltésre $\frac{q_0}{r}$ időközönként kerül sor, jelölje ezt $t_0(q_0, S_0)$, ekkor

$$t_0(q_0,S_0) = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}}\sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}},$$

illetve
$$t_0(q_0,S_0)=\sqrt{2\frac{Tc_1}{Rc_2}}\sqrt{\frac{c_2+c_3}{c_3}}.$$
Az összköltség az egész időtartamra
$$K(q_0,S_0)=\sqrt{2RTc_1c_2}\sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}}=T\sqrt{2rc_1c_2}\sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}}.$$
Tehát az optimális eljárás az, hogy $t_0(q_0,S_0)$ időközönként a raktárkészletet S_0 mennyiséggel töltjük fel, ekkor a minimális összköltség $K(q_0,S_0)$ Ft lesz.
Megjegyzés:

Jelöljük q_0 második tényezőjének a gyökjel alatt szereplő $\frac{c_3}{c_2+c_3}$ mennyiséget ϱ-val ($\varrho<1$ általában) Ha $\varrho\approx 1$ akkor $\frac{1}{\varrho}\approx 1$. Ebben az esetben a 1.2.1 részben szereplő képletek megegyeznek az itt szereplő képletek megfelelőivel. A $\varrho\approx 1$ akkor áll fenn, ha $c_2\ll c_3$, azaz a hiányköltség nagyon nagy a raktározási költséghez képest. Ekkor hiányt nem szabad megengednünk, így ez a modell valóban a fenn említett modellnek felel meg. Így az 1.2.1 rész ezen modell speciális esete $c_3=\infty$ helyettesítéssel. Ekkor $S_0=q_0$, amely az optimális feltöltési egység. Az összefüggésekből leolvasható, hogy
$$\sqrt{2RTc_1c_2}=K(q_0)\geq K(q_0,S_0)=\sqrt{2RTc_1c_2}\sqrt{\frac{c_3}{c_2+c_3}},$$
azaz az itt követett optimális eljárás mindig kisebb összköltséget ad. Egyenlőség csak a $\varrho=1$ esetben áll fenn.

Könnyű látni, hogy ha a beszerzési költség c_1+bq alakú, akkor a költségfüggvény
$$m\Big[c_1+\frac{S^2}{2r}c_2+\frac{(q-S)^2}{2r}c_3+Sb\Big],$$
majd $m=\frac{R}{q}$ bevezetésével
$$K(q,S)=\frac{R}{q}\Big[c_1+\frac{S^2}{2r}c_2+\frac{(q-S)^2}{2r}c_3+Sb\Big].$$
így
$$\frac{\partial K}{\partial S}=\frac{RS}{rq}c_2-\frac{R}{qr}(q-S)c_3+b=0,$$
$$\frac{\partial K}{\partial q}=-\frac{R}{q^2}(c_1+\frac{S^2}{2r}c_2+\frac{(q-S)^2}{2r}c_3+Sb)+\frac{R}{q}\frac{q-S}{r}=0.$$

Ezen egyenletrendszer megoldása

$$q_0 = \sqrt{\frac{2rc_1(c_2+c_3) - r^2b^2}{c_2c_3}},$$

$$S_0 = \frac{\sqrt{c_3\frac{2rc_1(c_2+c_3)-r^2b^2}{c_2}} - br}{c_2+c_3}.$$

Példa:
Előállítandó 12000 db alkatrész 1 év alatt folyamatosan, sorozatgyártással. Egy-egy sorozat legyártásával kapcsolatos költség c_1 a sorozatnagyságtól függetlenül 2000 Ft. Raktározási költség $c_2 = 0.3$ Ft/db/nap, hiányköltség $c_3 = 0.1$ Ft/db/nap. Meghatározandó az optimális sorozatnagyság, és összköltség.

Megoldás: Az összefüggések alapján

$$q_0 = \sqrt{2\frac{12000 \cdot 2000}{365 \cdot 0,30}}\sqrt{\frac{0,3+0,1}{0,1}} \approx 1324\text{db},$$

$$S_0 = \sqrt{2\frac{12000 \cdot 2000}{365 \cdot 0,30}}\sqrt{\frac{0,1}{0,3+0,1}} \approx 331\text{db},$$

$$t(q_0, S_0) = \sqrt{2\frac{365 \cdot 2000}{12000 \cdot 0,3}}\sqrt{\frac{0,3+0,1}{0,1}} \approx 40\text{nap},$$

$$K(q_0, S_0) = \sqrt{2 \cdot 365 \cdot 12000 \cdot 2000 \cdot 0,30}\sqrt{\frac{0,1}{0,3+0,1}} \approx 36249\text{Ft}.$$

Tehát a következő eljárást követjük: Kb 40 naponként a szóbanforgó mennyiségből előállítunk 331 db-ot, 1324-331=993 db hiánnyal, de az összköltség fele annak, mint amikor a teljes szükséglet kielégítésére törekszünk. Ezt az 1.2.1 rész első példájaként kaptuk meg $K(q_0) = 72498$ Ft.

Java applet q_0, S_0, $t(q_0, S_0)$ és $K(q_0, S_0)$, m_0 meghatározására.

1.3 Sztochasztikus készletgazdálkodási modellek

A készletezési problémák túlnyomó többsége sztochasztikus modellre vezet. A kiáramlási folyamat sok esetben a kereslet függvénye, a kereslet pedig a véletlentől függ. Az alkatrészek tartalékolási problémái is különböző valószínűségszámítási meggondolásokat igényelnek. A szállítási késedelmek és maga az ún. *előszállításos rendszer*, amikor a megrendelt cikk egy meghatározott időintervallumon belül meg nem adott időpontokban és résznagyságokban érkezik be, sztochasztikus törvényszerűségeket követ. Tévedés azonban azt gondolni, hogy minden jelenség, amelynek jövőbeli alakulását nem tudjuk, valószínűségszámítási módszerekkel becsülhető. A valószínűségelmélet és a matematikai statisztika nagy segítséget nyújt olyan esetekben, amikor valójában sem kísérletre, sem többszörös megfigyelésre nincs lehetőség, de a vizsgált jelenségekkel azonos típusú jelenségekkel kapcsolatosan már történtek ilyen megfigyelések. Sztochasztikus modellekkel gyakran bonyolult, bár alapjában véve determinisztikus jelenségek is modellezhetők. Egy nagy kikötő hajóforgalmát — noha szigorú menetrend szerint bonyolódik le — igen jól lehet Poisson-folyamatokkal leírni. Talán ez a tény megnyugtatja azokat a valójában érthetően aggodalmaskodókat, akik a sztochasztikus modellek gyakorlati alkalmazhatóságában kételkednek, mondván, hogy soha sincsen elég tapasztalatunk, a jelenségek sohasem ismételhetők meg számtalan sokszor ugyanolyan körülmények között, miért mindig csak azzal a néhány valószínűségeloszlással dolgozunk, amelyek meglehetősen egyszerűen kezelhetők, holott a valóságban sokkal bonyolultabbak. A mérési adatok esetében pontosabb és pontosabb műszerekkel újabb és újabb pontatlanságok mutathatók ki. A gyakorlat azonban igen jól boldogul a „durvább” mérési adatokkal is. Az elkövetett hiba becsülhető, s ez gyakorlatilag kielégítő. A sztochasztikus modellek felépítése, logikája a legtöbb esetben ugyanaz, mint a determinisztikusoké. Meg kell ismerkednünk a beáramlás és a kiáramlás törvényszerűségeivel, meg kell határoznunk azt a célt vagy célokat, amelyeket elérni kívánunk, s ha költségoptimumra vagy nyereségoptimumra törekszünk, akkor a megfelelő költségtényezőt is meg kell adnunk. A beáramlási és kiáramlási folyamatokban fellépő véletlen tényezők valószínűségeloszlásainak meghatározása a megfigyelési adatok alapján matematikai statisztikai módszerek alapján történik. Ebben a fejezetben a leggyakrabban előforduló sztochasztikus modellekkel foglalkozunk, ügyelve a valószínűségszámítási módszerek és tételek alkalmazhatóságára.

1.3.1 Egyszerű megbízhatósági típusú statisztikai sztochasztikus készletmodellek

Ezeknél a készletmodelleknél nem szerepelnek költségtényezők, csupán egy előre adott biztonság, s a különböző véletlen jelenségek valószínűségi törvényeinek ismeretében olyan raktárfeltöltési eljárást kell követnünk, amely az előre adott biztonsággal kielégíti az igényt, szükségletet.

1.3.1.1 modell

A „B” vállalat napi felhasználása valamely anyagból r egység. Egy $[0,T]$ időszak, pl. negyedév összükségletét, az $rT = R$ mennyiséget rendeli meg egy „A” vállalattól. Az „A” vállalat ezt a mennyiséget valamikor a $[0,T]$ időszakon belül egyszerre szállítja. A szállítási, beérkezési időpont valószínűségi változó, amelyről feltesszük, hogy a megfigyelések alapján ismerjük az eloszlásfüggvényét, jelölje ezt $F(x), F(T) \approx 1$. $F(x)$ ismeretében meghatározhatunk egy M_0 kezdőkészletet oly módon, hogy $1-\varepsilon$ valószínűséggel az egész T időintervallum alatti időegységre jutó r kivételt biztosítani tudjuk. A feladat nem más, mint az

$$F\left(\frac{M_0}{r}\right) = P\left(\xi \leq \frac{M_0}{r}\right) = 1-\varepsilon \ \ (konfidenciaszint)$$

egyenlet megoldása M_0-re. M_0-et ugyanis úgy kell meghatározni, hogy ξ szállítási időpont $1-\varepsilon$ valószínűséggel következzék be. (Ha ugyanis 0 időpontban M_0 készletünk van, akkor -napi r felhasználást tételezve fel- az M_0 készlet $\frac{M_0}{r}$ ideig elég.) Így mire elfogy a kezdőkészlet a szállítás nagy valószínűséggel megtörténik $\left(P(\xi r < M_0) = P\left(\xi < \frac{M_0}{r}\right) = F\left(\frac{M_0}{r}\right)\right)$.

Példák:

1. A termelést nyersanyaggal kell ellátnunk, a szükséges összmennyiség T=100 nap alatt R=400 db. Előzetes tapasztalat alapján a nyersanyag szállítások beérkezési ideje egyenletes eloszlású. 95%-os biztonsággal biztosítani akarjuk a napi egyenletes felhasználást. Mekkora legyen az M_0 kezdőkészlet?

   Megoldás:
   $$r = \frac{R}{T} = 4 \text{ db/nap},$$
   $$F\left(\frac{M_0}{4}\right) = 0,95.$$

   Mivel egyenletes eloszlásról van szó a $[0,T]$ intervallumon, ezért

   $$\frac{\frac{M_0}{4}}{100} = 0.95.$$

   Ekkor M_0=380 db.

2. T=30 nap alatt R=60 kg egyenletes felhasználáshoz mekkora M_0 kezdőkészletet kell fenntartanunk, ha 95%-os biztonsággal fenn akarjuk

tartani a termelést? A megfigyelések alapján a beérkezési idő exponenciális eloszlású, 5 napos átlaggal.

Megoldás:

$$\frac{1}{\lambda} = 5, \qquad \lambda = \frac{1}{5}, \qquad r = \frac{60}{30} = 2,$$

$$F\left(\frac{M_0}{2}\right) = 1 - e^{-0,2\cdot\frac{M}{2}} = 0,95$$

$$e^{-0,1M_0} = 0,05, \qquad F(30) = 1 - e^{-\frac{30}{5}} \approx 1.$$

Így M_0=30 kg.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha ξ λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$M_0 = \frac{r}{\lambda}\ln\frac{1}{\varepsilon}, \text{ ha } F(T) \approx 1, \quad e^{-\lambda T} \approx 0.$$

Megjegyzés:

A „B” vállalat szerepét vegye át a raktár, így a raktárnak az r egyenletes kiáramlást biztosítania kell a $[0,T]$ időintervallumban. A kérdés mikor, milyen kezdő raktárkészletnél rendeljen, hogy a kiáramlást biztosítani tudja.

1.3.1.2 modell

Az A vállalat a B vállalattal olyan szerződést köt, hogy a megrendelt rT mennyiséget a $[0,T]$ időintervallumon belül egy fix előre meghatározott t_1 időpontban fogja szállítani. Tegyük fel, hogy a $[0,T]$ időszakaszon belül mindig egy adott t_1 időpontban következik be a megrendelt mennyiség szállítása. Mégis számolnunk kell azzal, hogy előre nem látható véletlen okok következtében előfordulhat az, hogy $t_1 + \xi$ időpontban érkezik meg a szállítmány. Legyen ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, ekkor meghatározható a kiinduló M_0 raktárkészletnek az a része, mely csak a véletlen okozta késés fedezésére szolgál. Ha a termelés folyamatosságát $1-\varepsilon$ biztonsággal akarjuk biztosítani, akkor M jelölje azt a készletet, amely a t_1 időpontban a ξ lépés fedezésére szolgál, időegységnyi r intenzitást feltételezve.

$$P\left(r\xi < M\right) = P\left(\xi < \frac{M}{r}\right) = F\left(\frac{M}{r}\right) = 1 - \varepsilon$$

A kiinduló készlet

$$M_0 = rt_1 + M, \text{ ha } F(T - t_1) \approx 1.$$

1.3.1.3 modell

Tegyük fel, hogy a $[0,T]$ időköz n számú egyenlő hosszú olyan részidőintervallumra tagozódik, amelyek mindegyikében a megrendelt $rT = R$ mennyiség n-edrésze biztosan megérkezik, csupán az bizonytalan, hogy a részintervallumon belül melyik napon érkezik a szállítás. A szállítások időpontjai egymástól független azonos eloszlású valószínűségi változók. Tegyük fel tehát, hogy a $[0,T]$ $[0,\frac{T}{n}],[\frac{T}{n},2\frac{T}{n}],...,[(k-1)\frac{T}{n},k\frac{T}{n}],...,[(n-1)\frac{T}{n},T]$ részintervallumaiban történik a szállítás. Ezt leírja minden olyan nemnegatív értékű valószínűségi változó, amelyre $F(\frac{T}{n}) \approx 1$. Ilyen pl. a $[0,\frac{T}{n}]$-n egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Jelölje ismét M_0 azt a kezdeti készletet amely már a 0 időpontban a fennálló bizonytalanságok okozta esetleges termelési kieséseket hivatott adott biztonsággal fedezni. Nyilvánvalóan bármely $k=1,...,n$-re

$$\left[(k-1)\frac{T}{n}+\xi_k\right] r < (k-1)\frac{R}{n}+M_0, \quad R = rT,$$

ahol ξ_k jelöli a k-adik intervallumban az áru érkezési idejét.
Így $\xi_k r < M_0, \quad k=1,...,n$-re. Feltételünk

$$P(\xi_k r < M_0, \;\; k=1,...,n) \leq 1-\varepsilon.$$

Mivel a ξ_k-k függetlenek, azonos eloszlásásúak, ezért az

$$F^n\left(\frac{M_0}{r}\right) = 1-\varepsilon$$

relációt kapjuk, melyből

$$F\left(\frac{M_0}{r}\right) = \sqrt[n]{1-\varepsilon}.$$

a, Ha F(x) egyenletes eloszlású a $[0,\frac{T}{n}]$-n, akkor

$$\frac{\frac{M_0}{r}}{\frac{T}{n}} = \sqrt[n]{1-\varepsilon}\,,$$

$$M_0 = \frac{R}{n}\sqrt[n]{1-\varepsilon}.$$

b, Ha $F(x) = 1-e^{-\lambda x}, \qquad F(\frac{T}{n}) \approx 1$, akkor

$$1-e^{-\lambda\frac{M_0}{r}} = \sqrt[n]{1-\varepsilon}$$

$$M_0 = \frac{r}{\lambda}\ln\frac{1}{1-\sqrt[n]{1-\varepsilon}}.$$

1.3.2 A véletlen ütemezésű rész-szállítmányok modellje

A hazai tapasztalat az bizonyítja, hogy a cikkek, anyagok jelentős részének a megrendelés teljesítésére az ún. *előszállításos rendszer* jellemző, azaz a megrendelt R mennyiség egy T időintervallum belül kizárólag a megrendelést teljesítő féltől függő, előre meg nem határozható időpontokban és részletekben érkezik be, úgy azonban, hogy T időpontig az egész megrendelt R mennyiség beérkezik. Ha a több évi tapasztalat azt mutatja, hogy a megrendelt mennyiségek időszakról-időszakra többnyire n $(n > 2)$ alkalommal és nagyjából egyenlő részletekben érkeznek be, akkor ennek az utánpótlási rendszernek a leírására a véletlen ütemezésű (Prékopa-Ziermann) modell alkalmas.

Mielőtt rátérnénk a modell ismertetésére szükségünk van néhány valószínűségszámítási tételre. Legyen $\xi_1, ..., \xi_n$ a ξ valószínűségi változóra vonatkozó n elemű minta, azaz egymástól független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek eloszlásfüggvégye a ξ eloszlásfüggvényével azonos. Jelöljük ezt $F(x)$-el.

Jelölje $\xi_1^*, ..., \xi_n^*$ az előbbi mintából származó rendezett mintát. Ekkor a tapasztalati eloszlásfüggvény:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le \xi_1^*, \\ \frac{k}{n}, & \text{ha } \xi_k^* < x \le \xi_{k+1}^* \\ 1, & \text{ha } x > \xi_n^*. \end{cases} , k = 1, 2, ..., n-1,$$

Az $F_n(x)$ tapasztalati eloszlásfüggvény és az $F(x)$ elméleti eloszlásfüggvényre a következő alapvető tételek ismertek:

Glivenko-tétel:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{x\epsilon R} |F_n(x) - F(x)| = 0\right) = 1 \,.$$

Szmirnov-tétel:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}\sup_{x\epsilon R}(F_n(x) - F(x)) < y\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{x\epsilon R} |F(x) - F_n(x)| < y\right) = \begin{cases} 1 - e^{-2y^2}, & \text{ha } y > 0 \\ 0, & \text{ha } y \le 0 \end{cases}$$

Kolmogorov-tétel:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{x\epsilon R} |F_n(x) - F(x)| < y\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-2i^2y^2}, \qquad y > 0 \,.$$

1.3.2.1 A véletlen ütemezésű modell egyenlő nagyságú rész-szállítások esetén

(Prékopa-Ziermann modell, 1962)

Tekintsünk egy $[0, T]$ intervallumot, amelyre véletlenszerűen rádobunk n számú pontot. E pontok bármely lehetséges elhelyezkedését úgy tekintjük, mint $,, n''$ számú szállítási időpont egy lehetséges realizációját, mégpedig egyenlően valószínű realizációját, ami azt jelenti, hogy a pontok egyenletes eloszlást követnek a $[0, T]$ időszakaszon. Tehát a beérkezési időpontok egymástól független egyenletes eloszlású valószínűségi változók, amelyeket nagyság szerint rendezve jelöljünk $t_1, ..., t_n$-nel. Ezekben az időpontokban a megrendelt mennyiség n-ed része érkezik be a raktárba. Mekkora az a legkisebb M_0 kezdő raktárkészlet amely az egész időtartam minden egységében (pl. naponta) r egység raktárkészlet-felhasználást (az. ún. kivétet) $1 - \varepsilon$ valószínűséggel biztosítja?

Jelöljük $[0, T]$-vel a vizsgált időtartamot, $M_0(n, \varepsilon)$-nal pedig a keresett kezdőkészletet. Minthogy időegységenként (pl. naponta, hetente) r egység felhasználását tételezzük fel, ezért rT a $[0, T]$ időtartam alatti felhasználás. $R = rT$ mennyiséget rendelünk a rendelési szokásoknak megfelelő idővel korábban a 0 kezdőpont előtt. Jelölje y_t a t időpontig összesen a raktárba érkezett anyag, cikk mennyiségét z_t a t időpontig összesen felhasznált, illetve a raktárból kivett anyagot, cikket. A feltételezések értelmében $z_t = r \cdot t$, azaz a felhasználást az origón átmenő r iránytangensű egyenes reprezentálja. Ezzel szemben az y_t egy lépcsős függvény, amelynek ugrásai a $t_1, ..., t_n$ időpontokban vannak. Tegyük fel, hogy a kezdőpontban M_0 raktárkészlet van. Ha tehát

$$M_0 + y_t \geq rt$$

egyenlőtlenség minden T időpontban legalább $1 - \varepsilon$ valószínűséggel teljesül, akkor az időegységenkénti r felhasználás, raktári kivét az egész $[0, T]$ időintervallumban ε kockázattal biztosítva van. A fenti egyenlőtlenség nyilván ekvivalens az

$$rt - y_t < M_0$$

relációval. Mi még ennél is többet kívánunk meg, nevezetesen

$$\sup_{0 \leq t < T} \{rt - y_t\} < M_0.$$

Így a

$$P(\sup_{0 \leq t \leq T} (rt - y_t) < M_0) = 1 - \varepsilon$$

relációból

$$P(rt - y_t < M_0) \geq 1 - \varepsilon$$

következik.

Tétel:
Ha n elég nagy $(n \geq 20)$, akkor az egész $[0,T]$ időtartam alatti időegységre eső r konstans felhasználást $1-\varepsilon$ szinten biztosító kezdőkészlet

$$M_0(n,\varepsilon) \approx rT\sqrt{\frac{1}{2n}\ln\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Bizonyítás:

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T}(rt-y_t) < M_0\right) = P\left(\sup_{0\leq t\leq T}(\frac{t}{T}-\frac{y_t}{rT}) < \frac{M_0}{rT}\right) = 1-\varepsilon.$$

Bevezetve az $F_n(t) \doteq \frac{y_t}{rT}$ jelölést

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T}(\frac{t}{T}-F_n(t)) < \frac{M_0}{rT}\right) = 1-\varepsilon\text{-t kapjuk.}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$y_t = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{rT}{n}, & t_k < t < t_{k+1} \quad k=1,...,n-1, \\ rT, & t_n < t \leq T. \end{cases}$$

Ekkor az új jelölésekkel

$$F_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq t_1, \\ \frac{k}{n}, & t_k < t < t_{k+1}, \quad k=1,...,n-1, \\ 1, & t_n < t \leq T. \end{cases}$$

Ez nem más, mint a $[0,T]$ egyenletes eloszlás tapasztalati eloszlásfüggvénye, a $\frac{t}{T}$ érték a valódi eloszlásfüggvény. Ekkor a Szmirnov-féle határeloszlás-tétel értelmében

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sqrt{n}\sup_{0\leq t\leq T}\left(\frac{t}{T}-F_n(t)\right) < y\right) = \begin{cases} 1-e^{-2y^2}, & y>0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

Az $y = \sqrt{n}\frac{M_0}{rT}$ helyettesítéssel

$$P\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left(\frac{t}{T}-F_n(t)\right) < \frac{M_0}{rT}\right) \approx 1-e^{-2n\frac{M_0^2}{(rT)^2}} \approx 1-\varepsilon.$$

Ebből

$$\varepsilon \approx e^{-2n\frac{M_0^2}{(rT)^2}},$$

$$\ln \varepsilon \approx -2n \frac{M_0^2}{(rT)^2},$$

$$M_0 \approx rT \sqrt{\frac{1}{2n} \ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Ezt a közelítő megoldást Prékopa András és Zieman Margit adta 1962-ben. Az $M_0(m, \varepsilon)$ egzakt értékeket Szmirnov és tőle függetlenül Birnbaum és Tingey határozták meg. Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

Tétel:

Ha $0 < \frac{M_0}{rT} < 1$, akkor az adott ε értékhez tartozó kezdőkészlet (M_0) a következő összefüggésből határozható meg.

$$\varepsilon = \frac{M_0}{rT} \sum_{j=0}^{[n(1-\frac{M_0}{rT}]} \binom{n}{j} \left(1 - \frac{M_0}{rT} - \frac{j}{n}\right)^{n-j} \left(\frac{M_0}{rT} + \frac{j}{n}\right)^{j-1},$$

ahol $[x]$ az egészrész függvény. Az $\frac{M_0}{rT}$ értékek táblázatban adottak meghatározott n, ε értékekre. Ezt a táblázatot a függelékben találhatjuk meg.

Így pl. $n = 5$ esetben az $\varepsilon = 0,05$ kockázathoz tartozó $\frac{M_0}{rT}$ érték 0,50945. A táblázatban kiolvasható értéket rT-vel szorozva kapjuk a keresett M_0 kezdőkészletet. Ha tehát valamely $[0, T]$ időszakban 5 egyenlő (vagy közel egyenlő) részletekben érkezik be rT mennyiség, akkor az időszak kezdőpontjában 0.50945 rT kezdőkészletnek, azaz az összfelhasználás 50,945% raktáron kell lennie ahhoz, hogy az időegységre eső r felhasználást 95%-os biztonsággal az egész időszak alatt biztosítani tudjuk. Az $\frac{M_0}{rT} < 1$ feltétel azt jelenti, hogy biztosan történik szállítás.

Java applet M_0 meghatározására.

