



Nevezetes formulák a sorbanállási elméletben és alkalmazásaiban

MAFIOK 2011, Szolnok
2011. augusztus 29-31

Sztrik János

Debreceni Egyetem, Informatikai Kar

sztrik.janos@inf.unideb.hu

<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik>

Tartalom

- A sorbanállási elmélet kialakulása
- Sorbanállási rendszerek osztályozása
- Alkalmazások
- Megoldási módszerek
- Nevezetes formulák és törvények
- Magyar kutatók
- Irodalomjegyzék

A sorbanállási elmélet kialakulása



Agner Krarup Erlang, 1878-1929

- 
- "The Theory of Probabilities and Telephone Conversations", Nyt Tidsskrift for Matematik B, vol 20, 1909.
 - "Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges", Elektroteknikeren, vol 13, 1917.
 - "The life and works of A.K. Erlang", E. Brockmeyer, H.L. Halstrom and Arns Jensen, Copenhagen: The Copenhagen Telephone Company, 1948.

Queueing Theory Homepage

<http://web2.uwindsor.ca/math/hlynka/queue.html>

Murphy-törvények a sorbanállásra

- Ha sort változtatsz, akkor az a sor amit elhagytál egyből gyorsabban halad.
- A te sorod halad a leglassabban.
- Ha hosszú sorban várakozol, a mögötted állókat új, rövidebb sorba terelik át.
- Ha kilépsz egy pillanatra a rövid sorból, azonnal meghosszabbodik.

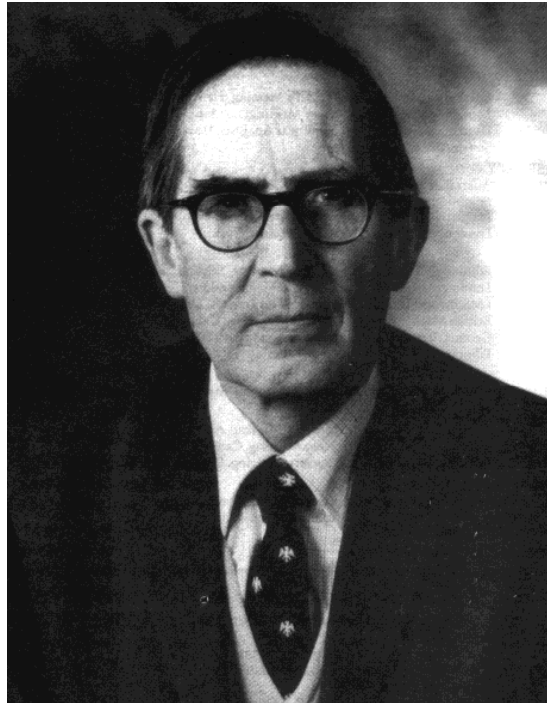
Google-találatok a “Queueing Theory “: 188 000

Alkalmazások



- Telefonközpontok tervezése
- Gyártás-tervezés
- Raktározási problémák
- Bevásárlóközpontok tervezése
- Info-kommunikációs rendszerek modellezése
- Call Centerek vizsgálata
- Forgalom-szabályozás
- Operációkutatási problémák
- Megbízhatóság-elméleti problémák
- Egyebek

Kendall-féle jelölésrendszer



David G. Kendall, 1918-2007

A/B/c/K/m/Z

Hatékonysági mutatók

- Kihasználtságok
- A rendszerben/sorban tartózkodó igények átlagos száma
- Átlagos válaszolási / várakozási idők
- A kiszolgáló egység átlagos foglaltsági periódushossza
- A válaszolási/várakozási idők eloszlása
- A foglaltsági periódushossz eloszlása

Megoldási módszerek

- Analitikus
- Numerikus
- Aszimptotikus
- Szimuláció
- Modellezési szoftverek

Erlang-féle veszteség-formulák, M/G/c/c rendszerek

$$B(c, \rho) = p_c = \frac{\rho^c / c!}{\sum_{n=0}^c \rho^n / n!} \quad \rho = \lambda E(B)$$

$$B(c, \rho) = \frac{\rho B(c-1, \rho) / c}{1 + \rho B(c-1, \rho) / c} = \frac{\rho B(c-1, \rho)}{c + \rho B(c-1, \rho)}$$

$$B(0, \rho) = 1$$

Közelítő formula

$$B(n, \rho) \approx \frac{\Phi(s) - \Phi(s - 1)}{\Phi(s)} = 1 - \frac{\Phi(s - 1)}{\Phi(s)},$$

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^s \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad s = \frac{n + \frac{1}{2} - \rho}{\sqrt{\rho}}.$$

