НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ
им. В.А. ТРАПЕЗНИКОВА РАН

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ (ИТММ-2019)

МАТЕРИАЛЫ
XVIII Международной конференции
имени А. Ф. Терпугова
26–30 июня 2019 г.

Часть 2

ТОМСК
«Издательство НТЛ»
2019

УДК 519
ББК 22.17
И74

И74 Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019): Материалы XVIII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова (26–30 июня 2019 г.). – Томск: Изд-во НТЛ, 2019. – Часть 2. – 376 с.

ISBN 978-5-89503-629-7

Сборник содержит избранные материалы XVIII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова по следующим направлениям: теория массового обслуживания и телетрафика, графы и их применение в задачах анализа дискретных автоматов, прикладной вероятностный анализ.

Для специалистов в области информационных технологий и математического моделирования.

УДК 519
ББК 22.17

ISBN 978-5-89503-629-7

Исследование замкнутой RQ-системы M/GI/1//N с вызываемыми заявками

А.А. Назаров[*1], А.С. Квач[**1], Я. Штрик[2]

[1]Национальный исследовательский
Томский государственный университет, г. Томск, Россия
[2] Дебреценский университет, г. Дебрецен, Венгрия

В настоящее время среди широкого класса RQ-систем [1, 2] системы с вызываемыми заявками представляют особый практический интерес. Один из типичных примеров такой системы – это call-центры, где оператор в свободное от обслуживания поступающих звонков время может сам производить исходящий звонок абонентам для предоставления актуальной информации, предложения товаров, акций. Первые результаты по RQ-системам с вызываемыми заявками были получены Фалиным [3], другие результаты по исследованию данных систем можно найти в работах [4–6].

В отличие от классической системы с вызываемыми заявками в данной модели учитывается тот факт, что при увеличении числа заявок в системе интенсивность генерирования новой заявки уменьшается. В такой ситуации используются модели с конечным числом источников [7–10].

Стоит отметить, что в данной системе заявки вызываются либо из источника, либо с орбиты. Ранее такая система была представлена в работе [11] для случая экспоненциального обслуживания поступающих и вызываемых заявок. Также для замкнутой RQ-системы M/M/1//N с вызываемыми заявками в работе [12] авторами было выполнено исследование времени пребывания заявки на орбите.

Постановка задачи

Рассматривается немарковская замкнутая RQ-система с вызываемыми заявками (рис. 1). Источник, отправивший заявку на обслуживание, не генерирует новую до тех пор, пока заявка не завершит свое обслу-

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00277).

** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-41-703002.

живание. Каждый из N источников генерирует заявку и отправляет ее на прибор с интенсивностью λ/N. Заявка, заставшая прибор свободным, занимает его для обслуживания. Время обслуживания каждой заявки является случайной величиной с произвольной функцией распределения $B_1(x)$ с первым и вторым начальными моментами b_1 и $b_1^{(2)}$ соответственно. Если прибор занят, то заявка переходит на орбиту и после случайной задержки, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ/N, она вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата.

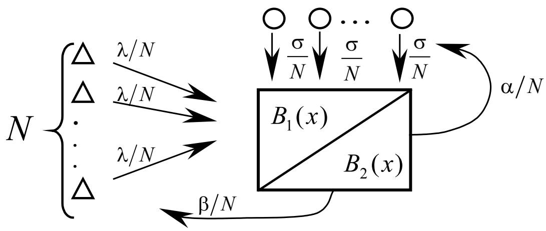

Рис 1. Замкнутая RQ-система M/GI/1//N
с вызываемыми заявками

В данной модели предполагается, что прибор в свободном состоянии может осуществлять вызов заявок с орбиты с интенсивностью α/N или из источника с интенсивностью β/N. Обслуживание вызванных прибором заявок имеет произвольную функцию распределения $B_2(x)$ с соответствующими первым и вторым начальными моментами b_2 и $b_2^{(2)}$.

Пусть $n(t)$ – число заявок на орбите в момент времени t, а процесс $k(t)$ определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t)=\begin{cases}0, & \text{прибор свободен,}\\ 1, & \text{прибор занят поступившей заявкой,}\\ 2, & \text{прибор занят вызванной заявкой.}\end{cases}$$

Для рассматриваемой системы процесс $\{k(t),n(t)\}$ не является марковским. Для его марковизации воспользуемся методом дополнительной переменной, а именно методом остаточного времени обслуживания.

Введем случайный процесс $z(t)$, имеющий смысл длины интервала от момента t до момента окончания обслуживания заявки. Таким образом, исследуется марковский процесс $\{k(t), n(t), z(t)\}$, если $k(t) = 1, 2$ и $\{k(t), n(t)\}$ при $k(t) = 0$.