1.3.2.2 Véletlen ütemezésű modell véletlen nagyságú rész-szállítások esetén

(Prékopa-Ziermann modell, 1973)

A megfigyelt anyagok, cikkek egy jelentős részénél azonban nem teljesül az a feltétel, hogy a véletlen időpontokban beérkező részmennyiségek közel állandóak, egyenlőek. A tapasztalat inkább azt mutatja, hogy a résszállítmányok nagysága is jelentős ingadozást mutat. Tegyük fel, hogy az egy-egy alkalommal beérkező mennyiségek között határozottan megállapítható egy olyan legkisebb mennyiség -jelöljük ezt α-val - amelyet, ha szállítás történik, biztosan szállítanak. Később látni fogjuk, hogy ez a megkötés feloldható, amennyiben $\alpha = 0$ is lehet, ami azt jelenti, hogy nincs semmilyen biztos információnk a résszállítások nagyságáról, azok teljes egészükben a véletlentől függnek. Mint minden véletlentől függő mennyiség esetében, úgy most is vagy empirikus úton, vagy a vizsgált jelenség természetéből adódó elméleti hipotézisok alapján feltevéssel kell élnünk a vizsgált jelenséget generáló, azt leíró törvényszerűségekre. A gyakorlattal összhangban az alábbi modell írja le azt az esetet, amikor az utánpótlási rendszer olyan, hogy egy időközön belül $,,n''$ számú véletlen ingadozásnak alávetett résszállítmányok érkeznek a raktárba véletlen időpontokban, de a résszállítmányok összege adott.

Tétel:

Ha ε, α, n adott és

(i) A raktárfeltöltési időpontok bármely lehetséges realizációja $[0, T]$ intervallumon belül egyenlően valószínű,

(ii) Az egy-egy alkalommal beérkező legkisebb mennyiség α, amikor is $0 \leq \alpha \leq \frac{rT}{n}$,

(iii) A biztosan szállított $n\alpha$ mennyiség feletti $rT - n\alpha$ mennyiség bármely, n részre történő véletlen felosztása az n szállítási időpontra egyenlően valószínű,

akkor

$$M_0 \approx rT\sqrt{\frac{ln\frac{1}{\varepsilon}}{2n}}K_n(\alpha),$$

az a legkisebb kezdőkészlet, amely $1-\varepsilon$ valószínűséggel az egész T időszak alatti r intenzittású raktári kivétet biztosítja, ahol

$$K_n(\alpha) = \sqrt{1 + (1 - n\frac{\alpha}{rT})^2}.$$

Bizonyítás:

Tegyük fel, hogy $0 \leq n\alpha \leq rT = R$ ami a (ii) feltétel. A (iii) ekvivalens a következő feltétellel: a megmaradó $R - n\alpha$ mennyiség bármely lehetséges n részre történő felbontása egyenlően valószínű. Feltesszük továbbá, hogy a beérkezési időpontok lehetséges elrendeződései $(t_1, ..., t_n)$ a $[0, T]$-n függetlenek az $R - n\alpha$ mennyiségek lehetséges felosztásaitól. Vezessük be a $\frac{n\lambda}{rT} = \alpha$ jelölést, $0 \leq \lambda \leq 1$. Ekkor a feltétel értelmében az előszállítások nagysága úgy alakul, hogy $\lambda\frac{rT}{n}$ mennyiséget minden alkalommal szállítanak biztosan, a megmaradó $(1 - \lambda)rT$ mennyiséget pedig elosztják az n előszállítás között. Az elosztás modellje olyan, hogy az $(1-\lambda)rT$ hosszúságú szakaszt $n-1$ véletlen és független ponttal n részre osztjuk fel. A kapott részintervallum hosszakat, amelyeket jelölje

$\beta_i (i = 1, ..., n)$ rendre hozzáadjuk az $\alpha = \lambda \frac{rT}{n}$ mennyiségekhez. Az egyes beérkező mennyiségek tehát

$$\lambda \frac{rT}{n} + \beta_1, \lambda \frac{rT}{n} + \beta_2, ..., \lambda \frac{rT}{n} + \beta_n.$$

Jelölje mármost

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_{n-1} < rT$$

a $[0, rT]$ intervallumon egyenletes eloszlásból származó $n-1$ elemű rendezett minta elemeit. Ekkor

$$\beta_i = (1-\lambda)(\tau_i - \tau_{i-1}), (i = 1, ...n, \tau_0 = 0, \tau_n = rT),$$

és ezért az első k szállítás összege

$$\frac{k}{n} \lambda rT + (1-\lambda)\tau_k \quad , \quad k = 1, .., n.$$

Így a beérkezett áru mennyisége

$$y_t = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le t_1, \\ \frac{k}{n} \lambda rT + (1-\lambda)\tau_k, & t_k < t < t_{k+1}, \\ rT, & t_n < t < T. \end{cases}$$

A zavartalan kiáramlást akkor tudja a raktár biztosítani, ha

$$M_0 + y_t > rT,$$

ami nyilván ekvivalens a

$$rT - y_t < M_0$$

relációval. Nyilván ez következik a

$$\sup_{0 \le t \le T} (rt - y_t) < M_0$$

relációból. Így feladatunk az M_0 meghatározása a

$$P\left(\sup_{0 \le t \le T} (rt - y_t) < M_0 \right) = 1 - \varepsilon$$

összefüggésből, mert ebből

$$P(rt - y_t < M_0) \ge 1 - \varepsilon$$

következik. Az előző példához hasonlóan

$$P\left(\sup_{0\le t\le T}\left(\frac{t}{T}-\frac{1}{rt}y_t<M_0\right)\right)\geq 1-\varepsilon$$

egyenlet írható fel, ami viszont az $F_n(\lambda,t)=\frac{y_t}{rT}$ jelölés bevezetésével a

$$P\left(\sup_{0\le t\le T}\left(\frac{t}{T}-F_n(\lambda,t\right)<\frac{M_0}{rT}\right)=1-\varepsilon$$

alakba írható át.

A $\sup\left(\frac{t}{T}-F_n(\lambda,t)\right)$ sztochasztikus folyamatra vonatkozóan Prékopa András (1973) bebizonyította a következő határeloszlás-tételt:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\sqrt{\frac{n}{1+(1-\lambda)^2}}\sup_{0\le t\le T}\left(\frac{t}{T}-F_n(\lambda,t)\right)<y\right)=$$

$$\begin{array}{ll} 1-e^{-2y^2}, & y>0,\\ 0, & y\leq 0. \end{array}$$

Látható, hogy $\lambda=1$ esetén a Szmirnov-tételt kapjuk vissza. Az előző modellhez hasonlóan az

$$y=\frac{M_0}{rT}\sqrt{\frac{n}{1+(1-\lambda)^2}}$$

helyettesítés elég nagy n esetén

$$P\left(\sup_{0\le t\le T}\left(\frac{t}{T}-F_n(\lambda,t)\right)<\frac{M_0}{rT}\right)\approx 1-e^{-2(\frac{M_0}{rT})^2\frac{n}{1+(1-\lambda)^2}}=1-\varepsilon.$$

Ebből

$$\varepsilon\approx 1-e^{-2(\frac{M_0}{rT})^2\frac{n}{1+(1-\lambda)^2}},$$

$$M_0\approx rT\sqrt{\frac{1}{2n}ln\frac{1}{\varepsilon}}\sqrt{1+(1-\lambda)^2}.$$

A $K_n(\alpha)=\sqrt{1+(1-\frac{n\alpha}{rT})^2}$ bevezetésével

$$M_0\approx rT\sqrt{\frac{1}{2n}ln\frac{1}{\varepsilon}}K_n(\alpha)$$

kezdőértéket kapjuk.

Látható, hogy $\alpha=0$ esetén $M_0\approx\sqrt{2}M_1$, ahol M_1 az egyenlő rész-szállítások kezdőértéke. Így általános esetre, vagyis a véletlen szállításra a

$$M_1(n,\varepsilon)\leq M_0(n,\varepsilon)<\sqrt{2}M_1(n,\varepsilon)$$

korlátok adódnak.

Abban az esetben, ha nem a beérkező rész-szállítmányok, hanem csak az időközök egyenlőek, amelyben véletlen résznagyságú teljesítés történik szintén alkalmazható a modell, mert matematikai szempontból csupán egyszerű tengelytranszformációról van szó. Ha tehát rT a rendelt mennyiség, amelyet n alkalommal, mégpedig egyenlő időközönként szállítanak, de oly módon, hogy az rT mennyiség bármely n részre történő felosztása egyenlően valószínű, s egy-egy ilyen felosztás a raktárkészlet feltöltésének egy-egy lehetséges realizációja akkor is a meghatározott $M_0(n, \varepsilon)$ a minimális kezdőkészlet, hisz végül is ugyanazt a mennyiséget szállítják el T időtartam alatt.

A véletlen ütemezésű modell gyakorlati alkalmazásakor kiderült, hogy még olyan esetben is jó közelítését adja a minimális M_0-nak, amikor a feltételek más készletmodell felállítását indokolják. Egy ilyen pl. hogy a beérkezési időközök és a beérkezési tételek egymástól függetlenek.

Megjegyzések:

1. Abban az esetben, ha $\alpha = \frac{rT}{n}$, akkor $K_n(\alpha) = 1$ így visszakapjuk az egyenlő szállítások kezdőértékét.

2. Véges n értékre az
$$\sup_{0 \leq t \leq 1} (t - F_n(t, \lambda))$$
általánosított Kolmogorov-Szmirnov statisztika eloszlását először László Zoltán határozta meg.

   Ugyanő foglalkozik a $\lambda = 0$ vagy $\alpha = 0$ esettel, ami annak felel meg, hogy nincs olyan mennyiség, amelyet biztosan szállítanának, azaz teljesen véletlen a szállítás. Ez az eset *teljesen véletlen ütemezésű szállítás* néven ismert. A szerző bebizonyította, hogy $r = 1$ esetén
$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} (t - F_n(t, 0)) < M^*\right) =$$
$$= \begin{cases} 1 - (1 - M^*)^n (1 + M^*)^{n-1}, & \text{ha } 0 < M^* \leq 1, \\ 0, & \text{ha } M^* \leq 0. \end{cases}$$
   Innen az $1 - (1 - M^*)^n (1 + M^*)^{n-1} = 1 - \varepsilon$ egyenlet megoldásával, azaz
$$\varepsilon = 1 - (1 - M^*)^n (1 + M^*)^{n-1}$$
   egyenletnek M^*-ra történő megoldásával megkapjuk M^*-ot. $M_0 = rTM^*$.

3. László Zoltán megvizsgálja azt az esetet is, amikor a $(0,1)$ időintervallum összigénye nem egyezik meg a beérkező összes mennyiséggel, mert pl. az igény intenzitása különbözik a feltételezett értéktől. Ekkor a

$$\sup_{0\le t\le 1}(\gamma\cdot t - F_n(t,\lambda))$$

statisztika eloszlását kell meghatározni, ahol $\gamma > 0$ konstans (igény intenzitás). A $\lambda = 0$ esetre bizonyítja a

$$P(\sup_{0\le t\le 1}(\gamma\cdot t - F_n(t,\lambda)) < M) =$$

$$= \begin{cases} 1-(1-\frac{M}{\gamma})^n(1+M)^{n-1}, & \text{ha } \max(0,\gamma-1) < M < \gamma, \\ 1, & \text{ha } \gamma \le M, \\ 0, & \text{máskor.} \end{cases}$$

Ha a beérkezési időpont hosszúsága különbözik a felhasználási periódus hosszától, akkor ez a tétel alkalmazható az optimális induló készletszint meghatározására a $\lambda = 0$ feltételezés mellett.

4. Ha a $(0,t)$ intervallumban $(0 \le t \le T)$ igényelt összmennyiséget $\xi(t)$, a közben beérkező összmennyiséget $y(t)$ jelöli, akkor a valószínűséggel korlátozott készletmodelleket egy termék esetére a következő formában fogalmazhatjuk meg:

$$\min M$$

feltéve, hogy

$$P(\sup_{0\le t\le T}(\xi(t)-y(t)) < M) \ge 1-\varepsilon.$$

Az eddig vizsgált modellekben az $y(t)$ sztochasztikus folyamatot az empirikus eloszlásfüggvénnyel, vagy annak általánosított formájával közelítettük és a $\xi(t) = rt \quad (0 \le t \le T)$ feltételezést tettük. Prékopa András és Ziermann Margit megvizsgálta azt az esetet, amikor a $\xi(t)$ igényfolyamatot is az $y(t)$ beérkezési folyamathoz hasonlóan modellezzük. Németh Gyula az $y(t)$ illetve $\xi(t)$ és $y(t)$ beérkezési folyamat mindegyikét homogén Poisson-folyamattal közelíti meg, és megadja a feladat megoldását. Homogén Wiener-folyamattal való közelítését is megvizsgálja. Feltételezi, hogy

$$P(y(t) < x) = \Phi\left(\frac{x-\mu_1 t}{\delta_1\sqrt{t}}\right),$$

$$P(\xi(t) < x) = \Phi\left(\frac{x - \mu_2 t}{\delta_2 \sqrt{t}}\right),$$

Ha $\sigma_1 = \sigma_2$ teljesül, akkor a feladat optimális megoldását az

$$M_0 = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\Phi^{-1}(1 - \frac{\varepsilon}{2})$$

adja. **Példák:**

1. 200 nap alatt $n = 5$ közel egyenlő részletben, de véletlen időpontban érkezik be a megrendelt 2000 mennyiség. Az 5 szállítási időpont egyenlően valószínű a $(0, 200)$ intervallumban. 95%-os biztonsági szinten akarjuk biztosítani akarjuk a napi felhasználást. Mekkora M kezdőkészletet tartsunk fenn?

   Megoldás:

   $$M \approx 10 \cdot 200\sqrt{\frac{ln\frac{1}{0{,}05}}{2 \cdot 5}} = 1095 \text{ db.}$$

   Ez azonban n kicsi értéke miatt durva megoldás. A megfelelő táblázat szerint 5 és 0,05 értékhez $\frac{M}{rT} = 0,50945$, ebből $M = 10 \cdot 200 \cdot 0.50945 \approx 1019$ db. A nagy biztonsághoz nagy kezdőkészlet kell.

2. 500 napon át a termeléshez napi 10 db alkatrészt kell biztosítani 90%-os valószínűséggel. 20 részletben érkezik a szükséges alkatrész egy-egy alkalommal legalább 200 db-ot szállítanak. A szállítási időpontok bármely megvalósulása egyenlően valószínű. A megmaradó alkatrész 20 szállítási időpontra történő felosztása egyenlően valószínű.

   a, Mekkora legyen a kezdőkészlet?

   Megoldás:

   $$T = 10, n = 20, \alpha = 200, n\alpha = 4000,$$

   megmarad 1000 db

   $$M \approx 10 \cdot 500\sqrt{\frac{ln\frac{1}{0{,}10}}{2 \cdot 20}} \cdot \sqrt{1 + \left(1 - 20 \cdot \frac{200}{10 \cdot 500}\right)^2} \simeq 1221 \text{ db.}$$

   $M \simeq 1221$ db.

   b, Mennyivel nagyobb ez az egyenlő részszállítások során kapott kezdőszinteknél?

$$M_1 \begin{array}{ll} = 1158 & \text{db pontos érték,} \\ \approx 1200 & \text{db közelítő érték.} \end{array}$$

$$M - M_1 \begin{array}{ll} = 63 & \text{db,} \\ \approx 21 & \text{db.} \end{array}$$

1.3.3 Statikus sztochasztikus készletmodell költségtényezőkkel

1.3.3.1 Kezdő költség nélkül

(i) Kezdő raktárkészlet nélkül

Egy árucikkből $(0, T)$ időintervallumban kell ellátnunk a szükségleteket a raktárkészletből. A szükséges ξ mennyiség a véletlentől függ. Ezeket a valószínűségeket előzetes tapasztalatból ismertnek tételezzük fel. Ekkor ξ eloszlásfüggvénye a $p_r = P(\xi = r),$ jelölés mellett

$$P(\xi < r) = F(r) = p_0 + \ldots + p_{r-1}.$$

Legyen raktári készletünk S egység. Ha kevesebb készlettel rendelkezünk, mint a T idő alatt ténylegesen fellépő igény $(S < r)$ akkor a hiány miatt minden egység után h Ft veszteség éri a raktárt (pl. elesik bizonyos nyereségtől). Ez a *hiányköltség*. Ha viszont a raktáron eladatlan készlet marad $(S > r)$, akkor a többlet minden egysége után u Ft *veszteség* ér bennünket (pl. amiatt, hogy az áru öregszik, vagy amiatt, hogy nem tudunk újat termelni). Ez a *fenntartási költség*. Ha készlet darabját h Ft-ért adjuk, akkor a várható bevétel S raktárszintnél S igény esetén

$$h \sum_{s=1}^{\infty} s p_s = hE(\xi).$$

Ezenkívül jelölje $c < h$ az egységenkénti *vételárat*. Látható, hogy mind a három költség csak a darabszámtól függ.

Kérdés:

Mekkora legyen az az S_0 raktárkészlet, amely várható értékben a minimális veszteséget eredményezi. A $C(s)$ költség vagy veszteség valószínűségi változó, így $E(C(s))$-t kell minimalizálni. $r < S$ db esetén $S - r$ feleslegünk $u \sum_{r=0}^{S} (S - r) p_r$ Ft várható veszteséget jelent, míg $r > S$ esetén $r - S$ db hiányunk van, amiért átlagosan $h \sum_{r=S+1}^{\infty} (r - S) p_r$ Ft-ot kell fizetni. A vételár $c \cdot S$.

Nézzük meg, hogyan lehet kiszámítani $E(C(S))$ minimumát.

$$E(C(S)) = u\sum_{r=0}^{S}(S-r)p_r + h\sum_{r=S+1}^{\infty}(r-S)p_r + c\cdot S.$$

$$E(C(S+1)) = u\sum_{r=0}^{S+1}(S+1-r)p_r + h\sum_{r=S+2}^{\infty}(r-S-1)p_r + c\cdot(S+1) =$$

$$= u\sum_{r=0}^{S}(S+1-r)p_r + h\sum_{r=S+1}^{\infty}(r-S-1)p_r + c\cdot(S+1) =$$

$$= u\sum_{r=0}^{S}(S-r)p_r + u\sum_{r=0}^{S}p_r + h\sum_{r=S+1}^{\infty}(r-S)p_r - h\sum_{r=S+1}^{\infty}p_r + c\cdot(S+1) =$$

$$= u\sum_{r=0}^{S}(S-r)p_r + h\sum_{r=S+1}^{\infty}(r-S)p_r + c\cdot S + u\sum_{r=0}^{S}p_r - h\sum_{r=S+1}^{\infty}p_r + c =$$

$$E(C(S)) + u\sum_{r=0}^{S}p_r - h(1-\sum_{r=0}^{S}p_r) + c =$$

$$E(C(S)) + (u+h)\sum_{r=0}^{S}p_r + c - h =$$

$$E(C(S)) + (u+h)P(r\le S) + c - h$$

Hasonlóan

$$E(C(S-1)) = E(C(S)) - (u+h)P(r\le S-1) + h - c.$$

Tételezzük fel, hogy S_0-olyan, hogy

$$E(C(S_0-1)) > E(C(S_0)), \quad E(C(S_0)) < E(C(S_0+1)).$$

Ekkor az előzőekből

$$E(C(S_0+1)) - E(C(S_0)) = (u+h)P(r\le S_0) + c - h > 0$$

és

$$E(C(S_0-1)) - E(C(S_0)) = -(u+h)P(r\le S_0-1) + h - c > 0.$$

Így

$$\frac{h-c}{u+h} < P(r\le S_0) \text{ és } \frac{h-c}{u+h} > P(r\le S_0-1).$$

Vagyis

$$P(r \leq S_0 - 1) < \frac{h-c}{u+h} < P(r \leq S_0).$$

Ha

$$P(r \leq S_0 - 1) < \frac{h-c}{u+h} = P(r \leq S_0)$$

akkor $E(C(S_0+1)) = E(C(S_0))$, vagyis S_0 és S_0+1 egyaránt optimumhelyek. Hasonlóan, ha

$$P(r \leq S_0 - 1) < \frac{h-c}{u+h} < P(r \leq S_0),$$

akkor $S_0 - 1$ és S_0 optimumhelyek. Folytonos esetre megfogalmazva a problémát

$$\min_S (E(C(S)) = u \int_0^S (S-x) f(x) dx + h \int_S^\infty (x-S) f(x) dx + c \cdot S$$

függvény minimumát keressük, ha $F(x) = P(\xi < x), F(x) = \int_0^x f(u)du$, és létezik $E(\xi)$.

Az analízisben jól ismert módszerek alapján $\frac{dE}{dS} = 0$ egyenletet kell megoldani S-re. Látható, hogy paraméteres integrált kell deriválnunk, melyre ismert a következő összefüggés

$$\frac{d}{dy} \int_{a(y)}^{b(y)} g(x,y) dx = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} dx +$$

$$+ g(b(y), y) \frac{db(y)}{dy} - g(a(y), y) \frac{da(y)}{dy}.$$

Látható, hogy

$$\int_0^\infty (S-x) f(x) dx = S - E(\xi).$$

Mivel

$$\int_0^S (S-x) f(x) dx + \int_S^\infty (S-x) f(x) dx = S - E(\xi),$$

így ezen kifejezés s szerinti deriváltja 1.

Az $\int_0^S (S-x) f(x) dx$ függvénynél

$$b(S) = S, a(S) = 0, g(x,S) = f(x)(S-x),$$

így

$$\frac{d}{dS} \int_0^S (S-x) f(x) dx = \int_0^S f(x) dx + f(S)(S-S) \cdot 1 - f(0)(S-0) \cdot \frac{d0}{dS} =$$

$$\int_0^S f(x)dx.$$

Számítsuk ki a $\frac{d}{dS}\int_S^\infty (x-S)f(x)dx$ mennyiséget.
Figyelembe véve a

$$\frac{d}{dS}\int_0^S (S-x)f(x)dx = \int_0^S f(x)dx$$

összefüggést

$$\frac{d}{dS}\int_S^\infty (S-x)f(x)dx = 1 - \int_0^S f(x)dx = \int_S^\infty f(x)dx,$$

melyből

$$\frac{d}{dS}\int_S^\infty (x-S)f(x)dx = -\frac{d}{dS}\int_S^\infty (S-x)f(x)dx = -\int_S^\infty f(x)dx$$

adódik. Vagyis

$$\frac{dE}{dS} = u\int_0^S f(x)dx - h\int_S^\infty f(x)dx + c =$$
$$= uF(S) - h[1-F(S)] + c = F(S)[u+h] + c - h = 0,$$

melyből

$$F(S) = \frac{h-c}{u+h}.$$

(ii) Kezdő raktárkészlet esetén

Legyen $L(S) = h\int_S^\infty (x-S)f(x)dx + u\int_0^S (S-x)f(x)dx$.
Így x_0 kezdőkészlet esetén a várható költség

$$\begin{array}{cl} c(S-x_0)+L(S), & \text{ha } S > x_0, \\ L(x_0), & \text{ha } S = x_0. \end{array}$$

Vegyük észre, hogy a $c\cdot S + L(S)$ ugyanaz a várható költség, mint az (i) esetben.
Legyen S_0 az a készlet, amely minimalizálja a $c\cdot S + L(S)$ függvényt, azaz

$$F(S_0) = \frac{h-c}{h+u}.$$

Látható, hogyha $x_0 \geq S_0$, akkor $\forall S \geq x_0$ esetén

$$c\cdot S + L(S) \geq cx_0 + L(x_0).$$

Így
$$c(S - x_0) + L(S) \geq L(x_0),$$
vagyis
$$\min_{S \geq x_0} (c(S - x_0) + L(S)) \geq L(x_0).$$
Azaz nem érdemes rendelni.

Másrészt, ha $S_0 > x_0$, akkor nyilvánvalóan
$$\min_{S \geq x_0}(c(S - x_0) + L(S)) = \min_{S \geq x_0}(L(S) + c \cdot S - cx_0) =$$
$$L(S_0) + c \cdot S_0 - cx_0 = L(S_0) + c(S_0 - x_0).$$
Így az optimális stratégia
$$\begin{array}{cl} \text{nem rendelünk}, & \text{ha } S_0 \leq x_0, \\ S_0 - x_0\text{-at rendelünk}, & \text{ha } x_0 < S_0. \end{array}$$

Hasonló eredményt kapunk, ha a költségfüggvények nem lineárisak. A hiányfüggvény legyen
$$\begin{array}{cl} h(x - S), & \text{ha } S \leq x, \\ 0, & \text{máskor.} \end{array}$$
A többlet büntetésfüggvénye legyen
$$\begin{array}{cl} u(S - x), & \text{ha } x \leq S, \\ 0, & x > S. \end{array}$$
nem szükségképpen lineáris függvények. Tegyük fel, hogy x_0 kezdőkészlettel rendelkezünk. Ekkor a teljes költség várható értéke $E(C(S)) = C(S - x_0) + L(S)$, ahol
$$L(S) = \int_S^\infty h(x - S)f(x)dx + \int_o^S u(S - x)f(x)dx.$$
Az optimális politikát vagy stratégiát az alábbi feltétellel és minimalizálással kapjuk
$$\min_{S \geq x_0}\{C(S - x_0) + L(S)\}.$$
Nem nehéz belátni, hogyha $u(y)$ és $h(y)$ függvények szigorúan konvexek, akkor a feladat megoldását a
$$\frac{dL(S)}{dS} + c = 0$$
egyenlet gyöke adja.

Így az optimális stratégia

$$\begin{array}{rl} \text{nem rendelünk}, & \text{ha } x_0 \geq S_0, \\ S_0 - x_0\text{-t rendelünk}, & \text{ha } S_0 > x_0, \end{array}$$

ahol S_0 a $\frac{dL}{dS} + c = 0$ egyenlet gyöke.