<http://www.erlang.com/calculator/>

<http://jani.uw.hu/erlang/erlang.html>

Erlang-féle várakozásos-formulák

M/M/n rendszerek

$$C(n, \rho) = \frac{nB(n, \rho)}{n - \rho + \rho B(n, \rho)},$$

$$C(n, \rho) = \frac{\rho(n - 1 - \rho) \cdot C(n - 1, \rho)}{(n - 1)(n - \rho) - \rho C(n - 1, \rho)}, \quad C(1, \rho) = \rho$$

Közelítő formula (négyzetgyök-szabály)

$$C(n_{\alpha}^*, \rho) < \alpha, \quad n_{\alpha}^* = \rho + k_{\alpha} \sqrt{\rho}$$

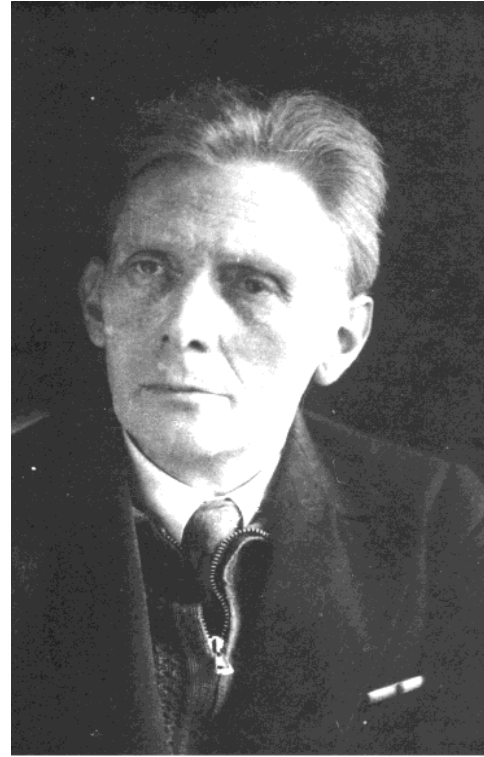
$$k_{\alpha} \frac{\phi(k_{\alpha})}{\varphi(k_{\alpha})} = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$$

$$\alpha = 0.8, 0.5, 0.2, 0.1, \quad k_{\alpha} = 0.1728, 0.5061, 1.062, 1.420$$

Pollaczek-Hincsin - formulák, M/G/1 rendszerek



Felix Pollaczek, 1892-1981



Alexander Y. Khintchine, 1894-1959

Várható érték-formulák

$$C_X^2 := \frac{\text{Var}[X]}{(E[X])^2}$$

$$E[W] = E[R] \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{E[B]}{2} \frac{\rho}{1 - \rho} (1 + C_B^2)$$

$$E[T] = E[B] \left(1 + \frac{\rho(1 + C_B^2)}{2(1 - \rho)} \right)$$

Transzformációs-képletek

$$G_N(z) = L_B(\lambda(1 - z)) \cdot \frac{(1 - \rho)(1 - z)}{L_B(\lambda(1 - z)) - z}$$