Megjegyzések.

1. Könnyű látni, hogy $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0$ esetén

$$S_0 = \frac{1}{\lambda} ln \left(\frac{u+h}{u+c} \right).$$

2. $\xi \epsilon E[a, b]$ esetén, azaz ha

$$F(x) = \begin{array}{cl} \frac{x-a}{b-a}, & x \epsilon [a, b], \\ 0, & x < a, \\ 1, & x > b, \end{array}$$

akkor

$$S_0 = \frac{a(c+u) + b(u-c)}{b+u}.$$

3. A minimális értéket úgy kapjuk meg, hogy kiszámítjuk az $E(C(S_0))$-t. pl. exponenciális eloszlású igény esetén az átlagos költség x_0 kezdőkészlet mellett, ha $S_0 > x_0$

$$C(S_0 - x_0) + uS_0 + \frac{1}{\lambda}(u+h)e^{-\lambda S_0} - \frac{1}{\lambda}u,$$

egyenletes eloszlás esetén

$$C(S_0 - x_0) + \frac{1}{2(b-a)}[S_0^2(u+h) + hb(b - 2S_0)].$$

4. A Weibull-eloszlás esetén, azaz ha

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x^\alpha}, \;\; x > 0, \;\; \lambda > 0, \;\; \alpha > 0,$$

akkor

$$S_0 = \sqrt[\alpha]{\frac{1}{\lambda} ln \frac{h+u}{u+c}}$$

Ha $x_0 \geq S_0$ akkor $E(C(S_0)) = L(x_0)$.

Példák:

1. Egy gyárból generátorokat rendeltünk. A generátorokkal megrendelt pótalkatrészek ára 500 Ft/db. Az alkatrészek a véletlentől függően hibásodnak meg, de még állás közben is elöregednek, használhatatlanok lesznek. A hibás alkatrészeket azonnal ki kell cserélnünk egy a raktáron lévő újjal. Ha nincs alkatrész a raktáron, akkor a generátor leáll. Az ebből eredő kár és egy alkatrész pótlólagos beszerzési költsége 10000 Ft. Ha a T időszak végére felesleges alkatrészek maradnak, ezeket többé nem tudjuk felhasználni, a veszteség darabonként 500 Ft. Ha r jelöli az igényelt pótalkatrészek számát a valószínűségeloszlás a következő

   $$p_0 = 0.90,\ p_1 = 0.05,\ p_2 = 0.02,\ p_3 = 0.01,$$

   $$p_4 = 0.01,\ p_5 = 0.01,\ p_6 = 0.00.$$

   Meghatározandó a minimális alkatrészek száma, mellyel az összköltség várható értéke a minimális lesz!

   Megoldás:

   $$h = 10\,000,\ \ n = 500,\ \ c = 0.$$

   Ekkor

   $$\frac{h}{h+u} = \frac{10000}{10500} = 0.952.$$

   Ezért olyan $F(r) = \sum_{x<r} p_x$ értéket kell keresni, melyre

   $$F(S_0 - 1) \leq \frac{h}{h+u} \leq F(S_0),$$

   ilyen $S_0 = 1$ és $S_0 = 2$. źvatosságból a nagyobbat szokás választani.

2. Egy újságárus az újságok db-t 70 fillérért veszi és 1 Ft-ért adja, a fenntartási költség 10 fillér/db. A kereslet egyenletes eloszlású 200 és 300 db között. Határozzuk meg a beszerzendő újságok optimális számát, és a minimális veszteség nagyságát!

   Megoldás:

   $h = 1$ Ft, $c = 0,70$ Ft, $u = 0,10$ Ft, $a = 200$ db, $b = 300$ db

   $$S_0 = \frac{200(0,1+0,7) + 300(1-0,7)}{1+0,1} \approx 228 \text{ db},$$

   $$E(C(S_0)) = 211 \text{ Ft}.$$

3. Egy hetente előállított cikk iránti kereslet ξ, a $\xi = r$ kereslet bekövetkezési valószínűsége p_r. A tapasztalatok alapján ξ eloszlása $p_0 = 0.04,\ p_5 = 0.20,\ p_{10} = 0.37,\ p_{15} = 0.30,\ p_{20} = 0.009$. A hetente eladatlan cikkek vesztesége 2 Ft/db, a hetente jelentkező hiány vesztesége 24 Ft/db. Milyen legyen az optimális készletszint, hogy minimális legyen a várható veszteség?
$$\frac{h}{h+u} = \frac{24}{24+2} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13} \approx 0.92,$$
$F(15) = 0.91$ így $S_0 = 16$ db.

4. Egy műhelyben m gép működik és S számú szerelő $(m > S)$ javítja a meghibásodásokat. Ha meghibásodik egy gép, a szerelő azonnal javítja. Egy szerelő egyszerre csak egy gépet javít. Ha nincs szabad szerelő, a gép áll. Annak a valószínűsége, hogy egyszerre r gép áll $p_r \quad (r = 0, ..., m)$. A gépleállásból eredő veszteség h Ft/gép havonta, a szerelő u Ft/szerelő havonta.

   a, Határozzuk meg a szerelők azon optimális számát, mely mellett a veszteségfüggvény várható értéke minimális lesz!

   b, $h = 20\,000, n = 4\,000$, mennyi a szükséges szerelők száma, ha a tapasztalatok szerint a havonta szükséges szerelők száma az alábbi eloszlású, vagy ami ezzel ekvivalens a gépleállások számának eloszlása

r	0	1	2	3	4	5	6	≥ 7
p_r	0.01	0.05	0.07	0.15	0.20	0.30	0.20	0.02

   c, Milyen legyen h és u hogy az optimális megoldás $S_0 = 6$ legyen?

   d, Milyen u és h esetén érdemes 4 szerelőt alkalmazni?

   e, Milyen munkabérű szerelők esetén tervezzük 7 szerelő beállítását?

   f, Az eloszlás változik, mégpedig majdnem egyenletesre.

r	0	1	2	3	4	≥ 5
p_r	0.15	0.20	0.20	0.18	0.18	0.09

   Milyen u és h esetén célszerű 5 vagy több szerelőt foglalkoztatni?

Megoldás:

   a, A probléma ugyanaz, mint a költségmodellnél, a kezdőkészletnek megfelel a szerelők száma, az igény pedig a géphibásodások. Így
$$F(S_0 - 1) \leq \frac{h}{h+u} \leq F(S_0).$$

b, $\frac{20\,000}{24\,000} = 0,833$ így 6 szerelő szükséges.

c, $0,78 \leq \frac{h}{h+u} < 0,98, \qquad 0,2h < u < 0,28h$ esetén 6 szerelő szükséges. $h = 20\,000$ esetén a szerelők átlagbére 400 és 5600 közé esik.

d,

$$0,28 < \frac{h}{h+u} < 0,48, \qquad 1,08h < u < 2,57\,\text{h.}$$

Ha a szerelők átlagbére magas, csökken a szerelők száma.

e, 7 szerelő esetén

$$0,98 < \frac{h}{h+u} < 1.$$

Ha $h = 20\,000$ Ft, ekkor $0 < u < 400$ ekkor a munkadíj nagyon alacsony.

f, Akkor kell 5 vagy több szerelőt foglalkoztatni, ha $0,91 < \frac{h}{h+u} < 1$, melyből $0 < u < 0,11h$ következik.

1.3.3.2 Kezdő költséggel

Tegyük fel, hogy a rendelés megkezdésekor K összeget kell fizetnünk (pl. rendelési díj). Mint az előző fejezetben legyen

$$L(S) = h\int_S^\infty (x-S)f(x)dx + u\int_0^S (S-x)f(x)dx$$

ún. várható hiány + fenntartási költségfüggvény. Így x_0 kezdőkészlet esetén a várható költség

$$\begin{array}{ll} K + c(S - x_0) + L(S), & \text{ha } S > x_0, \\ L(x_0), & \text{ha } S = x_0. \end{array}$$

Vegyük észre, hogy $c \cdot S + L(S)$ ugyanaz a várható költség, mint amit az előző fejezetben vettünk. Legyen S_0 az a készlet amely minimalizálja $c \cdot S + L(S)$ függvényt, azaz $F(S_0) = \frac{h-c}{h+u}$. Legyen s_0 az a legkisebb értéke S-nek, melyre

$$c \cdot s_0 + L(s_0) = K + cS_0 + L(S_0), \;\; s_0 < S_0.$$

(i) Látható, hogy ha $x_0 \geq S_0$, akkor

$$K + c \cdot S + L(S) > cx_0 + L(x_0), \qquad \forall S > x_0,$$

mivel

$$c \cdot S_0 + L(S_0) < c \cdot S + L(S), \qquad \forall S \neq S_0.$$

Ezért $\forall S > x_0 \geq S_0$-ra

$$c \cdot x_0 + L(x_0) < c \cdot S + L(S) < c \cdot S + L(S) + K.$$

Innen

$$K + c(S - x_0) + L(S) > L(x_0),$$

ahol a baloldal az x_0 kezdőkészlet S szintre történő feltöltés költsége és $L(x_0)$ az átlagos költség, ha nem történik rendelés. Így ebből látható, hogy $x_0 > S_0$ esetben az az optimális taktika ha nem rendelünk.

(ii) Abban az esetben, ha $s_0 \leq x_0 < S_0$ és $x_0 < S$, akkor

$$K + c \cdot S + L(S) \geq cx_0 + L(x_0),$$

mivel

$$cS + L(S) > cS_0 + L(x_0),$$

így

$$K + cS + L(S) \geq K + cS_0 + L(S_0) = cs_0 + L(s_0) \geq cx_0 + L(x_0).$$

Ebből

$$K + c(S - x_0) + L(S) \geq L(x_0).$$

Így a nem rendelés ismét olcsóbb, mint a rendelés.

(iii) Végül, ha $x_0 < s_0 (< S_0)$ akkor

$$\min_{S \geq x_0} \{K + cS + L(S)\} = K + cS_0 + L(S_0) = cs_0 + L(s_0)$$
$$\leq cx_0 + L(x_0),$$

ebből

$$\min_{S \geq x_0} \{K + c(S - x_0) + L(S)\} = K + c(S_0 - x_0) + L(S_0) \leq L(x_0).$$

Így $K + c(S_0 - x_0) + L(S_0)$ a minimális költség, ami $x_0 < s_0$ esetén létrejön.

Ezek után az optimális eljárás:

$$\begin{array}{ll} x_0 < s_0, & s_0 - x_0 \text{egységet rendelünk,} \\ x_0 \geq s_0, & \text{nem rendelünk.} \end{array}$$

$F(S_0) = \frac{h-c}{h+u}$, és s_0 az a legkisebb érték, amelyre

$$c \cdot s_0 + L(s_0) = K + cS_0 + L(S_0).$$

Nem nehéz belátni, hogy nemlineáris büntetőköltségek esetén, feltéve, hogy a hiány és fenntartási függvények szigorúan konvexek, az optimális rendelési eljárás a következő:

$$\begin{array}{ll} x_0 < s_0, & s_0 - x_0 \text{egységet rendelünk,} \\ x_0 \geq s_0, & \text{nem rendelünk.} \end{array}$$

ahol S_0 a

$$c + \frac{dL(S)}{dS} = 0$$

megoldása, és s_0 az a legkisebb érték, amely kielégíti a

$$c \cdot s_0 + L(s_0) = K + c \cdot S_0 + L(S_0)$$

egyenletet. Nyilvánvaló, hogy ezen modell magában foglalja az összes előzőt K, illetve x_0 alkalmas megválasztásával. $K = 0$ esetén az előző fejezetben tárgyalt modellt kapjuk vissza.

Megjegyzések.

1. Ha

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

akkor bevezetve a $\Delta = S_0 - s_0$ jelölést

$$\Delta \approx \sqrt{\frac{2K}{(c+u)\lambda}}.$$

Ezt a következőképpen láthatjuk be. Jól ismert, hogy kezdőkészlet nélkül

$$S_0 = \frac{1}{\lambda} ln \left(\frac{u+h}{u+c} \right).$$

Tetszőleges S esetén

$$cS + L(S) = cS + u \int_0^S (S-x) f(x) dx + h \int_S^\infty f(x) dx.$$

$f(x)$-et behelyettesítve

$$L(S) = (c+u)S + \frac{1}{\lambda}(u+h)e^{-\lambda S} - \frac{1}{\lambda} u.$$

Így a

$$c \cdot s_0 + L(s_0) = K + c \cdot S_0 + L(S_0)$$

egyenletet a

$$(c+u)s_0 + \frac{1}{\lambda}(u+h)e^{-\lambda s_0} = K + (c+u)S_0 + \frac{1}{\lambda}(u+h)e^{-\lambda S_0} - \frac{1}{\lambda}u$$

alakban írhatjuk fel. Ebből $e^{\lambda S_0}$-al beszorozva, S_0-t visszaírva

$$(u+c)s_0\frac{u+h}{u+c} + \frac{1}{\lambda}(u+h)e^{\Delta\lambda} = K\frac{u+h}{u+c} + (c+u)S_0\frac{u+h}{c+u} + \frac{u+h}{\lambda}.$$

Elvégezve a megfelelő műveleteket, rendezve

$$e^{\Delta\lambda} = \frac{2K}{c+u} + \lambda\Delta + 1$$

egyenletet kapjuk. $e^{\Delta\lambda}$-t Taylor sorba fejtve a 0 közül

$$1 + \Delta\lambda + \frac{(\Delta\lambda)^2}{2} \approx \frac{2K}{c+u} + \lambda\Delta + 1$$

$$\Delta \approx \sqrt{\frac{2K}{\lambda(u+c)}}.$$

Ebből

$$s_0 = S_0 - \sqrt{\frac{2K}{\lambda(u+c)}}.$$

2. $\xi \epsilon E[a,b]$ esetén,

$$S_0 = \frac{a(c+u) + b(h-c)}{h+u}.$$

Ekkor

$$L(S) = u\int_0^S (S-x)\frac{1}{b-a}dx + h\int_S^b (x-S)\frac{1}{b-a}dx =$$

$$= \frac{1}{2(b-a)}[S^2(u+h) + hb(b-2S)].$$

A

$$cs_0 + L(s_0) = K + c \cdot S_0 + L(S_0)$$

egyenletből kapjuk, hogy

$$K + c(S_0 - s_0) + \frac{1}{2(b-a)}[(u+h)(S_0^2 - s_0^2) - 2hb(S_0 - s_0)] = 0.$$

Ezt kell megoldani s_0-ra. Az egyenletet rendezve

$$\frac{u+h}{2(b-a)}s_0^2 + \frac{b(c-h) - ca}{b-a}s_0 + \frac{1}{2(b-a)}[2hbs_0 - (u+h)S_0^2] - K - cS_0 = 0.$$

Konkrét c, h, u, k esetén s_0 meghatározható.

3. A minimális költségek

   (i) exponenciális eloszlásnál

   $x_0 < s_0$

$$K + (c+u)(s_0 - x_0) + \frac{1}{\lambda}(u+h)e^{-\lambda(S_0 - x_0)} - \frac{1}{\lambda}u =$$

$$K + c(S_0 - x_0) + L(S_0).$$

   $x_0 \geq s_0$

$$+u \cdot x_0 + \frac{1}{\lambda}(u+h)e^{-\lambda x_0} - \frac{1}{\lambda}u = L(x_0).$$

   (ii) Egyenletes eloszlásnál

   $x_0 < s_0$

$$K + \frac{1}{2(b-a)}[(s_0 - x_0)^2(u+h) + hb[b - 2(s_0 - x_0)]] + c(S_0 - x_0),$$

   $x_0 \geq s_0$

$$\frac{1}{2(b-a)}[x_0^2(u+h) + hb(b - 2x_0)].$$

   Ez $x_0 = 0$ esetben magában foglalja a kezdőkészlet nélküli modellt és mindenhol az első rész érvényes.

Példa:

1. Határozzuk meg az optimális rendelési politikát, ha az igény egyenletes eloszlású a [0,20] intervallumon és a fellépő költségek:

fenntartási:	1	Ft/db,
hiány :	3	Ft/db,
beszerzési :	2	Ft/db,
kezelési :	0,9	Ft/db.

   Mennyi a maximális átlagos nyereség?

   ($S_0 = 5, E(C(5)) = 28.4$ Ft átlagos veszteség, 1.6 Ft az átlagos maximális nyereség)

2. Hogyan alakul az optimális politika, ha a kezdőkészlet s_0 =2 db ?

   a, 1 db (rendel 4 db-ot)

   b, 3 db (nem rendel)

1.3.4 Feladatok

1. Egy készletezési rendszerben évente konstans intenzitású felhasználással összesen 2400 db valamely cikkre van szükség. Hiányt nem engedünk meg. Egy tétel beszerzésének állandó költsége 22 Ft, a készlet egy darabjára eső raktározási költség évi 5 Ft. A beszerzés csak 100-as csomagolású tételnagyságokban lehetséges. Mekkora az optimális tételnagyság és a készletezés minimális költsége? A tételnagyságokra vonatkozó feltétel miatt hány %-kal nőtt az összköltség. (200 db, 764 Ft, 9%)

2. Egy anyagból 200 napon át egyenletesen mindig ugyanannyit igényelnek. Az összes igény 600 tonna. Egy beszerzés fix költsége 750 Ft. A tárolás költsége 5 Ft/tonna naponként. A termékből nem engedhető meg hiány. Milyen részletekben rendeljük meg a 600 tonnát hogy az összköltség a lehető legkisebb legyen? Mennyi ez a minimális érték? ($q_0 = 30$ tonna, t_0=10 nap, K_T=30.000 Ft)

3. 30 napi termeléshez egy nyersanyagból 40 db a napi igény. Általában a rendeléstől számítva 10 napra vállalják a szállítást, azonban a véletlentől függően a 10 naphoz viszonyítva a késés:

késés(nap)	1	2	3	4
megfigyelt gyakoriság	1	2	4	3

90%-os valószínűséggel kívánjuk biztosítani a termelést. Mekkora legyen a kezdő raktárkészlet? (580 db)

4. Egy árucikkből a kereskedelem 120 napra összesen 1200 egységet igényel. 30 naponként 300 egység szállítása biztos, csak azt nem tudjuk, melyik napon szállítunk. A szállítási idő a (0,30) időintervallumban egyenletes eloszlású. 80%-os biztonsággal akarjuk ellátni az igényeket. Mekkora kezdő raktárkészlet kell minden 30 napos egység kezdetén? (M=285 db)

5. Határozzuk meg az optimális rendeléspolitikát, ha az igény eloszlásának sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & \text{ha } \epsilon[0,20] \\ 0, & \text{máskor} \end{cases}$$

és a költségek: fenntartási: 1 Ft/db,
hiány : 3 Ft/db,
kezdési : 0,9Ft/db,
beszerzési : 2 Ft/db.

Mennyi az átlagos minimális veszteség?

(s_0=2, S_0=5, $E(C(5))$=19,4 Ft)

6. Hogyan alakul az optimális politika, ha a kezdőkészlet

   a, 1 db (rendel 4 db-ot)

   b, 3 db (nem rendel)

7. Határozzuk meg az optimális rendelési politikát, ha az igény eloszlása

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

költségek:	fenntartási:	1	Ft/db,
	hiány :	3	Ft/db,
	kezdési :	0,9	Ft/db,
	beszerzési:	2	Ft/db.

(nem rendelünk)

8. Egy raktárnak egy éven át napi 10 db intenzitással kell biztosítani az anyagellátást. A beszerzési költségek 10 Ft független költség, 5 Ft/db vásárlási költség,raktározási költség 0,5 Ft/db/nap. A hiány költsége 30 Ft/db/nap Hányszor kell rendelni, milyen gyakran, és hány db-ot? Mekkora lesz a minimális költség? (S_0=45 db, q_0=46 db, n_0=80, t_0=4,5 nap K_0=25992 Ft)

9. Egy raktár felé érkező igény eloszlása:

r	0	1	2	3	4	5	6
$p(r)$	0,2	0,3	0,2	0,12	0,05	0,02	0,01

A hiány költsége 230 Ft/db, fenntartási költség 20 Ft. Mekkora legyen a kezdeti raktárszint és mekkora lesz a minimális költség? (S_0=3 vagy 4, $K = 61,6$ Ft)

10. Egy áru iránti kereslet eloszlása exponenciális 3 db átlaggal. Az áru eladási ára 230 Ft/db, fenntartási költsége 20 Ft/db. Mekkora legyen a kezdeti raktárszint és mennyi a minimális veszteség értéke? ($S_0 = 8$db, $K = 152$ Ft)

11. Egy áru tételének beszerzési ára 1000 Ft/db. A tétet fix költsége $50\,000$ Ft, a raktár 1 Ft értékű készletének időegységre jutó költsége $3 \cdot 10^{-4}$ Ft/Ft/nap.

Ha egy évre $75\,000$ db-ot igényelnek a felhasználók, milyen időközönként, hányszor kell elvégezni a raktárpótlást? Mekkora lesz a költség? Hány db-ot rendeljünk a raktárba egyszerre? (t_0=40 nap, q_0=8333 db, 9-szer, $K_0 =$ $75\,903\,000$ Ft)

12. Egy gépalkatrész-gyárosnál $120\,000$ db kapcsolótáblát rendelnek, amelyeket egy év alatt kell szállítani. Milyen ütemben töltse fel készletét, ha szállítási késedelem nem engedhető meg? A megrendelő egyforma ütemben kéri a szállítást hiány nélkül. Az alkatrész önköltségi ára $300\,000$ Ft, raktározási költsége $3,5$ Ft/db/nap. Mekkora legyen a tételenkénti darabszám, az érkezési időszakasz és a minimális költség? ($q_0 = 7\,559$, t_0=22,7 nap, K_0=$9\,525\,000$ Ft)

13. Tegyük fel, hogy az előző példánál hiány is felléphet 35 Ft/db/nap költséggel. Mekkora legyen a raktárszint az áruérkezések után, hány db hiány engedhető meg, milyen időszakokban érkeznek az áruk, és mekkora a minimális költség? (S_0=$7\,210$ db, 720 db hiány engedhető, t_0=24 nap, K_0=$9\,077\,000$ Ft)

14. Egy áru iránti kereslet eloszlása

r	0	1	2	3	4	5	6
$p(r)$	0,9	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01	0,00

A feleslegből adódó veszteség 50 Ft/db, a hiány okozta veszteség 1000 Ft/db. Mekkora legyen a raktár kezdőkészlete és mennyi a lesz minimális veszteség? (S_0=2, K_0=152 Ft)

15. Milyen korlátok közé eshet a hiányköltség az előző példa esetében, ha az optimális kezdőkészlet 3 db? (1620 Ft < $h < 2450$ Ft)

16. A raktár egy bizonyos áru beszerzésekor a következő árakat fizeti: 1000 Ft, ha 500 db-nál kevesebbet vásárol és 500 db után 75 Ft kedvezményt kap darabonként. A mennyiségtől független költség $35\,000$ Ft, a raktározási $6 \cdot 10^{-3}$ Ft/Ft/idő. Egy év alatt 2400 db-ot kell leszállítania valamely vállalathoz ebből a fajtából. Mekkora a gazdaságos mennyiség a beszerzéseknél? (q_2=917 db)

17. Tekintsük az előző példát azzal a különbséggel, hogy 1000 db után kap kedvezményt a raktár. Hogyan alakul ekkor a gazdaságos készletezés, és mennyi lesz a minimális költség? (Q=1000 db, $K(Q)$=$2\,407\,680$ Ft)

18. A feltételek változatlanok a Q=4000 db kivételével. Milyen lesz az optimális rendelés és mekkora költség eredményez? (q_1=882, K_0=$2\,594\,280$ Ft)

19. Egy áru iránti kereslet sűrűségfüggvénye

$$f(r) = 0,02(1 - \frac{r}{100)}), \qquad 0 \leq r \leq 100.$$

A többlettel kapcsolatos költség 50 Ft/db, a hiány költsége 300 Ft/db. Mekkora az optimális kezdőszint és mekkora a várható minimális költség?

(S_0=63, K=2070 Ft)

20. Egy dohányárus az áruit 3 Ft/db költségen szerzi be és 5 Ft/db áron adja el. A fenntartási költség 1 Ft/db. A rendelési költség 64 Ft. A raktáron 80 db árucikk van. Mennyit kell még rendelnie, hogy a várható költség minimális legyen, mivel egyenlő ez a költség? Az igény egyenletes eloszlású a [200,500] intervallumon. ($S_0 - K_0$=220 db, M_0=814 Ft)

21. Mennyiben módosul az optimális eljárás ha a raktáron 200 db árucikk van kezdetben, mennyi a várható költség?
(Nem rendel $x_0 > s$=180 db, M_0=817 Ft)

22. Egy raktáron napi 10 db alkatrészt kell biztosítani 1 éven keresztül 95%-os megbízhatósággal. A raktárfeltöltésnél az előszállításos módszert alkalmazzák, minden alkalommal a rendelt mennyiség 8%-át leszállítják, de a szállítás tétele szintén ingadozik. Az egyenlő résznagyságokban beáramló utánpótláshoz képest hány százalékkal kell emelni a kezdőkészletet? Mennyi lesz ez a kezdőkészlet? (11%, 2226 db)

23. Ha nincs információnk az előző példánál az egyes szállításoknál minimálisan érkező mennyiségről, hány százalékkal kell növelni a kezdő tételnagyságot az egyenlő részszállításos esethez képest és mennyi lesz ez a kezdőkészlet? (29%, 2599 db)

1.4 Irodalom

Beaumont G. P.
Introductory Applied Probability
ELLIS HARWOOD, CHICHESTER, 1983

Csáth M.
Operációkutatás
SZÁMOK, BUDAPEST, 1973.

Éltető Ö.– Meszéna Gy. – Ziermann M.
Sztohasztikus módszerek és modellek
KÖZGAZDASÁGI ÉS JOGI KIADÓ, BUDAPEST, 1982.

Lukács O.
Operációkutatás
TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1982.

Miller F. S. - Liebermann G. I.
Introduction to operation research
WALDEN - DAY, INC. SAN FRANCISCO, 1974.

Rényi A.
Valószínűségszámítás
TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1973.

Sztrik J.
Az operációkutatás elemei
KOSSUTH EGYETEMI KIADÓ, DEBRECEN, 1992, 1998

Tóth I.
Operációkutatás I.
TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1987.

2 Elemi sorbanállási rendszerek

2.1 Alapismeretek

E fejezet az élet egyik leghaszontalanabb tevékenységével, a várakozással foglalkozik. Felmerül a kérdés: miért van szükség egy ilyen kellemetlen jelenség tanulmányozására? Azért, mert ha rájövünk az összefüggésekre, akkor a várakozást csökkenthetjük és tevékenységünket tervezhetjük.

A sorbanállási elmélet az alkalmazott valószínűségszámítás egyik területe. Sorok bármikor keletkezhetnek, amikor egy adott kérés kiszolgálása meghaladja a kiszolgáló egység kapacitását. Ilyennel a gyakorlati életben is sokszor találkozunk, pl. egy áruházban sorbanállunk a pénztárnál, várakozunk az útkereszteződésekben a piros lámpánál, tartjuk a telefont amíg kicseng, várjuk míg a CPU kiszolgálja a jobot, stb.

2.1.1 Folyamatok

A dinamikai rendszerek egy tágabb osztályának - amelyet az egyszerűség kedvéért folyamatoknak nevezünk - az elemei a sorbanállási rendszerek. A folyamathoz tartozik egy olyan „hálózat” vagy „csatorna”, amelyen valamilyen „anyag” vagy „árucikk” folyik, mozog. Példaként tekintsük az autóforgalmat, vagy egy áruházban a vásárlók haladását a pénztár előtt. A számítógépes rendszerek területén sem ismeretlen a sorbanállás fogalma, a hardver és szoftver erőforrások kiosztásánál találkozunk vele. Jobok sora várakozik a háttértárban a memóriába történő beolvasásra (the job scheduling queue - job ütemező sor); sorban állnak azok a jobok, amelyek ugyan megkapták a memória használati jogát, de kénytelenek várakozni a CPU-ra (the process scheduling queue - folyamat ütemező sor); valamely I/O egység szolgáltatására várakozó jobok sora (the I/O scheduling queue - I/O ütemező sor). Ezekben a példákban az „áruk” szerepét az autók, a vásárlók és a jobok játszák, a „csatornák” szerepét pedig az úthálózat, az áruház pénztára, ill. valamely hardver és szoftver erőforrás. A „véges kapacitás” azt a tényt fejezi ki, hogy a csatornák csak véges intenzitással tudják kielégíteni az („áru” által támasztott) igényeket. Világos, hogy az ilyen rendszerek vizsgálata olyan analitikus eszközöket igényel, amelyeket különböző szakterületről gyűjthetünk össze, a sorbanállás elmélete éppen ilyen terület.

A folyamatokat két nagy osztályra bonthatjuk: a *determinisztikus* és a nem determinisztikus, ún. *sztochasztikus* vagy véletlen folyamatokra. Az első osztály azokból a rendszerekből áll, amelyekben előre pontosan ismert a folyamat mennyisége, és az többnyire állandó a vizsgált idő alatt, ugyancsak ismert az az időpont, amikor a folyamat megjelenik a csatorna bemenetén, és a folyamatnak a csatornával szemben támasztott igénye is ismert és állandó. A második osztály a sztochasztikus folyamatok osztálya. Ezen azt értjük, hogy bizonytalanok és előrejelezhetetlenek azok az időpontok, amikor az igények beérkeznek, és a csatornával szemben támasztott igények nagyságát sem lehet előre megmondani. A gyakorlatban található rendszerek nagy része ebbe a kategóriába esik.

Természetesen felvetődnek különféle kérdések, amelyekre értelmes és határozott választ szeretnénk kapni. Például: várhatóan mennyi ideig áll sorban egy igény mielőtt kiszolgálják? Hány igényt fognak kiszolgálni mielőtt az újonnan érkezett sorra kerül? A munkaidő mekkora hányadában lesz foglalt a CPU ? Mekkorák lesznek a folyamatosan lefoglalt időintervallumok? Ezek a kérdések bizonyos valószínűségekre, de legalábbis bizonyos várható értékekre vonatkoznak.

2.1.2 Sztochasztikus folyamatok osztályozása

Az elemi sorbanállási elmélet matematikai segédeszközei az ún. *születési-kihalási* (halálozási) folyamatok. Ahhoz, hogy ezt megértsük, tekintsük át röviden a sztochasztikus folyamatok rendszerét.

A sztochasztikus folyamatok véletlen folyamatok, vagyis $X(t)$ valószínűségi változók egy családja, ahol a valószínűségi változók indexét a t időparaméter tölti be. Pl. egy mozi nézőinek a száma az idő függvényében
sztochasztikus folyamat; ugyancsak sztochasztikus folyamat a mozi nézőterén uralkodó légnyomás, mint az idő függvénye. Egy sztochasztikus folyamatot úgy is fel lehet fogni, hogy az egy részecske időbeli mozgását írja le valamilyen térben. A véletlen folyamatok osztályozása három tényezőtől függ: az *állapottértől*, az *indextől (időparamétertől)* és a t index különböző értékeihez tartozó $X(t)$ valószínűségi változók közötti statisztikai összefüggésektől. Vizsgáljuk meg ezeket a tényezőket.

Először tekintsük az állapotteret. Állapottérnek nevezzük az $X(t)$ által felvehető lehetséges értékek (másként állapotok) halmazát. Diszkrét állapotterű folyamatokról, más elnevezéssel *láncról* beszélünk, ha a folyamat csak véges vagy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sok különböző pont valamelyikében tartózkodhat. A lánc állapottere gyakran az egész számok halmaza. Ha a megengedett állapotok egy véges vagy végtelen intervallumot (vagy intervallumok halmazát) fednek le, akkor *folytonos állapotterű folyamatról* beszélünk.

Most tekintsük az indexet (az időparamétert). Ha csak véges vagy legfeljebb megszámlálhatóan végtelen azoknak az időpontoknak a halmaza, amelyekben állapotváltozás mehet végbe, akkor *diszkrét paraméterű folyamatról* van szó. Ha ezek az állapotváltozások akárhol előfordulhatnak az időtengely egy véges vagy végtelen intervallumán (vagy ilyen intervallumok halmazán), akkor *folytonos paraméterű folyamatról* beszélünk. Az előző esetben az $X(t)$ jelölés helyett X_k

jelölést használjuk és véletlen vagy sztochasztikus sorozatként említjük az X_k változókat.

Az egyes sztochasztikus folyamatok meghatározó jellemzője az a viszony, amely a különböző $X(t)$, ill. X_k valószínűségi változók között fennáll. A folyamat leírásához meg kell adni az $X(t)$ valószínűségi változók *együttes eloszlását.* Különböző t_i időpillanatokhoz tartozó valószínűségi változókat egy $X = (X(t_1), X(t_2), ...)$ vektornak tekintjük, és meg kell adnunk az

$$F_x(x;t) := P(X(t_1) < x_1, ..., X(t_k) < x_k)$$

együttes eloszlásfüggvényeket minden $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$, $t = (t_1, t_2, ..., t_k)$ és k értékekre.

A sztochasztikus folyamatoknak több típusa ismeretes: stacionárius folyamatok, független növekményű folyamatok, Markov folyamatok, születési-halálozási folyamatok, szemi-Markov folyamatok, felújítási folyamatok. Részletesen csak a Markov és azon belül is a születési-halálozási folyamatokkal foglalkozunk, mivel a később ismertetett elemi sorbanállási rendszerek ezen folyamatokra épülnek.

2.1.2.1 Markov-folyamatok

1907-ben A.A. Markov egyik cikkében definiálta és tanulmányozta azt a folyamatot, amit *Markov-folyamatnak* nevezünk (ill. diszkrét állapotterű folyamat esetében *Markov-láncnak*). Legegyszerűbben a diszkrét idejű Markov-láncot lehet megérteni. A valószínűségi változók $\{X_k\}$ sorozata Markov-láncot alkot, ha a következő felvett érték (állapot), X_{k+1}, csak a pillanatnyi értéktől (állapottól), x_k-től függ, a korábbiaktól nem. Tehát ez olyan véletlen sorozat, amelyben a függőség az időben visszafelé egy egységnyire terjed ki. Vagyis a múlt befolyását a folyamat jövőjére teljesen tartalmazza a pillanatnyi állapot. Szemléletesen azt is mondhatjuk, hogy a rendszer (a sztochasztikus folyamat) „emlékezetnélküli”, hiszen a múltbeli értékek (az emlékezet) nem befolyásolják a rendszer jövőbeli viselkedését.

Folytonos idejű Markov-lánc esetében bármelyik időpillanatban bekövetkezhet az állapotváltozás. Ez arra késztet minket, hogy diszkrét állapotterű Markov-folyamatok esetében vizsgáljuk meg, mennyi ideig marad a folyamat a pillanatnyi állapotában mielőtt átlépne egy másik állapotba. A Markov- tulajdonság miatt ennek az időtartamnak (valószínűségi változónak) az eloszlásfüggvénye lényegében determinált, *exponenciálisnak* kell lennie. *Diszkrét idejű Markov-láncok* esetén a folyamat állapotváltozás nélküli időtartama csak *geometriai* eloszlású lehet.

Analitikusan a Markov-tulajdonságot a következőképpen lehet felírni:

$$P\left(X(t_{k+1}) = x_{k+1} | X(t_k) = x_k, X(t_{k-1}) = x_{k-1}, ..., X(t_1) = x_1\right) = \\ P(X(t_{k+1}) = x_{k+1} | X(t_k) = x_k),$$

ahol $t_1 < t_2 < ... < t_k < t_{k+1}$ és x_i valamilyen diszkrét állapottér eleme, $i = 1, \ldots, k,\ k > 1$.

2.1.2.2 Születési-halálozási folyamatok

A Markov-folyamatok egy igen fontos speciális osztálya *születési-halálozási folyamatok* néven ismert. A definiáló feltétel: minden állapotból csak „szomszédos” állapotba mehet végbe átmenet. Ćllapottérnek ekkor az egész számok halmazát választjuk (ami nem megy az általánosság rovására), és $X_k = i$ esetében X_{k+1} vagy $i - 1$, vagy i, vagy $i + 1$ lehet. A születési-halálozási folyamatoknak nagy szerepük van a sorbanállási rendszerek vizsgálatában.

Ahhoz, hogy egy $X(t)$ Markov lánc születési-halálozási folyamat legyen, ki kell elégítenie az alábbi feltételeket :

$$\begin{array}{ll}
1.\ P & (X(t+h) = k-1 | X(t) = k) = \lambda_k h + o(h); \\
2.\ P & (X(t+h) = k-1 | X(t) = k) = \mu_k h + o(h); \\
3.\ P & (X(t+h) = k | X(t) = k) = 1 - (\lambda_k + \mu_k) h + o(h); \\
4.\ P & (X(t+h) = m | X(t) = k) = o(h), \qquad | m - k | > 1,
\end{array}$$

ahol h egy tetszőlegesen kis intervallumot jelent, $o(h)$ pedig olyan mennyiséget jelöl, amely gyorsabban tart 0-hoz, mint h, ha $h \to 0$, vagyis $\frac{o(h)}{h} \to 0$, ha $h \to 0$.

Vegyük észre, hogy λ_k, μ_k pozitív mennyiségek függetlenek az időtől. A λ_k-kat *születési intenzitásnak*, a μ_k-kat pedig *halálozási intenzitásnak* nevezzük.
Jelöljük $P_k(t)$-vel annak valószínűségét, hogy a folyamat a t időpillanatban az k állapotban van, vagyis

$$P_k(t) = P(X(t) = k).$$

Ezt szokás *abszolút valószínűségnek* is nevezni. Ezen valószínűségek kiszámításához figyelembe kell venni a következőket. A $t + h$ időpillanatban a $X(t)$ k állapotban van akkor és csak akkor, ha az alábbi feltételek teljesülnek:

1. t időpillanatban a folyamat a k állapotban van és a $(t, t + h)$ időintervallumban változás nem következik be;

2. t időpillanatban a folyamat a $k-1$ állapotban volt és a k-ba történt átmenet;

3. t időpillanatban a folyamat a $k+1$ állapotban volt és a k-ba történt átmenet;

4. $(t, t + h)$ alatt 2 vagy több átmenet történt.

Látható, hogy az 1-3 feltételek kölcsönösen kizárják egymást, és a 4. eset valószínűsége $o(h)$.

Világos, hogy a t minden értékére teljes eseményrendszerről van szó, így:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1, \tag{1}$$

vagyis teljesül az ún. *normalizáló feltétel*.

Az előbbi feltételek teljesülése után már felírhatjuk a $P_k(t+h)$ valószínűséget:

$$\begin{aligned} P_k(t+h) = \; & P_k(t)\{1 - \lambda_k h - \mu_k h + o(h)\} \\ & + P_{k-1}(t)\{\lambda_{k-1} h + o(h)\} \\ & + P_{k+1}\{\mu k + 1h + o(h)\} + o(h), \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Ha mindkét oldalból kivonjuk a $P_k(t)$-t és osztjuk h-val, akkor $h \to 0$ esetén a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{P_0(t)}{dt} = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t), \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{dP_k(t)}{dt} \; & = -(\lambda_k + \mu_k) P_k(t) + \lambda_{k-1} P_{k-1}(t) + \\ & + \mu_{k+1} P_{k+1}(t), \qquad k = 1, 2, 3, ... \end{aligned} \tag{3}$$

Annak belátása, hogy a fenti egyenleteknek létezik egyértelműen meghatározott megoldása nem könnyű feladat. Az egyenletrendszer megoldható, ha bizonyos megkötéseket teszünk a születési-halálozási folyamatra vonatkozóan. Meg kell adni a $P_k(0)$, $k = 0, 1, 2, ...$ értékeket, ezenkívül a normalizáló feltételnek is teljesülnie kell.

Most tegyünk egy kis kitérőt. Adjunk egy intuitív módszert arra, hogyan lehet az előbbi differenciálegyenlet-rendszert megkapni. Figyeljük a k állapotot. Észrevehetjük, hogy oda csak a $k-1$ és a $k+1$ állapotokból lehet átlépni. Hasonlóképpen a k állapotot csak úgy lehet elhagyni, hogy a $k-1$ vagy a $k+1$ állapotba jutunk. Mivel dinamikus szituációt vizsgálunk, ezért világos, hogy a két rátának a különbsége, amellyel a folyamat belép a k állapotba, ill. elhagyja azt, egyenlő kell, hogy legyen az illető állapot abszolút valószínűségének a megváltozásával. Ennek segítségével leírhatjuk a $P_k(t)$ valószínűségekre vonatkozó mozgásegyenletet. A t pillanatban az érkezés intenzitása ebbe az állapotba:

$$\lambda_{k-1} P_{k-1}(t) + \mu_{k+1} P_{k+1}(t),$$

míg a távozás intenzitása:

$$(\lambda_k + \mu_k) P_k(t).$$

E kettő különbsége az abszolút valószínűség t-beli változásával (deriváltjával) egyenlő, azaz

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t) - (\lambda_k + \mu_k)P_k(t)\ .$$

De ez éppen a (3) összefüggés $k > 0$ esetén. Könnyű belátni, hogy ez az érvelés a $k = 0$ esetben is korrekt egyenletre vezet.

Az általános, időfüggő megoldás nehezen adható meg, ezért mi megelégszünk az ún. *egyensúlyi* (vagy stacionárius) megoldással, mivel ez sok esetben elegendő.

Definiáljuk a *stacionárius* megoldást, mint egy p_k valószínűségi eloszlást, amelyre fennáll a következő: $P_k(t) = p_k$. Ha egy ilyen eloszlás létezik, akkor egyértelmű és minden k-ra teljesül:

$$\lim_{t\to\infty} P_k(t) = p_k.$$

Mivel minket csak a folyamat időtől független tulajdonságai érdekelnek, ezért először vegyük a (3) baloldalának határértékét $t \to \infty$ esetén, ez 0-val lesz egyenlő, és egy kis átalakítással a következő lineáris differenciaegyenletet kapjuk:

$$\lambda_k p_k - \mu_{k+1}p_{k+1} = \lambda_{k-1}p_{k-1} - \mu_k p_k, \qquad k = 1, 2, \ldots \quad .$$

Ebből arra következtethetünk, hogy

$$\lambda_{k-1}p_{k-1} - \mu_k p_k = \text{konstans}, \qquad k = 1, 2, \ldots \quad .$$

A (2)-ból:

$$\lambda_0 p_0 - \mu_1 p_1 = 0.$$

Tehát a fenti konstansnak nullának kell lenni, ezzel az alábbi egyenlőségre jutottunk:

$$\mu_k p_k = \lambda_{k-1}p_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots \quad .$$

Ez a következőképpen értelmezhető: a baloldal a k állapotból a $k-1$ állapotba való átmenet rátája, ami egyensúlyban van a $k-1$ állapotból a k állapotba való átmenet rátájával, ami a jobboldalon található. Így az egyensúlyi állapot valószínűségei a következők:

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}p_{k-1} = \frac{\Lambda(k)}{M(k)}p_0,$$

ahol

$$\Lambda(k) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_{i-1},$$

és

$$M(k) = \prod_{i=1}^{k} \mu_i.$$

A p_0 valószínűséget egyértelműen meghatározhatjuk, mivel a valószínűségi eloszlások $\{p_k; k = 0, 1, 2, ...\}$ összegének 1-nek kell lenni. Tehát, ha az

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda(k)}{M(k)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}$$

sor konvergens, és összege φ akkor

$$p_0 = \varphi^{-1},$$

és ez egyben a stacionáris eloszlás létezésének elégséges feltétele is.

A Poisson-folyamat

A vizsgált rendszerek közül a legegyszerűbb a tiszta születési folyamat. Ebben azt tesszük fel, hogy a $\mu_k = 0$ minden k esetén. Tovább egyszerűsítve a problémát tegyük fel, hogy $\lambda_k = \lambda$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ekkor a (2, 3) a következőre redukálódik:

$$\begin{aligned} \tfrac{dP_k(t)}{dt} &= -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t), \text{ ha } k \geq 1, \\ \tfrac{dP_0(t)}{dt} &= -\lambda P_0(t), \text{ ha } k = 0. \end{aligned}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a rendszer a 0 állapotból indul a 0 időpillanatban, azaz

$$P_k(0) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } k = 0, \\ 0 & \text{, ha } k \neq 0. \end{cases}$$

Könnyű látni, hogy a $P_0(t)$ valószínűségre:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Így a $k = 1$ esetre az alábbit kapjuk:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}.$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldása:

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Indukcióval folytatva a megoldást, könnyen meggyőződhetünk, hogy

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, \qquad k \geq 0, t \geq 0.$$

Ez a híres **Poisson-eloszlás**. A konstans λ születési intenzitású tiszta születési folyamatban előforduló születések sorozatát nevezik **Poisson-folyamatnak**. Vizsgáljuk meg alaposabban a Poisson-folyamatot, mivel központi szerepet tölt be a sorbanállási elméletben, ezenkívül az élő és élettelen természet sok folyamatának viselekedését jól modellezi. Példaként Fry megemlíti, hogy a katonaságnál a lórugásból eredő halálesetek ilyen folyamatot képeznek. További példák a radioaktív részecskékből kibocsátott γ-sugarak sorozata, vagy a telefonhívások időpontjai.

Mivel a kapott eredményeket később a sorbanállási rendszerek tanulmányozásakor szeretnénk felhasználni, így rögtön sorbanállási jelöléseket vezetünk be: a Poisson-folyamatot mint igények beérkezését tekintjük valamilyen kiszolgálási rendszerbe, nem pedig mint egy populáció új tagjainak születését. Ezért λ az igénybeérkezés átlagos intenzitása. A kezdeti feltétellel együtt a $P_k(t)$ mennyiség megadja annak valószínűségét, hogy k igény érkezik be a $(0, t)$ intervallumban. Világos, hogy ha átlagosan λ igény érkezik be másodpercenként, ezért egy t hosszúságú intervallum alatt átlagosan λt számú igénynek kell beérkeznie, azaz a t idő alatt beérkezett igények számának várható értéke λt.

Bizonyítsuk ezt be !
Legyen $v(t)$ a t hosszúságú intervallum alatt beérkező igények száma, így a következő adódik:

$$E(v(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} kP_k(t) = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{(\lambda t)^k}{k!} =$$

$$e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda t}\lambda t\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Mivel $e^x = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$, kapjuk, hogy

$$E(v(t)) = \lambda t.$$

Tehát a $(0, t)$ intervallumban beérkező igények számának várható értéke λt.
A beérkezések számának szórásához célszerű először kiszámolni a következő momentumot:

$$E(v(t)(v(t)-1)) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)P_k(t) =$$

$$e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{(\lambda t)^k}{k!}=$$

$$e^{-\lambda t}(\lambda t)^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!}=$$

$$e^{-\lambda t}(\lambda t)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}=(\lambda t)^2.$$

Ez utóbbi mennyiség és az $E(v(t))$ segítségével a szórásnégyzet az alábbi:

$$\sigma_v(t)^2=E(v(t)(v(t)-1))+E(v(t))-(E(v(t)))^2=(\lambda t)^2+\lambda t-(\lambda t)^2=\lambda t.$$

Az adódott tehát, hogy a Poisson-folyamat szórásnégyzete és várható értéke egyenlő, mégpedig mindkettő éppen λt.

A Poisson-folyamat, mint tiszta születési folyamatot vezettük be, és levezettük a $P_k(t)$ mennyiségekre - egy adott t hosszúságú időintervallum alatt bekövetkező érkezések számának valószínűségeloszlására - egy formulát. Vizsgáljuk most meg a beérkezések időpillanatainak együttes eloszlását, ha előre ismert, hogy éppen k igény érkezett ebben az intervallumban. Osszuk fel a $(0,t)$ intervallumot $2k+1$ diszjunkt részre a következőképpen. Az α_i hosszúságú intervallumok előzzék meg a β_i hosszúságú intervallumokat $(i=1,\ldots,k)$, és az utolsó intervallum α_{k+1} hosszúságú legyen, továbbá

$$\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i+\sum_{i=1}^{k}\beta_i=t.$$

Jelentse A_k azt az eseményt, hogy éppen egy beérkezés fordul elő minden egyes β_i intervallumban $(i=1,2,...,k)$, az α_i intervallumban pedig egy sem. A_k valószínűségét akarjuk kiszámolni, feltéve, hogy éppen k beérkezés történik a $(0,t)$ intervallumban. A feltételes valószínűség definíciójából

$$P(A_k|\text{pontosan } k \text{ beérkezés a } (0,t) \text{ alatt})=$$

$$=\frac{P(A_k \text{ és pontosan } k \text{ beérkezés } (0,t) \text{ alatt})}{P(\text{pontosan } k \text{ beérkezés } (0,t) \text{ alatt})}$$

Amikor a Poisson-folyamat szerinti beérkezéseket vizsgáljuk diszjunkt időintervallumokban, akkor független eseményeket vizsgálunk, azaz ezek együttes valószínűségét az egyes valószínűségek szorzataként lehet kiszámolni. Könnyű látni, hogy

$$P(\text{egyetlen beérkezés egy } \beta_i \text{ hosszúságú intervallum alatt})=\lambda\beta_i e^{-\lambda\beta_i}$$

és

$$P(\text{nincs beérkezés egy } \alpha_i \text{ hosszúságú intervallum alatt}) = e^{-\lambda\alpha_i}.$$

Kihasználva ezt, azonnal kapjuk a következőt:

$$P(A_k|\text{éppen } k \text{ beérkezés } (0,t) \text{ alatt}) =$$

$$\frac{(\lambda\beta_1\lambda\beta_2...\lambda\beta_k e^{-\lambda\beta_1}e^{-\lambda\beta_2}...e^{-\lambda\beta_k})(e^{-\lambda\alpha_1}e^{-\lambda\alpha_2}...e^{-\lambda\alpha_k})}{((\lambda t)^k/k!)e^{-\lambda t}} = \tag{4}$$

$$\frac{\beta_1\beta_2...\beta_k}{t^k}k!.$$

Másrészt tekintsünk egy olyan folyamatot, amely a $(0,t)$ intervallumban k darab pontot választ ki egymástól függetlenül, mégpedig mindegyiket az intervallumon egyenletes eloszlás szerint. Könnyen belátható, hogy

$$P(A_k|\text{éppen } k \text{ beérkezés } (0,t) \text{ alatt}) = \left(\frac{\beta_1}{t}\right)\left(\frac{\beta_2}{t}\right)...\left(\frac{\beta_k}{t}\right)k!, \tag{5}$$

ahol a $k!$ tényező amiatt jelenik meg, mert nem különböztetjük meg a k pont permutációit. Észrevehetjük, hogy a (4) és a (5) összefüggésekben megadott két feltételes valószínűség megegyezik, és ennek alapján arra gondolhatunk, hogy ha a Poisson-folyamatban t idő alatt k beérkezés történik, akkor a beérkezések eloszlása ugyanaz, mint k darab ugyanazon az intervallumon egyenletes eloszlású pont eloszlása. Ennek pontos igazolása a fenti gondolatmenet finomításával elvégezhető. A születési folyamat tulajdonságaiból könnyű levezetni, hogy a Poisson-folyamat homogén; vagyis ha $X(s,s+t)$ jelöli a t hosszúságú $(s,s+t)$ intervallum alatti beérkezések számát, akkor

$$P(X(s,s+t)=k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!},$$

függetlenül attól, hogy hol helyezkedik el az intervallumon (vagyis függetlenül az intervallum s kezdőpontjától).