$$L_T(s) = L_B(s) \frac{s(1 - \rho)}{s - \lambda + \lambda L_B(s)}$$

Little-formula

$$\mathbb{E}(N) = \bar{\lambda} \mathbb{E}(T)$$

$$\mathbb{E}(Q) = \bar{\lambda} \mathbb{E}(W)$$

$$\mathbb{E}(N(N-1) \dots (N(-k+1))) = \lambda^k \mathbb{E}(T^k)$$

Híres kutatók, oktatók

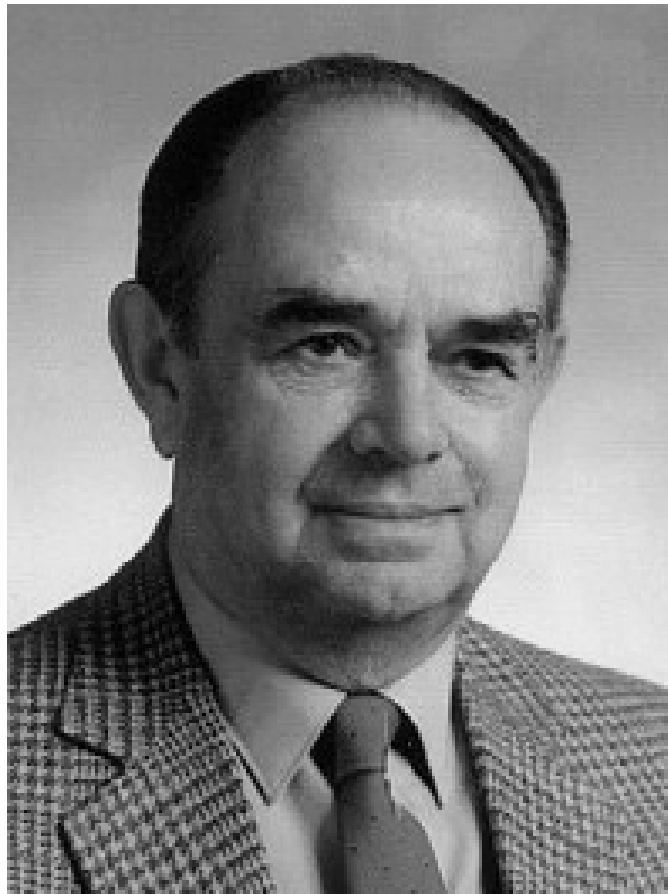


Boris Vladimirovich Gnedenko, 1912-1995



Leonard Kleinrock, 1934 -

Magyar kutatók



Takács Lajos, 1924 -

Takács- formulák, M/G/1 rendszerek

$$\mathbb{E}(W^k) = \frac{\lambda}{1 - \rho} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \frac{\mathbb{E}(S^{i+1})}{i+1} \mathbb{E}(W^{k-i})$$

$$\mathbb{E}(T^k) = \sum_{l=0}^k \binom{n}{l} \mathbb{E}(W^l) \cdot \mathbb{E}(S^{k-l})$$

$$L_{\delta}(t) = L_S(t + \lambda - \lambda L_{\delta}(t))$$

Magyar kutatók

- Eötvös Loránd Tudományegyetem
(Benczúr A., Lakatos L. , Szeidl L.)
- Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
(Györfi L., Telek M., Molnár S., Bíró J., Do V. T.)
- Debreceni Egyetem
(Tomkó J., Arató M., Almási B., Kuki A., Sztrik J.)

Legtöbbet idézett cikkem, 25 hivatkozás

On the finite-source $\vec{G}/M/r$ Queue

European Journal of Operational Research 20 (1985) 261-268

Egyensúlyi eloszlás

$$Q_{i_1, \dots, i_k} = (n - k)! (r! r^{n-r-k} \mu^{n-k} \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k})^{-1} c_n,$$

$$(i_1, \dots, i_k) \in C_k^n, \quad k = 0, 1, \dots, n - r.$$

$$Q_{i_1, \dots, i_k} = (\mu^{n-k} \lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k})^{-1} c_n,$$

$$(i_1, \dots, i_k) \in C_k^n, \quad k = n - r, \dots, n.$$



$$\hat{Q}_k = \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in C_k^n} Q_{i_1, \dots, i_k},$$

$$\hat{Q}_k = \frac{n!}{r!k!r^{n-k-r}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n-k} \hat{Q}_n, \quad \text{ha } 0 \leq k \leq n-r,$$

$$\hat{Q}_k = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{n-k} \hat{Q}_n, \quad \text{ha } n-r \leq k \leq n.$$



$$\hat{P}_k = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \hat{P}_0, \quad \text{ha } 0 \leq k \leq r,$$

$$\hat{P}_k = \frac{n!}{r!(n-k)!r^{k-r}} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k \hat{P}_0, \quad \text{ha } r \leq k \leq n.$$

Hatékonysági mutatók

Kihasználtságok

$$Q^{(i)} = \sum_{k=1}^n \sum_{i \in (i_1, \dots, i_k) \in C_k^n} Q_{i_1, \dots, i_k}. \quad U^{(i)} = Q^{(i)}$$

$$U_{CPU} = \frac{1}{r} \left(\sum_{k=1}^r k \hat{P}_k + r \sum_{k=r+1}^n \hat{P}_k \right) = \frac{\bar{r}}{r},$$

Várható értékek

$$\bar{W}_i = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{1 - Q^{(i)}}{Q^{(i)}} - \frac{1}{\mu}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\bar{T}_i = \bar{W}_i + 1/\mu = \left(1 - Q^{(i)}\right) \left(\lambda_i Q^{(i)}\right)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{T}_i Q^{(i)} = \bar{N}.$$

Java Appletek és információk

- <http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/education/09/index.html>

<http://irh.inf.unideb.hu/user/jsztrik/>

Irodalomjegyzék

-  COOPER, R.B. *Introduction to Queueing Theory, Third Edition*, Ceep Press, 1990
-  GNEDENKO, B.V. – KOVALENKO I.N. *Introduction to Queueing Theory, Second Edition*, Birkhauser, 1989
-  GROSS, D. – HARRIS, C.M. *Fundamentals of Queueing Theory, Second Edition*, John Wiley and Sons, 1985
-  KHINTCHINE, A.Y. *Mathematical Methods in the Theory of Queueing, Second Edition*, Hafner Publication Company, 1969
-  KLEINROCK, L. *Queueing Systems, Vol. I-II*, John Wiley Sons, 1976
-  TAKÁCS, L. *Introduction to the Theory of Queues*, Oxford University Press, 1962

*Köszönöm
a
figyelmet*