Most a Poisson-folyamat és az exponenciális eloszlás közötti összefüggés vizsgálatára térünk át. Az exponenciális eloszlásnak szintén központi szerepe van a sorbanállás elméletében. Tekintsük a $\tilde{t}$ valószínűségi változót - a két egymás utáni „szomszédos” beérkezések között eltelt idő -, amelynek eloszlás- és sűrűségfügvényét $F(t)$, ill. $f(t)$ jelöli. Ekkor $f(t)\Delta t + o(\Delta t)$ a valószínűsége annak, hogy a soron következő beérkezésig a legutolsó beérkezéstől eltelt idő legalább t, de legfeljebb $(t+\Delta t)$.

Mivel $F(t)$ a valószínűsége annak, hogy a beérkezések közötti idő$\leq t$, ezért

$$F(t) = 1 - P(\tilde{t} > t).$$

De $P(\tilde{t} > t)$ éppen annak valószínűsége, hogy egyetlen beérkezés sem következik be a $(0, t)$ intervallumon, azaz $P_0(t)$. Azt kapjuk tehát, hogy

$$F(t) = 1 - P_0(t),$$

így az eloszlásfüggvény (a Poisson esetben)

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0. \tag{6}$$

Ezt differenciálva, a sűrűségfüggvény:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0.$$

Ez a jól ismert exponenciális eloszlás, tehát a *Poisson-folyamat esetén a beérkezések időköze exponenciális eloszlású*.
Az exponenciális eloszlás legfontosabb jellemzője az, hogy emlékezetnélküli, azaz a valószínűségi változó múltja nem játszik szerepet jövőjének meghatározásában. Ezen a következőt értjük. Képzeljük el, hogy a 0 időpillanatban következett be egy beérkezés. Ha azt kérdezzük, hogy mi a legközelebbi beérkezésig eltelő t idő eloszlása, a felelet nyilvánvaló, a (6) képlet adja meg az eloszlásfüggvényét. Teljék el bizonyos idő, mondjuk t_0 másodperc, ez alatt ne történjen beérkezés. Ekkor újra megkérdezhetjük: Mennyi a valószínűsége annak, hogy a legközelebbi beérkezésig mostantól számítva t idő telik el. Ez a kérdés csak annyiban különbözik a 0 időpillanatban feltett kérdéstől, hogy most tudjuk, a két beérkezés között eltelő idő legalább t_0 másodperc. Ahhoz, hogy feleljünk a második kérdésre, a következő számításokat végezzük:

$$P(\tilde{t} \leq t + t_0 | \tilde{t} > t_0) = \frac{P(t_0 < \tilde{t} \leq t + t_0)}{P(\tilde{t} > t_0)} = \frac{P(\tilde{t} \leq t + t_0) - P(\tilde{t} \leq t_0)}{P(\tilde{t} > t_0)}.$$

A (6) miatt

$$P(\tilde{t} \leq t + t_0 | \tilde{t} > t_0) = \frac{1 - e^{-\lambda(t+t_0)} - (1 - e^{-\lambda t_0})}{1 - (1 - e^{-\lambda t_0})},$$

és így

$$P(\tilde{t} \leq t + t_0 | \tilde{t} > t_0) = 1 - e^{-\lambda t} = P(\tilde{t} \leq t).$$

Az eredmény azt mutatja, hogy ha az utolsó beérkezés óta t_0 idő telt el, akkor a következő beérkezésig hátralevő idő eloszlása ugyanaz, mint a beérkezési időköz feltétel nélküli eloszlása. Vagyis a jövőbeli beérkezés valószínűsége független attól, hogy a legutolsó beérkezéstől számítva mennyi idő telt már el. Tehát egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó jövője független a változó múltjától

- az eloszlás időben állandó marad. És ez az egyetlen olyan folytonos eloszlás, amely ilyen tulajdonságú. Nem nehéz belátni, hogy

$$1 - e^{-\lambda t} = \lambda h + o(t).$$

Ez nyilván egyenértékű a

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - e^{-\lambda t}}{t} = \lambda$$

állítással, amelyet a L'Hospital-szabállyal egyszerűen bebizonyíthatunk. Hiszen

$$\lim_{t \to 0} \frac{(1 - e^{-\lambda t})'}{t'} = \lambda.$$

Az $1 - e^{-\lambda t} = \lambda t + o(t)$ egyenlőség a későbbiekben nagyon fontos lesz számunkra.

2.2 Elemi sorbanállási elmélet

A sorbanállási elméletre vonatkozó "elemi" jelző azt fejezi ki, hogy olyan rendszereket vizsgálunk, amelyek tiszta Markov-folyamatok, és ennek következtében az állapotátmenetek leírására egyszerű, könnyen kezelhető összefüggéseket kapunk. Az előző fejezetben azokkal az egyenletekkel foglalkoztunk, amelyek a születési-halálozási folyamatok abszolút valószínűségeit az időtől függetlenül írták le. A (7) összefüggés a fejezet lényeges eredménye; az anyag többi része nem más, mint ennek egyszerű alkalmazása. Itt újra csak azt az univerzális eszközt használjuk, amit már korábban is igénybe vettünk, és még sokszor fogjuk alkalmazni a zárt rendszer határán áramló anyagi részek mennyiségének kiszámításánál. Egyensúlyi helyzetben a rendszerbe beáramló anyagmennyiségnek egyenlőnek kell lennie a rendszerből kiáramlóval. Ezeknek az alapvető eredményeknek az alkalmazása nem csupán gyakorló feladat, ez az a pont, ahol először kapunk olyan egyenleteket, amelyek a sorbanállási rendszerekkel kapcsolatos mérnöki és tervezési gyakorlatban is alkalmazhatók.

A későbbiek során a következőképpen járunk el. Bevezetünk egy $X(t)$ sztochasztikus folyamatot, ami a t-dik időpillanatban a kiszolgáló egységnél tartózkodó igényeket jelöli majd. A beérkezési és kiszolgálási folyamatok eloszlásainak felhasználásával megadjuk a h időintervallum alatti átmeneti valószínűségeket. Mivel a fellépő eloszlások exponenciálisak, az $X(t)$ folyamat Markov-típusú lesz, sőt születési-halálozási folyamat. Konkrét rendszereknél mindig meghatározzuk a születési, halálozási intenzitásokat, és ezek felhasználásával megkeressük az egyenletrendszer megoldását. Ezt követően kiszámítjuk a rendszer működésére vonatkozó jellemzőket (pl. átlagos sorhossz, kihasználtságok, átlagos várakozási idő stb.)

2.2.1 Stacionárius születési-halálozási folyamatok

Az előbbi fejezetben sztochasztikus folyamatok különböző osztályait tanulmányoztuk. Azt állítottuk, hogy a sorbanállási rendszerek vizsgálatában alapvető szerepük van a Markov-folyamatoknak. Ezen belül is egy speciális Markov-folyamatot vizsgáltunk meg - a születési-halálozási folyamatot. Megmutattuk, hogy a születési-halálozási folyamatoknak az az igen „jó” tulajdonságuk van, hogy mind a születések, mind a halálozások közötti idő exponenciális eloszlású (ami közvetlen következménye annak, hogy ezek Markov-folyamatok - feltéve, hogy a rendszer nem üres). Ezután megadtuk a folyamat állapotegyenleteit. Ennek az egyenletrendszernek a megoldása adja meg a sorbanállási rendszer abszolút valószínűségeinek időbeli viselkedését. Jelen fejezetben ezeknek az egyenleteknek határátmenet útján adódó alakjait vizsgáljuk, így a születési-halálozási sorbanállási rendszerek *stacionárius* viselkedését kapjuk meg.

Az elemi sorbanállási elmélet egyrészt történeti okokból, másrészt pedig azért fontos, mert alkalmas arra, hogy szemléltesse a bonyolultabb sorbanállási rendszerek jellemzőit. A kapott eredmények betekintést nyújtanak sok egyéb sorbanállási rendszer viselkedésébe.

Nem szabad elfelejtenünk, hogy a születési-halálozási folyamat miképpen felel meg a sorbanállási rendszereknek. Pl. tekintsünk egy orvosi várószobát (amelyben esetleg várakozni kell), és tekintsünk egy orvosi rendelőt, mint egy kiszolgálóegységet. Minden egyes időpontot, amikor egy páciens belép az utcáról a várószobába, úgy tekintjük, mint egy igény beérkezését a sorbanállási rendszerbe; másrészt ezt a beérkezést úgy is fel lehet fogni, mint egy populáció új tagjának születését - a populációt a jelenlevő páciensek alkotják. Hasonlóképpen, amikor kezelés után egy páciens elhagyja a rendelőt, ezt mint a a sorbanállási rendszerből való távozást tekintjük, a születési-halálozási folyamat terminológiájában ez a populáció egy tagjának halálát jelenti.

Minthogy a λ_k születési és a μ_k halálozási együtthatókat szabadon választhatjuk meg, ezért különféle sorbanállási rendszerek konstruálására van lehetőségünk, mint ezt rövidesen látni fogjuk. Először azonban határozzuk meg a stacionárius megoldásokat az általános esetre.

2.2.1.1 Általános stacionárius megoldás

Amint azt az előző fejezetben láttuk, a születési-halálozási folyamatok időtől függő megoldása gyakorlatilag kezelhetetlenné válik, amint bonyolultabb születési-halálozási λ_k, μ_k intenzitásokat veszünk. Továbbá, még ha a $P_k(t)$ függvényeket meg is tudnánk határozni, nem világos, mennyire segít minket ez a függvényhalmaz abban, hogy jobban megértsük a sorbanállási rendszer viselkedését. Ezért természetes, hogy azt kérdezzük, vajon a $P_k(t)$

valószínűségek t növekedésével megállapodnak-e végül is valahol, megszűnik-e időbeli változásuk, beáll-e stacionárius állapot. Legyen

$$p_k := \lim_{t\to\infty} P_k(t),$$

ahol p_k jelenti azon esemény valószínűségét, hogy a rendszer k állapotban van. Nagyon fontos, hogy megértsük: jóllehet a p_k mennyiségek (feltéve, hogy léteznek) nem a t függvényei, ebből nem következik, hogy a határesetben nem megy át a folyamat az egyik állapotból a másikba. A populáció tagjainak száma változik az idővel, azonban annak valószínűségét, hogy a rendszer k tagú lesz, nagy t-re éppen p_k adja meg.

Feltételezve, hogy a határérték létezik, a születési-halálozási folyamatokra felírt (2, 3) egyenletben a $\lim_{t\to\infty} \frac{dP_k(t)}{dt}$ mennyiséget nullával tehetjük egyenlővé. Ebből azonnal adódik, hogy

$$0 = -(\lambda_k + \mu_k)p_k + \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1}, \qquad \text{ha } k \geq 1,$$

$$0 = \lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1, \qquad \text{ha k=0}.$$

Ezt k minden értékére átírva, a következőt kapjuk:

$$0 = -(\lambda_k + \mu_k)p_k + \lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \quad .$$

feltételezve, hogy $\lambda_{k-1} = 0$, és μ_0. Megköveteljük a teljes eseményrendszerre vonatkozó összefüggést is, melyre normalizáló feltételként hivatkozunk majd :

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Egyensúlyi helyzetben a befelé irányuló folyamnak egyenlőnek kell lennie az adott állapotból kifelé irányuló folyammal. A k állapotra koncentrálva megfigyelhetjük, hogy

- a beáramlás intenzitása a k állapotba $=\lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1}$,
- a kiáramlás intenzitása a k állapotból $=(\lambda_k + \mu_k)p_k$.

Egyensúlyi helyzetben ez a kettő megegyezik, így azonnal kapjuk, hogy

$$\lambda_{k-1}p_{k-1} + \mu_{k+1}p_{k+1} = (\lambda_k + \mu_k)p_k.$$

Megmutatjuk, hogy a következő összefüggés áll fenn

$$\lambda_{k-1}p_{k-1} = \mu_k p_k.$$

és az általános megoldás:

$$p_k = \frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k} p_0.$$

Az összes p_k valószínűséget egyetlen ismeretlen p_0 állandóval fejeztük ki:

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, \qquad k = 0, 1, 2, ... \tag{7}$$

(Az üres szorzat értéke definíció szerint 1.) A normalizáló feltétel segítségével meghatározhatjuk a p_0-t, nevezetesen

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \prod\limits_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}.$$

Ez a szorzatalakú megoldás az *egyik legfontosabb egyenlete az elemi sorbanállási elméletnek.*

Most megvizsgáljuk a p_k stacionárius valószínűségek létezését. Pontosabban azt kell megnézni, hogy ezek a mennyiségek valóban valószínűségeloszlást alkotnak-e. Ehhez viszont az szükséges, hogy a $p_0 > 0$ legyen. Ez az egyenletekben szereplő születési és halálozási együtthatókra ró ki feltételt. Lényegében azt követeljük meg, hogy a rendszer alkalomadtán üres is legyen. Az, hogy ez feltétele a stabilitásnak rögtön elfogadhatónak látszik. Pontosabban osztályozhatjuk a lehetőségeket, ha előbb definiáljuk az alábbi két összeget:

$$S_1 := \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}},$$

$$S_2 := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \prod\limits_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}.$$

Azt mondjuk, hogy a születési-halálozási folyamat minden egyes állapota *ergodikus*, ha

$$S_1 < \infty, S_2 = \infty;$$

rekurrens nulla, ha

$$S_1 = \infty, S_2 = \infty;$$

átmeneti, ha

$$S_1 = \infty, S_2 < \infty.$$

Az ergodikus esetben $p_0 > 0$, és akkor kapjuk a $\{p_k\}$ stacionárius valószínűségeket. Ez a legfontosabb eset számunkra. Az ergodikusság elégséges feltétele teljesül, ha a $\{\lambda_k/\mu_k\}$ sorozat egy bizonyos k értéktől kezdve végig 1 alatt marad, pontosabban ha létezik valamilyen k_0 pozitív egész szám és $\varepsilon > 0$ úgy, hogy minden $k \geq k_0$ értékre fennáll

$$\frac{\lambda_k}{\mu_k} < 1 - \varepsilon.$$

A legtöbb vizsgált sorbanállási rendszerben teljesül ez a feltétel.

2.2.1.2 A sorbanállási rendszerek jellemzői

Ahhoz, hogy teljesen jellemezzünk egy sorbanállási rendszert, azonosítanunk kell azt a sztochasztikus folyamatot, amely a beérkező igényeket írja le, és le kell írnunk a kiszolgálás szabályait és struktúráját. A beérkező folyamatot általában az egymás után beérkező igények közötti időintervallumok valószínűségeloszlása segítségével írjuk le. Jelölje $A(t)$ a beérkezési időközök eloszlásfüggvényét. A sorbanállás elméletében többnyire feltesszük, hogy az egymás utáni beérkezések közötti időközök (röviden *beérkezési időköz*), azonos eloszlású független valószínűségi változók (ezért a beérkezési folyamat ún. *felújítási folyamatot* alkot).
A másik sztochasztikus mennyiség, amit meg kell adni, a beérkező igények által a csatornával szemben támasztott követelmények (munka) nagysága; ezt *kiszolgálási időnek* nevezzük és valószínűségeloszlását $B(x)$-szel jelöljük.
A kiszolgálás ideje annak az időintervallumnak a hosszát jelenti, amelyet az igény a kiszolgáló egységben eltölt.

A kiszolgálás szabályára és struktúrájára vonatkozóan további mennyiségeket kell meghatározni. Az egyik a *befogadóképesség*, ami nem más, mint a várakozó sor maximális hossza. Ezt rendszerint K-val jelöljük, és értékét gyakran végtelennek tekintjük. Egy további jellemző a rendelkezésre álló *kiszolgáló állomások (csatornák) száma*. A *kiszolgálási sorrend* írja le azt a szabályt, amely szerint a várakozók közül sorra kerülnek az egyes igények kiszolgálás céljából. A leggyakrabban használt kiszolgálási elvek : FIFO (First In - First Out) - érkezési sorrendben; LIFO (Last In - First Out) - fordított sorrendben történő kiszolgálások. Ha a beérkező igényeket bizonyos csoportokba tartozás szerint meg lehet különböztetni, akkor a csoportok között *prioritást* lehet megállapítani, és ezen a prioritáson alapul a kiszolgálás sorrendje. Ez az egyik legalkalmasabb ütemezési elv, mivel így az igények közötti fontossági sorrendet felállítva történik a kiszolgálás.

A prioritásos sorbanállási elvnek két fő típusa van: *abszolút* és *relatív*. Az előbbi azt jelenti, hogy ha egy igény kiszolgálása folyamatban van, és érkezik egy magasabb prioritású igény, akkor az éppen kiszolgálás alatt álló folyamat kiszolgálása megszakad, és újra beáll a várakozási sorba. Kívülről megadott prioritási osztály hiányában nem mindig alkalmazható a FIFO elv. Pl. figyeljünk meg egy CPU ütemező sort egy interaktív rendszerben. A sorban előfordulhatnak olyan jobosztályok is, amelyek rendkívül nagy CPU időigénnyel rendelkeznek. Ha egy ilyen job megkapja a CPU-t, akkor az utána következő joboknak nagyon hosszú időt kell várniuk. Legtöbb esetben az ütemező megvizsgálja az adott job előző kiszolgálási idejét, és ez alapján ad prioritást. Ilyenek pl. az időosztásos (Time Sharing, rövidítése TS) vagy Round-Robin (RR) ütemezési elvek.

A sorbanállási rendszerek hatékonyságának és teljesítményének vizsgálatához a következő mérőszámokat fogjuk meghatározni: az *igények várakozási ideje*; a rendszerben levő *igények száma*; a *foglaltsági intervallum hossza* (vagyis az a folytonos időintervallum, amelyben a kiszolgáló egység állandóan foglalt); az *üresjárati időszakasz hossza*; a pillanatnyi *munkahátralék eloszlása*. Mindegyik mennyiség valószínűségi változó, és így teljes valószínűségszámítási jellemzésüket (vagyis eloszlásfüggvényüket) keressük, amit általában nehéz megadni, így sokszor megelégszünk az átlagos mennyiségekkel.

Az elemi sorbanállási elmélet egyrészt történeti okokból, másrészt pedig azért fontos, mert alkalmas arra, hogy szemléltesse a bonyolultabb sorbanállási rendszerek jellemzőit is.

Egyszerűség kedvéért tekintsünk először egy egykiszolgálós rendszert !
A sorbanállási rendszerek teljesítményének mérésére legalkalmasabb eszköz a torlódás vizsgálata. Legyen ϱ egy dimenzió nélküli mennyiség, amelyet a következőképpen lehet definiálni:

$$\varrho = \text{forgalmi intenzitás} = \frac{\text{átlagos kiszolgálási idő}}{\text{átlagos beérkezési időköz}}.$$

Feltételezzünk egy végtelen populációjú modellt, jelöljük a beérkezési intenzitást λ-val, az átlagos kiszolgálási időt $1/\mu$-vel. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\varrho = \text{érkezési intenzitás} * \text{átlagos kiszolgálási idő} = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Az 1-nél nagyobb *forgalmi intenzitás* azt mutatja ,hogy az igények gyorsabban érkeznek, mint ahogy egy szerver (kiszolgálóegység, csatorna) ki tudná szolgálni őket. Jelölje $\chi(A)$ az A esemény karakterisztikus függvényét, azaz

$$\chi(A) = \begin{cases} 1, & \text{ha A teljesül,} \\ 0, & \text{ha nem A teljesül} \end{cases}$$

és $X(t) = 0$ azt az eseményt, hogy a kiszolgáló tétlen a t-dik időpillanatban. Ekkor a szerver időegységre eső kihasználtsága

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T \chi\left(X(t) \neq 0\right) dt\ ,$$

ahol T egy elegendően hosszú időintervallum. Ha $T \to \infty$ esetén a fenti mennyiségeknek létezik határértéke, akkor a szerver *kihasználtságán* ezt az U_s-sel jelölt mennyiséget értjük. Továbbá 1 valószínűséggel fennáll

$$U_s = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \chi\left(\xi(t) \neq 0\right) dt = 1 - p_0 = \frac{E\delta}{E\delta + Ei},$$

ahol p_0 annak stacionárius valószínűsége, hogy a szerver tétlen, $E\delta$ a kiszolgáló egység átlagos foglaltsági periódushosszát, Ei pedig az átlagos tétlenségi periódushosszát jelöli.

Ez az összefüggés Markov-folyamatoknál speciális esete a következő, gyakran felhasználható relációnak. Legyen $X(t)$ egy ergodikus Markov-folyamat, A pedig állapotterének egy részhalmaza. Látható, hogy $X(t)$ az idő folyamán felváltva tartózkodik A-ban és $\overline{A}$-ban. Ekkor 1 valószínűséggel

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left(\int_0^T \chi(X(t)\in A)dt\right) &= \sum_{i\in A} p_i \\ &= \frac{m(A)}{m(A)+m(\overline{A})},\end{aligned}$$

ahol $m(A)$ és $m(\overline{A})$ az A ill. az $\overline{A}$ részhalmazban való átlagos tartózkodási időt jelöli egy ciklus alkalmával, p_i pedig az $X(t)$ folyamat ergodikus eloszlása.

Egy m párhuzamos szerverből álló rendszerben átlagosan $\lambda T/m$ igény érkezik szerverenként, feltéve, hogy a forgalom egyenletes eloszlású az m kiszolgáló egység között. Ha minden beérkezett kérés kiszolgálása átlagosan $1/\mu$ ideig tart, akkor a szerver teljes foglaltsági idejének várható értéke $\lambda T/m\mu$. Osszuk el ezt a mennyiséget T-vel, így a

$$\varrho = \frac{\lambda}{m\mu}.$$

Mivel a kihasználtság maximum 1 lehet, így az m szerveres rendszer kihasználtsági tényezőre vonatkozó korrekt kifejezés:

$$\varrho = \min\left\{\frac{\lambda}{m\mu}, 1\right\}.$$

Másik gyakran használt teljesítménymérő eszköz a számítógépes rendszerek sorbanállási modelljének analízisében a *rendszer átbocsátóképességének* vizsgálata. Ezt a mennyiséget úgy definiálhatjuk, mint az időegységenként kiszolgált igények átlagos számát. m szerveres rendszerben minden időegység alatt $m\varrho\mu$ igény kiszolgálása fejeződik be, így az

$$\text{átbocsátóképesség} = m\varrho\mu = \min\{\lambda, m\mu\}.$$

Ami azt jelenti, hogy az átbocsátóképesség ekvivalens a λ érkezési intenzitással, amennyiben a λ kisebb, mint a maximális kiszolgálási sebesség ($m\mu$), azon túl az átbocsátóképesség beáll $m\mu$-re.

A legjelentősebb teljesítménymérő eszköz az igények szempontjából az az idő, amit a várakozási sorban vagy a rendszerben tölt. Definiáljuk a W_j *várakozási időt*, mint a j-dik igény várakozási sorban eltöltött idejét, és a T_j *válaszidőt*, mint az igény által e rendszerben eltöltött teljes időt. Ezen jelöléseket használva a következő egyenlőséget kapjuk:

$$T_j = W_j + S_j,$$

ahol S_j a kiszolgálási időt jelöli. W_j és T_j is valószínűségi változó, várható értékük $\overline{W_j}$ és $\overline{T_j}$ alkalmas a rendszer teljesítményének mérésére.
A rendszer teljesítményének vizsgálata történhet a *várakozási sor hosszának* mérésével is. A $Q(t)$ valószínűségi változó jelentse a t időpillanatban a sorban található igények számát, és $N(t)$ a t időpillanatban a *rendszerben található igények számát*. Egy rendszerben levő igény vagy a várakozási sorban van, vagy éppen kiszolgálás alatt áll, tehát m szerveres rendszer esetén:

$$Q(t) = \max\{0, N(t) - m\}.$$

Mielőtt rátérnénk az elemi sorbanállási rendszerek vizsgálatára, bevezetjük a **Kendall -féle** jelölést, melyek segítségével osztályozhatjuk őket.

Az $A/B/m/K/N$ szimbólum, olyan sorbanállási rendszert jelöl, ahol

- A: a beérkezési időközök eloszlásfüggvénye,
- B: a kiszolgálási idő eloszlásfüggvénye,
- m: a kiszolgálók száma,
- K: a rendszer befogadóképessége, azaz a kiszolgálóegységben és a várakozási sorban tartózkodó igények maximális száma,

- N: az igényforrás számossága.

Ha az említett eloszlások exponenciálisak, akkor az M jelölést használjuk. Továbbá, ha a befogadóképesség vagy az igényforrás számossága végtelen, akkor ezeket a jelöléseket elhagyjuk.

Így pl. az $M/M/1$ rendszer, egy egy kiszolgálós Poisson beérkezéssel és exponenciális kiszolgálási idővel jellemzett rendszert jelöl. Az $M/G/m$ rendszernél a beérkezések Poisson-folyamat szerint történnek, a kiszolgálási idők általános eloszlásúak, és m szerver áll rendelkezésünkre.

Az $M/M/r//N$rendszer esetén az igények egy N elemű forrásból származnak ahol exponenciális eloszlású ideig tartózkodnak, a kiszolgálást r egység végzi exponenciális eloszlású ideig.

2.2.2 Az $M/M/1$ típusú klasszikus sorbanállási rendszer

Az $M/M/1$ rendszer a legegyszerűbb nemtriviális fontos rendszer. Emlékezzük rá, hogy ebben az esetben a beérkezési folyamat λ paraméterű Poisson-folyamat, vagyis a beérkezési időközök λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. A kiszolgálási idők μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Feltesszük továbbá, hogy a beérkezési időközök, és a kiszolgálási idők egymástól független valószínűségi változók. Jelölje most $X(t)$ a t-ik időpillanatban a rendszerben tartózkodó igények számát, és ekkor azt mondjuk, hogy a rendszer a k állapotban van. Mivel a fellépő valószínűségi változók exponenciális eloszlásúak, vagyis emlékezet nélküliek, az $X(t)$ folytonos idejű Markov-lánc lesz.

Vizsgáljuk meg a rendszer állapotváltozásainak valószínűségeit egy adott h időtartam alatt:

$$\begin{aligned} P_{k,k+1}(h) = \quad & (\lambda h + o(h))\,(1 - (\mu h + o(h)) + \\ & \textstyle\sum_{k=2}^{\infty} (\lambda h + o(h))^k \,(\mu h + o(h))^{k-1}\,, \\ & k = 0, 1, 2, \ldots\,. \end{aligned}$$

Az összeg első tagja annak a valószínűsége, hogy a rendszerben egy igény érkezett, és nem szolgáltak ki egyet sem. Az összeg második tagja pedig annak a valószínűségét adja, hogy a rendszerbe 2 vagy több igény érkezett, és a beérkezettnél eggyel kevesebb került kiszolgálásra. De ez a valószínűség éppen $o(h)$-val egyenlő, így

$$P_{k,k+1}(h) = \lambda h + o(h).$$

Az előbbiekhez hasonlóan írható fel annak valószínűsége, hogy a rendszer k állapotban volt és a h időtartam után a $k-1$ állapotba került:

$$\begin{aligned} P_{k,k-1}(h) \; &= (\mu h + o(h))\,(1-(\lambda h + o(h)) + \\ &\textstyle\sum_{k=2}^{\infty} (\lambda h + o(h))^{k-1}\,(\mu h + o(h))^{k} \\ &= \mu h + o(h). \end{aligned}$$

Könnyen látható továbbá, hogy

$$P_{k,j} = o(h), \qquad | \, k - j \, | \geq 2.$$

Tehát egy olyan születési-halálozási folyamattal van dolgunk, amit a születési és halálozási intenzitások alábbi megválasztásával lehet jellemezni:

$$\lambda_k = \lambda, \qquad k = 0, 1, 2, ...,$$

$$\mu_k = \mu, \qquad k = 1, 2, 3....$$

Vagyis az összes születési intenzitás λ, az összes halálozási intenzitás pedig μ. Feltesszük, hogy végtelen hosszúságú sorok is létrejöhetnek, és az igények kiszolgálása FIFO elv alapján történik.

Helyettesítsük be az intenzitásokat a (7)-be, így a következő adódik:

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu},$$

vagyis

$$p_k = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k, \qquad k \geq 0.$$

Az eredmény kézenfekvő. Az ergodikusság feltétele általánosságban (és így annak is, hogy egy $p_k > 0$ stacionárius megoldást kapjunk) $S_1 < \infty$ és $S_2 = \infty$; esetünkben az első feltétel:

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{p_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k < \infty.$$

Az egyenlőség bal oldalán levő sor akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\lambda / \mu < 1.$$

Az ergodicitás második feltétele esetünkben

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda \left(\frac{p_k}{p_0} \right)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^k = \infty.$$

Ez akkor teljesül, ha $\lambda/\mu \leq 1$. Tehát az ergodikusság szükséges és elégséges feltétele az $M/M/1$ sor esetén egyszerűen $\lambda < \mu$. A p_0 valószínűség kiszámolásához a normalizáló feltételt használjuk és azt kapjuk, hogy

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}.$$

Mivel $\lambda < \mu$, ezért az összeg konvergens, és így

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}.$$

A kihasználtsági tényező $\varrho = \frac{\lambda}{\mu}$ vagy 1. A stabilitás feltétele miatt a $0 \leq \varrho < 1$ egyenlőséget meg kell követelni. Ez biztosítja, hogy $p_0 > 0$ legyen. Így

$$p_k = (1-\varrho)\varrho^k, \qquad k = 0, 1, 2, ...,$$

amely valóban valószínűségi eloszlás, nevezetesen a geometriai eloszlás.

A rendszer *jellemzői*:

(I.) A rendszerben tartózkodó *igények átlagos száma*:

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = (1-\varrho)\varrho \sum_{k=1}^{\infty} k\varrho^{k-1} =$$

$$(1-\varrho)\varrho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d\varrho^k}{d\varrho} = (1-\varrho)\varrho \frac{d}{d\varrho}\left(\frac{1}{1-\varrho}\right) = \frac{\varrho}{1-\varrho}.$$

A rendszerben tartózkodó igények számának *szórásnégyzete*:

$$\sigma_N^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (k - \overline{N})^2 p_k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(k - \frac{\varrho}{1-\varrho}\right)^2 p_k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k + \left(\frac{\varrho}{1-\varrho}\right)^2 - \sum_{k=0}^{\infty} 2k \frac{\varrho}{1-\varrho} p_k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k + \frac{\varrho^2}{(1-\varrho)^2} + \frac{\varrho}{1-\varrho} - 2\left(\frac{\varrho}{1-\varrho}\right)^2 =$$

$$(1-\varrho)\varrho^2 \frac{d^2}{d\varrho^2} \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^k + \frac{\varrho}{1-\varrho} - \left(\frac{\varrho}{1-\varrho}\right)^2 =$$

$$\frac{2\varrho^2}{(1-\varrho)^2} + \frac{\varrho}{1-\varrho} - \left(\frac{\varrho}{1-\varrho}\right)^2 = \frac{\varrho}{(1-\varrho)^2}.$$

(II.) A várakozó igények *átlagos száma* (átlagos sorhossz):

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)p_k = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k - \sum_{k=1}^{\infty} p_k = \overline{N} - (1-p_0) = \overline{N} - \varrho = \frac{\varrho^2}{1-\varrho}.$$

Az átlagos sorhossz *szórásnégyzete*:

$$\sigma_Q^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)^2 p_k - \overline{Q}^2 = \frac{\varrho^2(1+\varrho-\varrho^2)}{(1-\varrho)^2}.$$

(III.) A *szerver kihasználtsága*:

$$U_s = 1 - p_0 = \frac{\lambda}{\mu} = \varrho.$$

Ismert továbbá, hogy

$$p_0 = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + E\delta},$$

ahol $E\delta$ a *kiszolgáló átlagos foglaltsági periódushossza*, $\frac{1}{\lambda}$ a tétlenségi idő várható értéke. Mivel a szerver addig tétlen, amíg igény nem érkezik, az pedig exponenciális eloszlású λ paraméterrel. Így

$$1 - \varrho = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + E\delta},$$

melyből

$$E\delta = \frac{1}{\lambda}\frac{\varrho}{1-\varrho} = \frac{1}{\lambda}\overline{N} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

(IV.) Egy igény *várakozási idejének* eloszlása:

Megmutatjuk, hogy egy tetszőleges olyan sorbanállási rendszerre, amelybe az igények Poisson-folyamat szerint érkeznek,

$$P_k(t) = R_k(t),$$

ahol $P_k(t)$ - mint korábban is - annak valószínűsége, hogy a t pillanatban a rendszer a k állapotban van, $R_k(t))$ pedig annak valószínűsége, hogy egy a t pillanatban érkező igény a rendszert a k állapotban találja. Legyen

$$A(t, t + \Delta t)$$

az az esemény, hogy egy beérkezés történik a $(t, t + \Delta t)$ intervallumban. Ekkor

$$R_k(t) := \lim_{\Delta t \to 0} P\left(X(t) = k | A(t, t + \Delta t)\right),$$

ahol $X(t)$ a rendszerbeli igények száma a t pillanatban. Felhasználva a feltételes valószínűség definícióját,

$$R_k(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(X(t) = k \text{ , } A(t, t + \Delta t)\right)}{P\left(A(t, t + \Delta t)\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P\left(A(t, t + \Delta t) | X(t) = k\right) P\left(X(t) = k\right)}{P\left(A(t, t + \Delta t)\right)}.$$

Poisson-folyamat esetén tudjuk, hogy (az emlékezetnélküliség miatt) az $A(t, t + \Delta t)$ esemény nem függ a t pillanatban a rendszerben tartózkodó igények számától (és magától a t időtől sem), ezért

$$P\left(A(t, t + \Delta t) | X(t) = k\right) = P\left(A(t, t + \Delta t)\right),$$

így

$$R_k(t) = \lim_{\Delta t \to 0} P\left(N(t) = k\right),$$

vagyis

$$R_k(t) = P_k(t).$$

Azaz, annak valószínűsége, hogy egy beérkező igény a rendszert a k állapotban találja, éppen azzal a valószínűséggel egyezik meg, hogy a rendszer az k állapotban van.

Ha egy tetszőleges pillanatban egy igény érkezik p_0 annak a valószínűsége, hogy nem kell várkoznia, hisz ekkor a rendszer üres. Minden más esetben várakoznia kell. Tegyük fel, hogy az érkezés pillanatában n igény tartózkodik a rendszerben. Ekkor az érkező igénynek meg kell várnia míg a kiszolgálás alatt álló igény kiszolgálása befejeződik és az előtte álló $n-1$ igény elhagyja a rendszert.

Feltettük, hogy a kiszolgálások egymástól függetlenek és μ paraméterű exponenciális eloszlásúak. Köztudott, hogy az exponenciális eloszlás emlékezetnélküli, így a kiszolgálás alatt levő igény eloszlása független attól mióta folyik a kiszolgálás, ezért a várakozási idő Γ vagy Erlang- eloszlású μ paraméterrel, és p_n esetben n paraméterrel. Emlékeztetőül a k és μ paraméterű Erlang-eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f_k(x) = \frac{\mu(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu x}, \qquad x \geq 0.$$

Jelölje $f_W(x)$ egy tetszőleges igény várakozási idejének sűrűségfüggvényét, $x > 0$. A teljes valószínűség tétele értelmében:

$$f_W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!}\mu e^{-\mu x}\varrho^n(1-\varrho) = (1-\varrho)\varrho\mu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu x\varrho)^k}{k!}e^{-\mu x} =$$

$$(1-\varrho)\varrho\mu e^{-\mu(1-\varrho)x}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} f_W(0) &= 1-\varrho, && \text{ha } x = 0, \\ f_W(x) &= \varrho(1-\varrho)\mu e^{-\mu(1-\varrho)x}, && \text{ha } x > 0. \end{aligned}$$

Így

$$F_W(x) = 1-\varrho+\varrho\left(1-e^{-\mu(1-\varrho)x}\right) = 1-\varrho e^{-\mu(1-\varrho)x}.$$

Az átlagos várakozási idő:

$$\overline{W} = \int_0^{\infty} x f_W(x)dx = \frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)} = \varrho E\delta = \overline{N}\frac{1}{\mu}.$$

(V.) Egy igény *tartózkodási idejének* eloszlása:

A gondolatmenet az előzőhöz hasonló, de az igény akkor hagyja el a rendszert, ha őt is kiszolgálták, így az Erlang eloszlás $n+1$ tagból tevődik össze. Tehát a sűrűségfügvény:

$$f_T(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\varrho)\varrho^n\frac{(\mu x)^n}{n!}\mu e^{-\mu x} = \mu(1-\varrho)e^{-\mu x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\varrho\mu x)^n}{n!} =$$

$$\mu(1-\varrho)e^{-\mu(1-\varrho)x}.$$

Az eloszlásfüggvény:

$$F_T(x) = 1 - e^{-\mu(1-\varrho)x}.$$

Vagyis azt kaptuk, hogy a tartózkodási idő is exponenciális eloszlású $\mu(1-\varrho)$ paraméterrel, azaz $\mu-\lambda$ paraméterrel. Ezért az átlagos rendszerbeli tartózkodási idő:

$$\overline{T} = \frac{1}{\mu(1-\varrho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}.$$

Továbbá, nyilvánvaló, hogy

$$\overline{T} = \overline{W} + \frac{1}{\mu} = \frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\varrho)} = \frac{1}{\mu-\lambda} = E\delta.$$

Vegyük észre, hogy

$$\lambda\overline{T} = \lambda\frac{1}{\mu(1-\varrho)} = \frac{\varrho}{1-\varrho} = \overline{N}. \tag{8}$$

Továbbá

$$\lambda\overline{W} = \lambda\frac{\varrho}{\mu(1-\varrho)} = \frac{\varrho^2}{1-\varrho} = \overline{Q}. \tag{9}$$

A (8) és a (9) összefüggéseket **Little-formulának** nevezzük, mely sokkal általánosabb esetben is igaz.

Példa:

Egy postahivatalban naponta 70 személy fordul meg (a posta minden nap 10 óra hosszat van nyitva) ; óránként 10 személyt képesek kiszolgálni. Tételezzük fel, hogy a beérkezések megfelelnek a Poisson-folyamat jellegzetességeinek és a kiszolgálás exponenciális eloszlású. Mekkora lesz a várakozó sor átlagos hossza, mi annak a valószínűsége, hogy sorban 2-nél több személy várakozzék? Mennyi a várható sorban állási idő? Mennyi annak a valószínűsége, hogy a várakozás 20 percnél több időt vesz igénybe? $M\delta =$?

Megoldás:

Legyen $T = 1$ óra, akkor $\lambda = 7$, $\mu = 10$, $\rho = \frac{7}{10}$

$$\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{7}{3},\ \ \overline{Q} = \overline{N} - \rho = \frac{7}{3} - \frac{7}{10} = \frac{70-21}{30} = \frac{49}{30}$$

$$P(n>3) = 1 - P(n\le 3) = 1 - P_0 - P_1 - P_2 - P_3 =$$

$$= 1 - 1 + \rho - (1-\rho)(\rho+\rho^2+\rho^3) = \rho^4 = 0.343\cdot 0.7 = 0.2401$$

$$\overline{W} = \frac{\overline{N}}{\mu} = \frac{7}{3 \cdot 10} = \frac{7}{30} \text{ óra } \approx 14 \text{ perc}$$

$$P(W > \frac{1}{3}) = 1 - F_W(\frac{1}{3}) = 0.7 \cdot e^{-10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.3} = 0.7 \cdot e^{-}1 = 0.257$$

Java applet a jellemzők meghatározására.

2.2.3 Az $M/M/1/K$ típusú, véges befogadóképességű rendszer

Most olyan sorbanállási rendszert vizsgálunk, amelyben rögzített a várakozó igények számának maximuma. Feltesszük, hogy a rendszerben legfeljebb K igény tartózkodhat (beleértve a kiszolgáló egységben levő igényt is), egyetlen ezen felül érkező igény sem léphet be a rendszerbe, hanem azonnal távozik, anélkül, hogy kiszolgálnák őt. Továbbra is Poisson-folyamat szerint érkeznek az igények, azonban csak azok az igények léphetnek be a rendszerbe, amelyek érkezésekor kevesebb, mint K igény van a rendszerben.

Ennek a látszólag bonyolult rendszernek a leírását az alábbi módon tudjuk összhangba hozni a születési-halálozási modellel. Az előzőekhez hasonlóan nem nehéz belátni, hogy ebben az esetben az alábbi intenzitásokat kapjuk.

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & \text{, ha } k < K, \\ 0 & \text{, ha } k \geq K, \end{cases}$$

$$\mu_k = \mu, \qquad k = 1, 2, ..., K.$$

Látszik, hogy ez a rendszer mindig ergodikus, mert állapottere véges. Továbbá

$$p_k = p_0 \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \qquad \text{ha } k \leq K.$$

Természetesen

$$p_k = 0, \text{ ha } k > K.$$

Szeretnénk kiszámolni a p_0 valószínűséget. A normalizáló feltétel alapján

$$p_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1} = \left[1 + \frac{(\lambda/\mu)\left(1 - (\lambda/\mu)^K\right)}{1 - \lambda/\mu}\right]^{-1} = \frac{1 - \lambda/\mu}{1 - (\lambda/\mu)^{k+1}},$$

végül

$$p_k = \begin{cases} \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{K+1}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k & \text{, ha } 0 \leq k \leq K, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$K = 1$ esetén az $M/M/1/1$ rendszer azt jelenti, hogy egyáltalán nincs várakozás.

$$p_k = \begin{cases} \frac{1}{1+\lambda/\mu} & \text{, ha } k = 0, \\ \frac{\lambda/\mu}{1+\lambda/\mu} & \text{, ha } k = 1 = K, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Java applet a jellemzők meghatározására.

2.2.4 Az $M/M/n$ típusú rendszer

Ismét olyan λ állandó beérkezési intenzitású rendszert vizsgálunk, melyben korlátlan hosszúságú sor kialakulása megengedett. A rendszer n db kiszolgálócsatornával, szerverrel van ellátva. Ez az eset is leírható születési-halálozási folyamattal a következők miatt. Először is vegyünk független, μ_i paraméterű exponenciális eloszlású ξ_i valószínűségi változókat. Jelöljük η-val ezen ξ_i $(i = 1, 2, ..., N)$ változók minimumát. Nem nehéz belátni, hogy η is exponenciális eloszlású lesz $\sum \mu_i$ paraméterrel. Ugyanis

$$P(\eta < x) = 1 - P(\eta \geq x) = 1 - P(\xi_i \geq x,\ i = 1, ..., N) =$$

$$1 - \prod_{i=1}^{N} P(\xi_i \geq x) = 1 - e^{-\sum_{i=1}^{N} \mu_i x}.$$

Ezt felhasználva kapjuk meg annak valószínűségét, hogy a rendszer a h idő alatt a k állapotból a $k-1$ állapotba, ill. a k állapotból a $k+1$ állapotba kerül. Így

$$\begin{aligned} P_{k,k-1}(h) = & \ (1 - (\lambda h + o(h)))\,(\mu_k h + o(h)) + o(h) = \mu_k h + o(h), \\ P_{k,k+1}(h) = & \ (\lambda h + o(h))\,(1 - (\mu_k h + o(h))) + o(h) = \lambda h + o(h), \end{aligned}$$

ahol

$$\mu_k = \min(k\mu, n\mu) = \begin{cases} k\mu & \text{, ha } 0 \leq k \leq n, \\ n\mu & \text{, ha } n < k. \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy az ergodikusság feltétele $\lambda/n\mu < 1$.

Amikor a (7) segítségével hozzákezdünk a p_k mennyiségek kiszámolásához, azt találjuk, hogy a megoldást két részre kell szétbontanunk, mivel μ_k mennyiség kétféle módon függ k-tól. Eszerint, ha $k < n$, akkor

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}.$$

Ha viszont $k \geq n$, akkor

$$p_k = p_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{j=n}^{k-1} \frac{\lambda}{n\mu} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{n!n^{k-n}}.$$

Összefoglalva a kapott eredményeket:

$$p_k = \begin{cases} p_0 \dfrac{(n\varrho)^k}{k!} & \text{, ha } k \leq n, \\ p_0 \dfrac{\varrho^k n^n}{n!} & \text{, ha } k > n, \end{cases}$$

ahol

$$\varrho = \frac{\lambda}{n\mu} < 1.$$

Ez a ϱ éppen a kihasználtsági tényező. Továbbá

$$p_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n\varrho)^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(n\varrho)^k}{n!} \frac{1}{n^{k-n}}\right)^{-1},$$

és így

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n\varrho)^k}{k!} + \frac{(n\varrho)^n}{n!} \frac{1}{1-\varrho}\right)^{-1}.$$

Annak a valószínűsége, hogy egy újonnan érkező igénynek sorba kell állnia,

$$P(\text{sorbanállás}) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = \sum_{k=n}^{\infty} p_0 \frac{(n\varrho)^k}{n!} \frac{1}{n^{k-n}}.$$

Ebből

$$P(\text{sorbanállás}) = \frac{\dfrac{(n\varrho)^n}{n!} \dfrac{1}{1-\varrho}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n\varrho)^k}{k!} + \frac{(n\varrho)^n}{n!} \frac{1}{1-\varrho}}.$$

Ezt a valószínűséget széles körben használják a telefonálással kapcsolatban. Itt annak a valószínűségét adja meg, hogy egy újonnan beérkezett hívás (igény) számára nincs szabad vonal (kiszolgálóegység) egy n szerveres rendszerben. Ez **Erlang C-formulája,** amit többnyire $C(n, \lambda/\mu)$ szimbólummal jelölnek.

Az $M/M/n$ rendszer jellemzői:

(I.) Az *átlagos sorhossz*:

$$\overline{Q} = \sum_{k=n}^{\infty}(k-n)p_k = \sum_{j=0}^{\infty} jp_{n+j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+j}}{n!n^j}p_0 =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}}{n!}\varrho^j p_0 = p_0\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}}{n!}\varrho\sum_{j=0}^{\infty}\frac{d\varrho^j}{d\varrho} = p_0\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}}{n!}\varrho\frac{d}{d\varrho}\sum_{j=0}^{\infty}\varrho^j =$$

$$p_0\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}}{n!}\frac{\varrho}{(1-\varrho)^2}.$$

(II.) A foglalt *szerverek átlagos száma*:

$$\overline{n} = \sum_{k=0}^{n-1} kp_k + \sum_{k=n}^{\infty} np_k = p_0\left(n\varrho\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n\varrho)^k}{k!} + \frac{(n\varrho)^n}{(n-1)!}\frac{1}{1-\varrho}\right) =$$

$$n\varrho\left(\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n\varrho)^k}{k!} + \frac{(n\varrho)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(n\varrho)^{n-1}}{(n-1)!}\left(\frac{1}{1-\varrho}-1\right)\right)p_0 =$$

$$n\varrho\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n\varrho)^k}{k!} + \frac{(n\varrho)^n}{n!}\frac{1}{1-\varrho}\right)p_0 = n\varrho\frac{1}{p_0}p_0 = n\varrho.$$

(III.) A rendszerben tartózkodó *igények átlagos száma*:

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{n-1} kp_k + \sum_{k=n}^{\infty}(k-n)p_k + \sum_{k=n}^{\infty} np_k = \overline{n} + \overline{Q},$$

ami egyszerű megfontolásokból is adódik, hiszen egy igény vagy várakozik, vagy kiszolgálás alatt van. A kiszolgálás alatt levők száma viszont megegyezik a foglalt kiszolgálóegységek számával. Ha $\overline{S}$-gal jelöljük a szabad szerverek vagy kiszolgálóegységek átlagos számát, akkor

$$\begin{aligned}\overline{n} &= n - \overline{S},\\ \overline{S} &= n - \tfrac{\lambda}{\mu},\end{aligned}$$

így

$$\overline{N} = n - \overline{S} + \overline{Q},$$

vagyis

$$\overline{N} - n = \overline{Q} - \overline{S}.$$

(IV.) A *várakozási idő* eloszlása:

Egy érkező igénynek akkor kell várakoznia, ha a rendszerben legalább n igény tartózkodik. Mivel ebben az esetben a kiszolgálás $n\mu$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, az igény várakozási ideje, ha $n+j$ igény tartózkodik a rendszerben Erlang-eloszlású $j+1$ és $n\mu$ paraméterekkel. Így a teljes valószínűség tétele alapján a várakozási idő sűrűségfüggvénye:

$$f_W(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{n+j}(n\mu)^{j+1}\frac{x^j}{j!}e^{-n\mu x}.$$

Behelyettesítve a stacionárius eloszlást

$$f_W(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_0 \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}\varrho^j (n\mu)^{j+1}\frac{x^j}{j!}e^{-n\mu x} =$$

$$\frac{p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} n\mu e^{-n\mu x}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\varrho n\mu x)^j}{j!} =$$

$$\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{n!} p_0 n\mu e^{-(n\mu-\lambda)x} =$$

$$\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} p_0 n\mu e^{-n\mu(1-\varrho)x} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} p_0 \frac{1}{1-\varrho} n\mu(1-\varrho)e^{-n\mu(1-\varrho)x} =$$

$$P(\text{sorbanállás}) n\mu(1-\varrho)e^{-n\mu(1-\varrho)x}.$$

Vagyis

$$P(W > x) = \int_x^{\infty} f_W(u)du = P(\text{sorbanállás})e^{-n\mu(1-\varrho)x}.$$

A várakozási idő eloszlásfüggvénye:

$$F_W(x) = 1 - P(\text{sorbanállás}) + P(\text{sorbanállás})\left(1 - e^{-n\mu(1-\varrho)x}\right) =$$

$$1 - P(\text{sorbanállás})e^{-n\mu(1-\varrho)x}.$$

Innen az átlagos várakozási idő:

$$\overline{W} = \int_0^{\infty} x f_W(x)dx = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n} p_0 \frac{1}{(1-\varrho)^2 n\mu}.$$

(V.) A *tartózkodási idő* eloszlása:
A kiszolgálás azonnal elkezdődik, ha a rendszerben n-nél kevesebb igény tartózkodik, így stacionárius esetben egy érkező igény rendszerben eltöltött ideje megegyezik a kiszolgálási idővel. Azonban, ha várakoznia kell, akkor a tartózkodási idő és a kiszolgálási idő összege, vagyis az eloszlás két független eloszlás összege, mely közül az egyik μ paraméterű exponenciális, a másik pedig a rendszertől függő paraméterű Erlang-eloszlás. A tartózkodási idő sűrűségfüggvényét a következő módon határozzuk meg.

$$f_T(x) = P(\text{nincs sorbanállás})\mu e^{-\mu x} +$$

$$\{\text{a várakozási idő és a kiszolgálási idő konvolúciója}\}.$$

Megjegyzés:

ξ, η nemnegatív, független valószínűségi változók konvolúciója:

$$f_{\xi+\eta}(z) = \int_0^z f_\xi(x) f_\eta(z-x)\,dx.$$

Tudjuk, hogy

$$f_W(x) = P(\text{sorbanállás})e^{-n\mu(1-\varrho)x} n\mu(1-\varrho).$$

Ekkor

$$f_{W+\text{kiszolgálás}}(z) = \int_0^z f_W(x)\mu e^{-\mu(z-x)}dx =$$

$$P(\text{sorbanállás})n\mu(1-\varrho)\mu \int_0^z e^{-n\mu(1-\varrho)x} e^{-\mu(z-x)}dx =$$

$$\frac{(n\varrho)^n}{n!} p_0 \frac{1}{(1-\varrho)} n\mu(1-\varrho)\mu e^{-z\mu} \int_0^z e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)x}dx =$$

$$\frac{(n\varrho)^n}{n!} p_0 n\mu \frac{1}{n-1-\lambda/\mu} e^{-\mu z}\left(1 - e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)z}\right).$$

Ezért

$$f_T(x) = \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{p_0}{n!(1-\varrho)}\right)\mu e^{-\mu x} +$$

$$+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}n\mu p_0\frac{1}{n-1-\lambda/\mu}e^{-\mu x}\left(1-e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)x}\right)=$$

$$\mu e^{-\mu x}\left(1-\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0}{n!(1-\varrho)}+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}np_0\frac{1}{n-1-\lambda/\mu}\left(1-e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)x}\right)\right)=$$

$$\mu e^{-\mu x}\left(1+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_o}{n!(1-\varrho)}\frac{1-(n-\lambda/\mu)}{n-1-\lambda/\mu}e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)x}\right).$$

Így

$$P(T>x)=\int_x^\infty f_T(y)dy=$$

$$=\int_x^\infty \mu e^{-\mu y}+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0}{n!(1-\varrho)}\left(\frac{1}{n-1-\lambda/\mu}\mu e^{-\mu y}-\mu(n-\lambda/\mu)e^{-\mu(n-\lambda/\mu)y}\right)dy=$$

$$=e^{-\mu x}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0\frac{1}{n!(1-\varrho)(n-1-\lambda/\mu)}\left(e^{-\mu x}-e^{-\mu(n-\lambda/\mu)x}\right)=$$

$$=e^{-\mu x}\left(1+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0}{n!(1-\varrho)}\frac{1-e^{-\mu(n-1-\lambda/\mu)x}}{n-1-\lambda/\mu}\right).$$

Innen

$$F_T(x)=1-P(T>x).$$

Továbbá

$$\overline{T}=\int_0^\infty xf_T(x)dx=\frac{1}{\mu}+\frac{1}{n\mu}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}p_0\frac{1}{(1-\varrho)^2}=\frac{1}{\mu}+\overline{W},$$

mint az várható volt.

Stacionárius esetben a távozó igények átlagos számának meg kell egyeznie az érkező igények átlagos számával, így a rendszerben tartózkodók átlagos száma állandó. Tehát annyi igény tartózkodik átlagosan a rendszerben, amennyi érkezik egy igény tartózkodási ideje alatt, vagyis

$$\lambda\overline{T}=\overline{N}=\overline{Q}+\overline{n},$$

továbbá

$$\lambda\overline{W} = \overline{Q}.$$

Ezek az ún. **Little-formulák,** melyeket számolás útján is könnyen bizonyíthatunk. Ugyanis, mint beláttuk

$$\overline{N} = n\varrho + p_0 \frac{(n\varrho)^n}{n!(1-\varrho)^2}\varrho.$$

Mivel

$$\overline{T} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{n\mu}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!}p_0\frac{1}{(1-\varrho)^2},$$

így

$$\lambda\overline{T} = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{(n\varrho)^n}{n!}p_0\frac{\varrho}{(1-\varrho)^2},$$

vagyis

$$\overline{N} = \lambda\overline{T},$$

mivel $\frac{\lambda}{\mu} = n\varrho$. Továbbá

$$\overline{Q} = \lambda\overline{W},$$

mivel

$$\overline{n} = n\varrho.$$

(VI.) A szerverek *összkihasználtsága*:
A rendszerben n db szerver van, ezek akkor foglaltak, ha legalább 1, legalább 2, ..., legalább n foglalt. Így

$$U_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{\infty} p_j = \sum_{l=1}^{n-1} l p_l + \sum_{l=n}^{\infty} n p_l = \overline{n} = n\varrho,$$

ami várható volt. Nyilvánvalóan egy szerver kihasználtsága:

$$U_s = \frac{U_n}{n} = \varrho.$$

(VII.) A *foglaltsági periódushosszak*:
A rendszert akkor nevezzük tétlennek, ha a rendszerben nem tartózkodik igény, minden más esetben foglaltnak nevezzük. Jelölje a $E\delta^{(n)}$ a rendszer átlagos foglaltsági periódushosszát. Ekkor a jól ismert felújítási tételek miatt:

$$U_n = 1 - p_0 = \frac{E\delta^{(n)}}{\frac{1}{\lambda} + E\delta^{(n)}},$$

melyből

$$E\delta^{(n)} = \frac{1-p_0}{\lambda p_0}.$$

Ha az egyes kiszolgáló egységeket tekintjük és feltesszük, hogy üres egységnél, szervernél ahhoz érkezik hamarabb igény, amely korábban vált üressé, akkor ha $j < n$ igény tartózkodik a rendszerben, a szabad szerverek száma $n-j$.

Tekintsünk egy konkrét szervert és tegyük fel, hogy a rendszerben j igény tartózkodik a szerver szabaddá válása pillanatában. Ekkor ezen szerver átlagos üresjárati ideje ilyen esetben

$$\overline{e}_j = \frac{n-j}{\lambda}.$$

Annak a valószínűsége, hogy ez az állapot fennáll

$$a_j = \frac{p_j}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} p_i},$$

így egy szerver átlagos szabad periódushossza:

$$\overline{e} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \overline{e}_j = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-j)p_j}{\lambda \sum_{i=0}^{n-1} p_i} = \frac{\overline{S}}{\lambda P(e)},$$

ahol $P(e)$ annak a stacionárius valószínűsége, hogy egy érkező igénynek nem kell várakoznia. A Markov-folyamatok és felújítási-elmélet tételei szerint

$$\frac{U_n}{n} = \varrho = \frac{E\delta}{\overline{e} + E\delta},$$

melyből

$$\varrho \overline{e} = (1-\varrho) E\delta,$$

ahol ϱ annak stacionárius valószínűsége, hogy a szerver nem üres, $E\delta$ pedig az átlagos foglaltsági periódushossza. Így

$$E\delta = \frac{\varrho}{1-\varrho} \frac{\overline{S}}{\lambda P(e)}.$$

$n = 1$ esetben

$$\overline{S} = 1-\varrho, \qquad P(e) = p_0 = 1-\varrho, \qquad \varrho = \frac{\lambda}{\mu},$$

így

$$E\delta = \frac{1}{\mu - \lambda},$$

mely a jól ismert képlet.

Példák:

1. Adott egy 4 csatornás telefonközpont, $\lambda = 6$, $\mu = 2$, melynek forgalmi intenzitása $\frac{3}{4}$.

   Határozzuk meg a rendszer jellemzőit!

   Megoldás:

   $$P_0 = 0.0377,\ \ \overline{Q} = 1.528,\ \ \overline{N} = 4.528,\ \ \overline{S} = 1,\ \ \overline{n} = 3$$
   $$P(W > 0) = P(u \geq 4) = C(4,3) = 0.509$$

   $\overline{W} = 0.255$ időegység, $\overline{T} = 0.755$ időegység, $U = \frac{3}{4}$,

   $\overline{e} = 0.35$ időegység, $M\delta = 1.05$ időegység,

   $M\delta^{(4)} = 4.2$ időegység, $U_r = 0.9623$.

2. Egy repülőtér kifutópályáinak számát úgy kell meghatároznunk, hogy a leszállni kívánó repülőgép várakozásának valószínűsége 0.1-nél kisebb legyen. A befutások statisztikai vizsgálata megmutatta, hogy megengedhető a repülőgépek érkezését Poisson-eloszlással közelíteni. źránként $\lambda = 27$ érkezést mértek. A kifutópálya elfoglaltságának időtartama exponenciálisan oszlik el 2 perc várható értékkel.

   Megoldás:

   Alkalmazzuk az ismert képleteket $\mu = 30$ értékkel.

   $p = \frac{\lambda}{n\mu} < 1$ feltétel biztosítására $n > 1$ kell hogy legyen.

   $P_2(w > 0)$ jelölje a várakozási valószínűségét i kifutópálya esetén.

   Számolással a megfelelő képletbe való helyettesítéssel a következő

   valószínűségeket kapjuk:

   $$P_2(w > 0) = 0.278, P_3(w > 0) = 0.070, P_4(w > 0) = 0.014$$

   Így a kívánt valószínűség eléréséhez $n = 3$ értéket kell tekinteni.

   $P_0 = 0.403$.

   Ekkor a $\overline{W} = 0.0665 perc, \overline{Q} = 0.03$

3. Egy üzlet pénztárához a vevők átlagban 6 másodpercenként érkeznek Poisson eloszlás szerint. A kiszolgálási idejük exponenciális eloszlású, 20 másodperc átlaggal. Ha egy pénztár fenntartása óránként 100 Ft-ba kerül, és ugyanennyi a várakozási költség is, mennyi pénztárt kell üzemeltetni, hogy a teljes költség várható értéke minimális legyen? (Ez óránkénti kölség lesz.)

Megoldás:

$$\overline{Q} = \lambda \overline{W} = 100 \times \frac{3600}{6} \overline{W}$$

$$M(TC) = 100 \times n = 100 \times 600 \times \overline{W}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{20}} = \frac{20}{6} \text{ így } n \geq 4 \ .$$

Sorba véve az $n = 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ értékeket az óránkénti minimális várható költség $n = 5$ esetben adódik. Ekkor a rendszer jellemzői:

$$\overline{W} = 3.9 sec, \quad P(e) = 0.66, \quad P(W) = 0.34 \ ,$$

$$M\delta = 29.7 sec, \quad \overline{e} = 14.9 sec, \quad \overline{Q} = 0.65 \ ,$$

$$\overline{n} = 2.5, \quad \overline{N} = 3.15, \quad \overline{S} = 2.5, \quad M(TC) = 565 Ft/\text{óra}.$$

Java applet a jellemzők meghatározására.

2.2.5 Az $M/M/n/n$ típusú Erlang-féle veszteséges rendszer

Ezen modellre n csatornás veszteséges rendszerként is szokás hivatkozni az alábbiak miatt. Az n csatornás rendszerbe Poisson-folyamat szerint érkeznek az igények. Ha van üres csatorna vagy szerver az igény kiszolgálása exponenciális időtartamú μ paraméterrel. Ha minden kiszolgáló egység foglalt, akkor az igény elvész, azaz sorbanállás nem megengedett. Ezen probléma a tömegkiszolgálás egyik legrégibb problémája, mellyel a század elején a telefonközpontok kihasználtságával kapcsolatban foglalkozott A.K. Erlang és C. Palm. Hasonló jelenséggel találkozunk a parkolóhelyek esetében is.

A feltételek alapján ez is egy születési-kihalási folyamattal modellezhető, melynek intenzitásai a következők:

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & \text{, ha } k < n, \\ 0 & \text{, ha } k \geq n, \end{cases}$$

$$\mu_k = k\mu, \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Azt mondjuk, hogy a folyamat k állapotban van, ha k szerver foglalt, azaz ha k igény tartózkodik a rendszerben.
Nyilvánvalóan az ergodikus eloszlás létezik, mivel a folyamat véges állapotterű. A folyamat stacionárius eloszlása:

$$p_k = \begin{array}{ll} p_0 \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{1}{k!} & \text{, ha } k \leq n, \\ 0 & \text{, ha } k > 0. \end{array}$$

A normalizáló feltétel miatt:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} \right)^{-1},$$

így

$$p_k = \frac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \dfrac{1}{k!}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^i \dfrac{1}{i!}} = \frac{\dfrac{\varrho^k}{k!}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \dfrac{\varrho^i}{i!}}.$$

A rendszer egyik jellemzője a

$$p_n = \frac{\dfrac{\varrho^n}{n!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{\varrho^k}{k!}}$$

valószínűség, melyet először Erlang vezetett be (1917-ben) és **Erlang-féle veszteségformula vagy Erlang-féle B formula néven ismert,** általában $B(n, \lambda/\mu)$ szimbólummal jelölik. A p_n valószínűség annak a valószínűsége stacionárius esetben, hogy egy újonnan érkező igényt nem fogad a rendszer, azaz az igény elveszik.

Kis n-re a p_0 valószínűség könnyen kiszámolható. Nagy n-re és kis ϱ-ra $p_0 \approx e^{-\varrho}$, így

$$p_k \approx \frac{\varrho^k}{k!} e^{-\varrho},$$

azaz a Poisson-eloszlás $(k+1)$-dik tagja. Nagy n-re és nagy ϱ-ra általában

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\varrho^j}{j!} \neq e^{\varrho}.$$

Ebben az esetben a nevező a ϱ közepű Poisson-eloszlás első $(n+1)$ tagjának összege. Elegendő nagy ϱ-ra ($\varrho > 15$) a Poissson-eloszlást közelítjük ϱ közepű és $\sqrt{\varrho}$ szórású normális eloszlással, így

$$p_n \approx \frac{\frac{\varrho^n}{n!}e^{-\varrho}}{\Phi(s)},$$

ahol

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^{s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

és

$$s = \frac{n + \frac{1}{2} - \varrho}{\sqrt{\varrho}}.$$

Az $M/M/n/n$ rendszer jellemzői:

(I.) A rendszerben tartózkodó *igények átlagos száma*, a foglalt *szerverek átlagos száma*:

$$\overline{N} = \overline{n} = \sum_{j=0}^{n} jp_j = \sum_{j=0}^{n} j\frac{\varrho^j}{j!}p_0 = \varrho\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\varrho^i}{i!}p_0 = \varrho(1-p_n),$$

így 1 szerverre jutó átlagos igényszám:

$$\frac{\varrho}{n}(1-p_n).$$

(II.) A *szerverek kihasználtsága*:
A szerverek akkor foglaltak, ha a rendszerben legalább 1, legalább $2, \ldots$, legalább n igény tartózkodik. Így

$$U_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} p_j = \sum_{k=0}^{n} jp_j = \overline{n}.$$

Ezért

$$U_s = \frac{\overline{n}}{n} = \frac{\varrho}{n}(1-p_n).$$

(III.) Az átlagos *tétlenségi idő* (egy konkrét kiszolgáló esetén):

A jól ismert összefüggést alkalmazva:

$$P(\text{az adott kiszolgálóegység foglalt}) = \frac{1/\mu}{\overline{e} + 1/\mu},$$

ahol $\overline{e}$ az átlagos tétlenségi idő. Így

$$\frac{\varrho}{n}(1-p_n) = \frac{1/\mu}{\overline{e}+1/\mu},$$

tehát

$$\overline{e} = \frac{n}{\lambda(1-p_n)} - \frac{1}{\mu}.$$

Ha az üres szerverek olyan sorrendben kezdik kiszolgálni az érkező igényeket, mint amilyen sorrendben ők megüresedtek, akkor egy szerver működését a következőképpen írhatjuk le. Ha egy üressé vált szerver $(j-1)$ másik üres szervert talál megüresedése pillanatában, akkor csak a j-dik igény kiszolgálásával kezdődik ismét a foglaltsági periódusa.

Jelölje $\overline{e}$ a szerver átlagos üresjárati periódusa hosszát, $\overline{e}_j$ pedig a fenti állapotban az átlagos tétlenségi időt. Nyilvánvalóan $\overline{e}_j = \frac{j}{\lambda}$, $\overline{e}$ pedig a teljes várható érték tétele alapján:

$$\overline{e} = \sum_{j=1}^{n} \frac{p_{n-j}}{1-p_n}\frac{j}{\lambda} = \frac{1}{\lambda(1-p_n)}\overline{S} = \frac{n-\overline{n}}{\lambda(1-p_n)} =$$

$$\frac{n}{\lambda(1-p_n)} - \frac{\varrho}{\lambda} = \frac{n}{\lambda(1-p_n)} - \frac{1}{\mu},$$

azaz más úton is ugyanarra az eredményre jutunk.

(IV.) A rendszer átlagos *foglaltsági periódushossza*:
Nyilvánvalóan

$$U_n = 1-p_0 = \frac{E\delta^{(n)}}{\frac{1}{\lambda}+E\delta^{(n)}},$$

melyből

$$E\delta^{(n)} = \frac{1-p_0}{\lambda p_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{\varrho^i}{i!}}{\lambda\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\varrho^i}{i!}\right)}.$$

Példák:

1. Egy parkolóhoz az autók 20 másodpercenként érkeznek, és átlagosan 10 percig maradnak. A beérkezés Poisson, a kiszolgálás exponenciális. Milyen

nagynak kell lennie a parkolónak, hogy egy autó 1% eséllyel forduljon vissza, mert a parkoló telített.

Megoldás:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{\frac{1}{3}} = 30$$

$$P_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}e^{-\rho}}{\sum_{j=0}^{n}\frac{\rho^j}{j!}e^{-\rho}} = 0.01$$

a normális approximációt követve

$$P_n = 0.01 = \frac{\frac{\rho^n}{n!}e^{-\rho}}{\Phi\left(\frac{n+\frac{1}{2}-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)} =$$

$$\frac{\Phi\left(\frac{n+\frac{1}{2}-\rho}{\sqrt{\rho}}\right) - \Phi\left(\frac{n-\frac{1}{2}-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)}{\Phi\left(\frac{n+\frac{1}{2}-\rho}{\sqrt{\rho}}\right)}.$$

Ebből

$$0.99\Phi\left(\frac{n+\frac{1}{2}-\rho}{\sqrt{\rho}}\right) = \Phi\left(\frac{n-\frac{1}{2}-\rho}{\sqrt{\rho}}\right).$$

A normális eloszlás táblázatából nem nehéz ellenőrízni, hogy $n = 41$.

2. Egy 50 csatornás telefonközpontba átlagosan 10 percenként érkeznek hívások Poisson-eloszlás szerint. A kiszolgálási idő exponenciális, 5 perc átlaggal. Határozzuk meg a rendszer jellemzőit.

   Megoldás:

   Esetünkben Poisson közelítés vehető, így $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{4} = 0.5$

   $P_{50} = 0.00000$ a Poisson-eloszlás szerint, sőt, még $n = 6$-nál is

   $P_6 = 0,00001$. Ez azt jelenti, hogy igény szinte sohasem lesz elutasítva.

   A foglalt csatornák átlagos száma

   $$\overline{n} = \rho(1 - P_n) = \rho = 0.5\ ,$$

   így az egy csatornára jutó átlagos igényszám

   $$\frac{0.5}{50} = \frac{5 \times 10^{-1}}{5 \times 10} = 10^{-2}\ ,$$

mely egyben a csatornák kihasználtsága $U_50 = 10^{-2}$.

$U_r = 1 - 0.606 = 0.394$ mely a rendszer kihasználatsága.

A rendszer átlagos foglaltsági periódushossza

$$M\delta = \frac{(1-P_0)}{(\lambda P_0)} = \frac{0.394}{2 \times 0.606} = \frac{0.394}{1.212} = 0.32 \text{ perc}$$

A csatornák átlagos tétlenségi ideje

$$\overline{e} = \frac{n}{\lambda(1-P_n)} - \frac{\rho}{\lambda} = \frac{50}{2(1-0)} - \frac{0,5}{2} = 25 - \frac{1}{4} = 24.75 \text{ perc}$$

A csatornák átlagos foglaltsági ideje

$$M\delta = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{4} \text{ perc}$$

Java applet a jellemzők meghatározására.

2.2.6 Véges forrású rendszerek

Eddig olyan rendszerekkel foglalkoztunk, ahol a beérkezések Poisson-folyamat szerint történnek. Ez más szóval azt is jelenti, hogy a forrásunk végtelen. Azonban a gyakorlatban is találhatók olyan problémák, amelyeknél a *forrás véges*. Tekintsük az ún. *gépkiszolgálási problémát*. Tegyük fel, hogy n darab gép működik egymástól függetlenül. A gépek működési ideje valószínűségi változó. Miután a gép meghibásodik egy vagy több szerelő kijavítja, ahol a javítási idők is valószínűségi változók. Javítás után a gépek ismét dolgozni kezdenek, és az egész folyamat kezdődik előről. Látható, hogy teljesen hasonló problémával találkozunk a terminál-rendszernél, ahol a gépek szerepét a terminálok, a szerelő szerepét a CPU veszi át. Mivel az utóbbi időben a számítógépek sztochasztikus modellezésében egyre nagyobb szerepet játszanak a sorbanállási rendszerek, jelen fejezetben gyakran használunk számítástechnikai kifejezéseket is.

2.2.6.1 Az $M/M/1//n$ modell

Feltesszük, hogy az igények egy n elemű véges forrásból érkeznek, ahol a forrásban eltöltött idő minden igény esetén egymástól független λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó. A kiszolgálási idők szintén exponenciális eloszlásúak μ paraméterrel és függetlenek az előbbi valószínűségi változóktól. Jelölje $X(t)$ a t időpillanatban a kiszolgáló egységnél tartózkodó igények számát. Az előbbiekhez hasonlóan nem nehéz belátni, hogy $X(t)$ is egy születési-kihalási folyamat

$$\lambda_k = \begin{cases} (n-k)\lambda & \text{, ha } 0 \le k \le n, \\ 0 & \text{, ha } k > n, \end{cases}$$

születési intenzitásokkal, és

$$\mu_k = \mu, \qquad k \ge 1$$

kihalási intenzitással. Így

$$p_k = \frac{n!}{(n-k)!}\varrho^k p_0 = (n-k+1)\varrho p_{k-1},$$

ahol

$$\varrho = \frac{\lambda}{\mu},$$

és

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\varrho^k} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\varrho^k}.$$

Az ergodikus eloszlás mindig létezik, de ha $\varrho > 1$ akkor az igények torlódnak és több kiszolgálóegységre lenne szükség.

Az előbbi valószínűségekre egy másik kifejezést is megadunk, amely numerikus számításoknál könnyebben alkalmazható. Legyen $P(k;\lambda)$ a λ paraméterű Poisson-eloszlás és $Q(k;\lambda)$ ennek kummulatív eloszlása, azaz

$$P(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad 0 \le k < \infty;$$

$$Q(k;\lambda) = \sum_{i=0}^{k} P(i;\lambda), \qquad 0 \le k < \infty.$$

Megmutatjuk, hogy

$$p_k = \frac{P(n-k;R)}{Q(n;R)}, \qquad 0 \le k \le n,$$

ahol

$$R = \frac{\mu}{\lambda} = \varrho^{-1}.$$

Ugyanis

$$\frac{P(n-k;R)}{Q(n;R)} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-k}e^{-\frac{\mu}{\lambda}}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{i}e^{-\frac{\mu}{\lambda}}} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}}{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-i}} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i}}.$$

Az $M/M/1//n$ rendszer jellemzői:

(I.) A *szerver kihasználtsága* és a *rendszer átbocsátóképessége*:
A szerver kihasználtsága:

$$U_s = 1 - p_0.$$

A korábbi rekurzív összefüggést felhasználva

$$U_s = \frac{Q(n-1;R)}{Q(n;R)}.$$

A rendszer átbocsátóképessége:

$$\lambda_t = \mu U_s.$$

(II.) A rendszerben tartózkodó *igények átlagos száma*:

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{n} kp_k = n - \sum_{k=0}^{n}(n-k)p_k =$$

$$n - \frac{1}{\varrho}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\varrho p_k = n - \frac{1}{\varrho}\sum_{k=0}^{n-1}p_{k+1} =$$

$$n - \frac{1}{\varrho}(1-p_0) = n - \frac{U_s}{\varrho}.$$

Másképpen:

$$\overline{N} = n - \frac{RQ(n-1;R)}{Q(n;R)} = n - \frac{U_s}{\varrho}.$$

(III.) Az *átlagos sorhossz*:

$$\overline{Q} = \sum_{k=1}^{n}(k-1)p_k = \sum_{k=1}^{n}kp_k - \sum_{k=1}^{n}p_k = n - \frac{\mu}{\lambda}(1-p_0) - (1-p_0) =$$

$$n - (1-p_0)(1+\frac{\mu}{\lambda}) = n - 1 + \frac{1}{\varrho}U_s.$$

(IV.) Az igénygenerálásra alkalmas *teminálok átlagos száma*:

$$\overline{m} = \sum_{k=0}^{n}(n-k)p_k = n - \overline{N} = \frac{\mu}{\lambda}(1-p_0) = \frac{U_s}{\varrho}.$$

(V.) A szerver átlagos *foglaltsági periódushossza*:
Mivel

$$U_s = 1 - p_0 = \frac{E\delta}{\frac{1}{n\lambda} + E\delta},$$

ezért

$$E\delta = \frac{1-p_0}{n\lambda p_0} = \frac{U_s}{n\lambda(1-U_s)}.$$

(VI.) A *várakozás valószínűsége*:

$$P(W>0) = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1 - p_0 = U_s.$$

Számítógépes alkalmazásoknál gyakran szükségünk van az alábbi jellemzőkre is.

(VII.) A terminálok *kihasználtsága*:
Véges forrás esetén szükségünk van arra az újabb mérőszámra is , amely a gépkiszolgálási probléma esetén is nagyon fontos. Az i indexű terminál *kihasználtságán* az

$$U^{(i)} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \chi(\text{a } T\text{-dik időpillanatban az } i\text{-dik terminál működik})dt$$

határértéket értjük, ha létezik. Ekkor

$$U^{(i)} = P(\text{ az } i\text{-dik terminál működik}) ,$$

ahol P a stacionárius valószínűséget jelöli.

Nyilvánvaló, hogy a terminálok (az igénygenerálás forrásai) akkor vannak kihasználva, ha működnek, így az összes terminál kihasználtsága:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} p_k = \sum_{k=1}^{n}(n-k)p_k = \overline{m} = \frac{\mu}{\lambda}(1-p_0).$$

Egy tetszőleges terminál kihasználtsága:

$$U_t = \frac{\mu}{n\lambda}(1-p_0) = \frac{\overline{m}}{n}.$$

Ezt az összefüggést a következőképpen is megkaphatjuk. Látható, hogy

$$U^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n} p_k = \frac{\overline{m}}{n},$$

mivel a terminálok azonos kihasználtságúak, így

$$U_t = U^{(i)} \ .$$

(VIII.) A terminálok *átlagos várakozási ideje*:
A korábban említett összefüggések alapján:

$$U_t = \frac{1/\lambda}{1/\lambda + \overline{W} + 1/\mu} = \frac{\overline{m}}{n}.$$

Ebből

$$\lambda \overline{m} = \frac{n}{1/\lambda + \overline{W} + 1/\mu},$$

és

$$\lambda \overline{m}\,\overline{W} = n - \overline{m}\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) = n - \frac{U_s}{\varrho}(1+\varrho) = \overline{Q},$$

ami az átlagos sorhosszra vonatkozó Little-formula. Így

$$\overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\lambda \overline{m}}.$$

Az *átlagos válaszolási idő*:

$$\overline{T} = \overline{W} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{n}{1-p_0} - \frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{\mu}\left(\frac{n}{U_s} - \frac{1}{\varrho}\right).$$

Egyszerű számolással könnyű bebizonyítani, hogy

$$\overline{m}\lambda \overline{T} = \overline{N},$$

ami ismét egy **Little-formula.** Ugyanis

$$\overline{m}\lambda\left(\overline{W} + \frac{1}{\mu}\right) = \overline{Q} + \overline{m}\varrho =$$

$$n - \frac{U_s}{\varrho}(1+\varrho) + U_s = n - \frac{U_s}{\varrho} = \overline{N} \ .$$

(IX.) További összefüggések:

$$U_s = 1 - p_0 = n\varrho U_t = \overline{m}\varrho,$$

melyből

$$\overline{m}\lambda = \mu U_s = \lambda_t \ .$$

Példák:

1. Tekintsünk 6 db. gépet 40 óra átlagos élettartammal, javítási idejük 4 óra átlagosan. Határozzuk meg a rendszer jellemzőit!

   Megoldás:

   $\lambda = \frac{1}{40}$ óránként, $\mu = \frac{1}{4}$ óránként, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{40} = 0.1$, $n = 6$, $P_0 = 0.484$

Hibás gépek	0	1	2	3	4	5	6
várakozó g.	0	0	1	2	3	4	5
P_n	$0,484$	0.290	0.145	0.058	0.017	0.003	0.000

$$\overline{Q} = 0.324$$

$$P(W > 0) = 0.516 = U_{sz}$$

$$\overline{W} = 2.51 \text{ óra}$$

$$\overline{T} = 2.51 + 0.25 = 6.51 \text{ óra}$$

$$U_{sz} = 0.516$$

$$\overline{e} = 40 \text{ óra}$$

$$U_g = 0.86$$

$$\overline{m} = n \times U_g = 5.16$$

$$\overline{N} = 6 - 5.16 = 0.84$$

$$M\delta = \frac{0.516}{6 \times \frac{1}{40} \times 0.484} = \frac{4 \times 5.16}{6 \times 0.484} \approx \frac{7}{10} \text{ óra}$$

2. Az előző feladatban az átlagos élettartamot változtassuk meg 2 órára. Határozzuk meg a rendszer jellemzőit.

   Megoldás:

   $\frac{1}{\lambda} = 2$, $\frac{1}{\mu} = 4$, $\frac{\lambda}{\mu} = 2$, $n = 6$, $P_0 = \frac{1}{75973}$ amiből látható, hogy egy szerelő nem elégséges.

Hibás gépek	0	1	2	3	4	5	6
várakozó g.	0	0	1	2	3	4	5
P_k	$\frac{1}{75973}$	$\frac{1}{75973}$	0.001	0.012	0.075	0.303	0.606

$$U_{sz} \approx 0.999$$
$$\overline{Q} \approx 4.5$$
$$P_{(W>0)} = 0.999$$
$$\overline{W} \approx 22.5 \text{ óra}$$
$$\overline{T} = 26.5 \text{ óra}$$
$$\overline{e} = 2 \text{ óra}$$
$$U_g \approx 0.08$$
$$\overline{m} \approx 0.5$$
$$\overline{N} \approx 5.5$$
$$M\delta \approx \infty$$

Minden adat azt mutatja, amit vártunk, mivel a karbantartási tényező 1-nél nagyobb. Arra, hogy ezek után mennyi szerelőt kell beállítani, többféle kritérium lehet.

Ezzel a következő felyezetben foglalkozunk. Mindenesetre, hogy ne legyen torlódás, a $\frac{\lambda}{r\mu} < 1$ feltételnek kell teljesülnie, ahol r a szerelők számát jelöli.

Java applet a jellemzők meghatározására.

2.2.6.2 Az $M/M/r//n$ modell

Az előző modellben adott feltevéseinket most csupán annyiban változtatjuk, hogy az n számú terminált r szerver szolgálja ki $(r < n)$. Így $k \leq r$ esetén a k állapot azt jelenti, hogy éppen k db terminál igénye van kiszolgálás alatt, egyetlen várakozó igény sincs és $r - k$ szerver tétlen. A szerverek tevékenységüket egymástól függetlenül végzik. Ekkor is egy születési-halálozási folyamatot kapunk:

$$\lambda_k = (n-k)\lambda, \qquad 0 \leq k \leq n-1,$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & , 1 \leq k \leq r, \\ r\mu & , r < k \leq n, \end{cases}$$

intenzitásokkal.
Az egyensúlyi eloszlás

$$\begin{aligned} p_k &= \binom{n}{k}\varrho^k p_0, \qquad 0 \le k \le r, \\ p_k &= \tfrac{k!}{r!r^{k-r}}\binom{n}{k}\varrho^k p_0, \qquad r < k \le n. \end{aligned}$$

Természetesen teljesülnie kell a

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$$

összefüggésnek. p_0 meghatározására ez a képlet túlságosan bonyolult, így egy egyszerűbb rekurzív formulát használunk.
Jelöljük a_k-val a következő hányadost:

$$a_k = \frac{p_k}{p_0}.$$

Ekkor a következő összefüggés alapján számolhatunk

$$a_0 = 1,$$

$$a_k = \frac{n-k+1}{k}\varrho a_{k-1}, \qquad 0 \le k \le r-1,$$

$$a_k = \frac{n-k+1}{r}\varrho a_{k-1}, \qquad r \le k \le n.$$

Mivel a

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$$

összefüggésnek teljesülnie kell, ezért

$$p_0 = 1 - \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

Mindkét oldalt p_0-al elosztva:

$$1 = \frac{1}{p_0} - \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{p_0} = \frac{1}{p_0} - \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

így

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k}.$$

Majd

$$p_k = a_k p_0.$$

Az $M/M/r/n$ rendszer jellemzői:

(I.) A rendszerben tartózkodó *igények átlagos száma*:

$$\overline{N} = \sum_{k=0}^{n} k p_k.$$

(II.) A várakozási sor *átlagos hossza*:

$$\overline{Q} = \sum_{k=r+1}^{n} (k-r) p_k = \frac{r^r p_o}{r!} \sum_{k=r+1}^{n} \frac{(k-r)k!}{r^k} \binom{n}{k} \varrho^k.$$

(III.) Az igénygenerálásra alkalmas *terminálok átlagos száma*:

$$\overline{m} = n - \overline{N}.$$

(IV.) A *rendszer összkihasználtsága*:

$$U_n = 1 - p_0.$$

így egy kiszolgálóegység kihasználtsága $U_s = U_n / r$.

(V.) A rendszer *átlagos foglaltsági periódushossza*:

$$E\delta^{(n)} = \frac{1-p_0}{n\lambda p_0} = \frac{U_n}{n\lambda p_0}.$$

(VI.) A *várakozás valószínűsége*:

$$P(W > 0) = \sum_{k=r}^{n} p_k.$$

(VII.) A *foglalt kiszolgálóegységek átlagos száma*:

$$\overline{r} = \sum_{k=1}^{r} k p_k + \sum_{k=r+1}^{n} r p_k = \sum_{k=1}^{r-1} k p_k + r \sum_{k=r}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{r-1} k p_k + r P(W > 0).$$

Továbbá

$$U_s = \frac{\sum_{k=1}^{r} k p_k + r \sum_{k=r+1}^{n} p_k}{r} = \frac{\overline{r}}{r}.$$

(VIII.) A *tétlen kiszolgálóegységek átlagos száma*:

$$\overline{S} = r - \overline{r}.$$

További összefüggés:

$$\overline{N} = \sum_{k=1}^{r} kp_k + \sum_{k=r+1}^{n} (k-r)p_k + r \sum_{k=r+1}^{n} p_k = \overline{Q} + \overline{r} = \overline{Q} + r - \overline{S} = n - \overline{m}.$$

(IX.) A *terminálok kihasználtsága*:

$$U_t = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n} p_k = \frac{\overline{m}}{n}.$$

(X.) A terminálok *átlagos várakozási ideje*:
Mint az előzőekben is láttuk

$$U_t = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \overline{W} + \frac{1}{\mu}} = \frac{\overline{m}}{n},$$

amiből

$$\overline{W} = \frac{\overline{N}}{\overline{m}} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\overline{N}}{\overline{m}\varrho} - 1 \right).$$

Az átlagos válaszolási idő:

$$\overline{T} = \overline{W} + \frac{1}{\mu} = \frac{\overline{N}}{\overline{m}\lambda},$$

innen

$$\overline{m}\lambda\overline{T} = \overline{N},$$

ami a jól ismert **Little-formula,** azaz az átlagos beérkezési intenzitás és a rendszerben töltött átlagos idő szorzata a rendszerben tartózkodó igények átlagos számával egyenlő. Ebből

$$\overline{m}\lambda \left(\overline{W} + \frac{1}{\mu} \right) = \overline{Q} + \overline{r},$$

vagyis

$$\overline{m}\lambda\overline{W} + \overline{m}\varrho = \overline{Q} + \overline{r}.$$

Mutassuk meg, hogy

$$\overline{r} = \overline{m}\varrho,$$

mert ebből

$$\overline{m}\lambda\overline{W} = \overline{Q}$$

következik, ami szintén egy **Little-formula.**

Tudjuk, hogy

$$p_{k+1} = \frac{(n-k)\lambda}{\mu_{k+1}} p_k,$$

ahol

$$\mu_j = \begin{cases} j\mu & , j \leq r, \\ r\mu & , j > r. \end{cases}$$

Jól ismert továbbá, hogy

$$\overline{r} = \sum_{k=1}^{r-1} k p_k + r \sum_{k=r}^{n} p_k.$$

Ekkor

$$\varrho\overline{m} = \sum_{k=0}^{n} \varrho(n-k)p_k = \sum_{k=0}^{r-1} \varrho(n-k)p_k + \sum_{k=r}^{n-1} \varrho(n-k)p_k =$$

$$\sum_{k=0}^{r-1} \frac{\lambda(n-k)(k+1)}{(k+1)\mu} p_k + r \sum_{k=r}^{n-1} \frac{\lambda(n-k)}{r\mu} p_k =$$

$$\sum_{k=0}^{r-1}(k+1)p_{k+1} + r \sum_{k=r}^{n-1} p_{k+1} = \sum_{j=1}^{r} j p_j + r \sum_{j=r+1}^{n} p_j = \sum_{j=1}^{r-1} j p_j + r \sum_{j=r}^{n} p_j = \overline{r}.$$

Vagyis

$$\varrho\overline{m} = \overline{r},$$

más alakban

$$\lambda\overline{m} = \mu\overline{r},$$

azaz

az átlagos beérkezési intenzitás = az átlagos kiáramlási intenzitással,

ami várható volt, mivel a rendszer egyensúlyi állapotban van. Ezért

$$\overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\overline{m}\lambda} = \frac{\overline{Q}}{\overline{r}\lambda\varrho} = \frac{\overline{Q}}{\mu\overline{r}}.$$

(XI.) A kiszolgálók átlagos *tétlenségi periódushossza*:
Ha a tétlen kiszolgálók olyan sorrendben kezdik kiszolgálni az igényeket, mint amilyen sorrendben előzőleg befejezték a foglaltsági periódusokat, akkor egy szerver tevékenységét a következőképpen írhatjuk le. Ha egy tétlenné vált szerver $j-1$ másik tétlen szervert talál a munkabefejeződés pillanatában, akkor csak a j-dik igény kiszolgálásával kezdődik ismét a foglaltsági periódusa.

Jelölje $\overline{e}$ a szerver átlagos üresjárati periódusa hosszát, e_j pedig a fenti állapotban az átlagos tétlenségi időt. Nyilvánvalóan

$$\overline{e}_j = \frac{j}{\lambda},$$

$\overline{e}$ pedig a teljes várható érték tétele alapján

$$\overline{e} = \sum_{j=1}^{r} \frac{p_{r-j}}{P(e)} \frac{j}{\lambda} = \frac{\overline{S}}{P(e)\lambda},$$

ahol

$$P(e) = \sum_{j=0}^{r-1} p_j = 1 - P(W > 0),$$

azaz annak valószínűsége, hogy van tétlen szerver.

(XII.) A szerverek *átlagos foglaltsági periódushossza*:
Mivel

$$U_s = \frac{E\delta}{\overline{e} + E\delta},$$

így

$$E\delta = \frac{U_s}{1-U_s}\overline{e} = \frac{\frac{\overline{r}}{r}}{1-\frac{\overline{r}}{r}}\overline{e} = \frac{\frac{\overline{r}}{r}}{\frac{r-\overline{r}}{r}} \frac{\overline{S}}{P(e)\lambda} = \frac{\overline{r}}{\overline{S}} \frac{\overline{S}}{P(e)\lambda} = \frac{\overline{r}}{P(e)\lambda} = \frac{\overline{m}}{\mu P(e)}.$$

Vagyis

$$E\delta = \frac{\overline{m}}{\mu P(e)}.$$

Példák:

Egy üzemben 20 db gép üzemel, egyenként 50 óra átlagos élettartammal. A gép javításának várható értéke 5 óra. A szereléseket 3 fős szerelőgárda végzi. Adjuk meg a rendszer jellemzőit, és hasonlítsuk össze őket a előző példában szereplő jellemzőkkel.

Megoldás:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} = 0.1$$

A rekurzív összefüggéseket használva, $a_0 = 1$-ről indítva a rekurziót, könnyen meghatározhatjuk az a_k értékeket, pl

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{20-0}{0+1} \times 0.1 \times 1 = 2$$

$$a_2 = \frac{20-1}{1+1} \times 0.1 \times 2 = 1.9$$

$$a_3 = \frac{20-2}{2+1} \times 0.1 \times 1.9 = 1.14$$

$$a_4 = \frac{20-3}{3} \times 0.1 \times 1.14 = 0.646$$

$$\vdots$$

és így tovább.
Tudjuk, hogy

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{n} a_k} = \frac{1}{1+6.3394} = 0.13625.$$

Innen

$$P_1 = a_1 \times P_0 = 2 \times 0.13625 = 0.2775$$

$$P_2 = a_2 \times P_0 = 1.9 \times 0.13625 = 0.2588 \text{ stb.}$$

A következő táblázat megadja a különböző állapotok valószínűségét.
$n = 20$, $r = 3$, $\rho = 0.1$

K	Javítás alatt álló gépek száma	Javításra várakozó gépek száma (Q)	Tétlen karbantartók száma (S)	Stac. eloszlás (P_k)
0	0	0	3	0.13625
1	1	0	2	0.27250
2	2	0	1	0.25888
3	3	0	0	0.15533
4	3	1	0	0.08802
5	3	2	0	0.04694
6	3	3	0	0.02347
7	3	4	0	0.01095
8	3	5	0	0.00475
9	3	6	0	0.00190
10	3	7	0	0.00070
11	3	8	0	0.00023
12	3	9	0	0.00007

$$\overline{Q} = 0.339$$

$$\overline{S} = 1.213$$

$$\overline{N} = \overline{Q} + r - \overline{S} = 2.126$$

$$P(W > 0) = 0.3323$$

$$P(e) = 0.6677$$

$$\overline{W} = \frac{\overline{Q}}{\lambda(n - \overline{N})} = 0.918 \text{ óra, kb. } 59 \text{ perc}$$

$$\overline{m} = 20 - 2.126 = 17.874$$

$$U^{(n)} = 0.844$$

$$M\delta^{(n)} = \frac{U^{(n)}}{n\lambda P_0} = \frac{5}{2} \times \frac{0.844}{0.136} \approx 15.5 \text{ óra}$$

$$\overline{r} = 1.787$$

$$\overline{s} = 1.213$$

$$U = \frac{\overline{r}}{r} = \frac{1.787}{3} = 0.595$$

$$\overline{e} = \frac{\overline{s}}{P(e)\lambda} = \frac{1.213}{0.667 \times \frac{1}{50}} = \frac{50 \times 1.213}{0.667} \approx 90.8 \text{ óra}$$

$$M\delta = \frac{\overline{r}}{P(e)\lambda} = \frac{1.787}{0.667 \times \frac{1}{50}} = \frac{50 \times 1.787}{0.667} \approx 132.1 \text{ óra}$$

$$\mu_g = \frac{\overline{m}}{n} = \frac{17.874}{20} \approx 0.893$$

$$\overline{T} = \overline{W} + \frac{1}{\mu} = 0.981 + 5 = 5.981 \text{ óra}$$

$$K_1 = \frac{\text{várakozó gépek átlagos száma}}{\text{összes gépek száma}} = \frac{\overline{Q}}{n} = \frac{0.339}{20} = 0.0169$$

$$K_2 = \frac{\text{tétlen kezelők száma}}{\text{összes kezelők száma}} = \frac{\overline{S}}{r} = \frac{1.213}{3} = 0.404$$

Összehasonlítva a megfelelő példában szereplő jellemzőkkel, láthatjuk, hogy az egy javítóra jutó gépek majdnem egyforma száma mellett (6 ill. $6\frac{2}{3}$) a helyzet sokkal jobb 20 gép és 3 szerelő esetében, ugyanis a hatékonysági vizsgálatok az alábbi adatokat szolgáltatták:

gépek száma	6	20
szerelők száma	1	3
Az egy szerelőre jutó gépek száma	6	$6\frac{2}{3}$
A szerelőkre vonatkozó várakozási együttható K_2	0.4845	0.4042
A gépekre vonatkozó várakozási együttható K_1	0.0549	0.01694

Az előző problémában $\rho = 0.1$, $n = 20$ volt. Tételezzük fel, hogy az időegység az óra, hogy a gépállás óránkénti költsége $18\,000$ Ft, míg a szerelők óránkénti költsége 600 Ft. Mi lesz ebben ez esetben a szerelők optimális száma?

Megoldás:

Látható, hogy az óránkénti átlagos költség r függvénye.

A következő táblázat megadja a stacionárius eloszlást $r = 3, 4, 5, 6, 7$ esetén (tapasztalatból tudjuk, hogy az r számra $3 \leq r \leq 7$).

r	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
3	0.136	0.272	0.258	0.155	0.088	0.047	0.023	0.011	0.005
4	0.146	0.292	0.278	0.166	0.071	0.028	0.010	0.003	0.001
5	0.148	0.296	0.281	0.168	0.071	0.022	0.006	0.001	0.000
6	0.148	0.297	0.282	0.169	0.072	0.023	0.006	0.001	$\cdots$
7	0.148	0.297	0.282	0.169	0.072	0.023	0.006	$\cdots$	$\cdots$

A következő táblázat az időegységre jutó költségeket adja meg:

r	$\overline{Q}$	$\overline{S}$	$M(K)$ Ft
3	0.32	1.20	6480
4	0.06	2.18	2388
5	0.01	3.17	2082
6	elhanya-	4.17	2502
7	-golható	5.16	3096

Látható, hogy az optimális szerelőszám ilyen költségtényezők mellett $r = 5$.
Ez a példa is mutatja, hogy rendszerek összehasonlítása többféleképpen értelmezhető.
Az említett példák jól szemléltetik ezen problémakört.

Java applet a jellemzők meghatározására.

További rendszerekhez tartozó Java appletek találhatók még következő címen:

`http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/09/index.html`

2.3 Irodalom

Gross D.– Harris C. M.
Fundamentals of Queueing Theory
JOHN WILEY AND SONS, INC., NEW YORK, 1985.

Kleinrock L.
Sorbanállás-Kiszolgálás. Bevezetés a tömegkiszolgálási rendszerek elméletébe
MŰSZAKI KÖNYVKIADÓ, BUDAPEST, 1979.

Kobayashi H.
Modeling and Analysis. An Introduction to System Performance Evaluation Methodology
ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY, LONDON, 1978.

Ross S. M.
Applied Probability Models with Optimization Applications
HOLDEN-DAY, SAN FRANCISCO, 1970.

Sztrik J.
Az operációkutatás elemei
KOSSUTH EGYETEMI KIADÓ, DEBRECEN, 1992, 1998

Sztrik J.
Bevezetés a sorbanállási elméletbe és alkalmazásaiba
KOSSUTH EGYETEMI KIADÓ, DEBRECEN, 1997, 2000
`http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/index.html`

Sztrik J.
Kulcs a sorbanállási elmélethez és alkalmazásaihoz
KOSSUTH EGYETEMI KIADÓ, DEBRECEN, 2000
`http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/index.html`

Sztrik J.
Gyakorlati sorbanállási elmélet
`http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/index.html`

Takács L.
Introduction to the Theory of Queues
NEW YORK, OXFORD UNIVERSITY PRESS, 1962

Tomkó, J.
A Markov-folyamatok elemei és néhány operációkutatási vonatkozása
A BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT KIADVÁNYA, BUDAPEST, 1968.

Függelék

$\frac{M}{rT}$ értékei az 1.3.3.1 modell használatához

n	$\varepsilon = 0,01$	$\varepsilon = 0,05$	$\varepsilon = 0,025$	$\varepsilon = 0,01$	$\varepsilon = 0,005$
1	$0,90000$	$0,95000$	$0,97500$	$0,99000$	$0,99500$
2	$0,68377$	$0,77639$	$0,84189$	$0,90000$	$0,92929$
3	$0,56481$	$0,63604$	$0,70760$	$0,78456$	$0,82900$
4	$0,49265$	$0,56522$	$0,62394$	$0,68887$	$0,73424$
5	$0,44698$	$0,50945$	$0,56328$	$0,62718$	$0,66853$
6	$0,41037$	$0,46799$	$0,51926$	$0,57741$	$0,61661$
7	$0,38148$	$0,43607$	$0,48342$	$0,53844$	$0,57581$
8	$0,35831$	$0,40962$	$0,45427$	$0,50654$	$0,54179$
9	$0,33910$	$0,38746$	$0,43001$	$0,37960$	$0,51332$
10	$0,32260$	$0,36866$	$0,40927$	$0,45662$	$0,48893$
11	$0,30829$	$0,35242$	$0,39122$	$0,43670$	$0,46770$
12	$0,29577$	$0,33815$	$0,37543$	$0,41918$	$0,44905$
13	$0,28470$	$0,32549$	$0,36143$	$0,40362$	$0,43247$
14	$0,27481$	$0,31417$	$0,34890$	$0,38970$	$0,41762$
15	$0,26588$	$0,30397$	$0,33760$	$0,37713$	$0,40420$
16	$0,25778$	$0,29472$	$0,32733$	$0,36571$	$0,39201$
17	$0,25039$	$0,28627$	$0,31796$	$0,35528$	$0,38086$
18	$0,24360$	$0,27851$	$0,30143$	$0,34569$	$0,37062$
19	$0,23735$	$0,27136$	$0,30143$	$0,33685$	$0,36117$
20	$0,23156$	$0,26473$	$0,29408$	$0,32866$	$0,35241$