Обозначим следующие вероятности

$$P_0(n,t) = P\{k(t) = 0, n(t) = n\},$$

$$P_k(n,z,t) = P\{k(t) = k, z(t) < z, n(t) = n\}, \quad k = 1,2.$$

Для предложенной модели ставится задача исследования распределения вероятностей числа заявок на орбите методом асимптотического анализа в предельном условии растущего числа источников.

Метод асимптотического анализа

Для стационарного распределения вероятностей $P_0(n)$, $P_1(n,z)$, $P_2(n,z)$ состояний системы составим систему уравнений Колмогорова вида

$$\frac{\partial P_1(n,0)}{\partial z} + \frac{\partial P_2(n,0)}{\partial z} - \left[\lambda \frac{N-n}{N} + \beta \frac{N-n}{N} + \sigma \frac{n}{N} + \alpha \frac{n}{N}\right] P_0(n) = 0,$$

$$\frac{\partial P_1(n,z)}{\partial z} - \frac{\partial P_1(n,0)}{\partial z} - \lambda \frac{N-n-1}{N} P_1(n,z) +$$

$$+\lambda \frac{N-n}{N}\left[P_1(n-1,z) + B_1(z) P_0(n)\right] + \sigma \frac{n+1}{N} B_1(z) P_0(n+1) = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial P_2(n,z)}{\partial z} - \frac{\partial P_2(n,0)}{\partial z} - \lambda \frac{N-n-1}{N} P_2(n,z) + \lambda \frac{N-n}{N} P_2(n-1,z) +$$

$$+\beta \frac{N-n}{N} B_2(z) P_0(n) + \alpha \frac{n+1}{N} B_2(z) P_0(n+1) = 0.$$

Введем частичные характеристические функции

$$H_0(u) = \sum_{n=0}^{N} e^{iun} P_0(n), \quad H_k(u,z) = \sum_{n=1}^{N} e^{iun} P_k(n,z), \quad k = 1,2,$$

тогда систему (1) перепишем в виде

$$\frac{\partial H_1(u,0)}{\partial z}+\frac{\partial H_2(u,0)}{\partial z}-[\lambda+\beta]H_0(u)+\frac{i}{N}[\alpha+\sigma-\lambda-\beta]\frac{\partial H_0(u)}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial H_1(u,z)}{\partial z}-\frac{\partial H_1(u,0)}{\partial z}+\lambda B_1(z)H_0(u)+\lambda\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(e^{iu}-1\right)H_1(u,z)+$$

$$+\frac{i}{N}B_1(z)\left(\lambda-\sigma e^{-iu}\right)\frac{\partial H_0(u)}{\partial u}+\frac{i}{N}\lambda\left(e^{iu}-1\right)\frac{\partial H_1(u,z)}{\partial u}=0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial H_2(u,z)}{\partial z}-\frac{\partial H_2(u,0)}{\partial z}+\beta B_2(z)H_0(u)+\lambda\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(e^{iu}-1\right)H_2(u,z)+$$

$$+\frac{i}{N}B_2(z)\left(\beta-\alpha e^{-iu}\right)\frac{\partial H_0(u)}{\partial u}+\frac{i}{N}\lambda\left(e^{iu}-1\right)\frac{\partial H_2(u,z)}{\partial u}=0.$$

Полученную систему (2) будем решать методом асимптотического анализа в условии растущего числа источников ($N\to\infty$).

Теорема 1. *Для замкнутой RQ-системы M/GI/1//N с вызываемыми заявками справедливо следующее равенство*:

$$\lim_{N\to\infty} M\exp\left(iw\frac{n(t)}{N}\right)=\exp(iw\kappa_1),$$

где величина κ_1 *имеет смысл асимптотического семиинварианта первого порядка и является решением уравнения*

$$\lambda(1-\kappa_1)\left[R_1(\kappa_1)+R_2(\kappa_1)\right]-(\alpha+\sigma)R_0(\kappa_1)\kappa_1=0,$$

где стационарное распределение вероятностей $R_k(\kappa_1)$ *состояний* k *прибора зависит от* κ_1 *и определяются равенствами*

$$R_0(\kappa_1)=\{1+\delta_1(\kappa_1)b_1+\delta_2(\kappa_1)b_2\}^{-1},$$

$$R_1(\kappa_1)=\delta_1(\kappa_1)R_0(\kappa_1)b_1, \quad R_2(\kappa_1)=\delta_2(\kappa_1)R_0(\kappa_1)b_2.$$

Здесь $\qquad \delta_1(\kappa_1)=\lambda(1-\kappa_1)+\sigma\kappa_1, \ \ \delta_2(\kappa_1)=\beta(1-\kappa_1)+\alpha\kappa_1.$

Для реализации асимптотики второго порядка в системе уравнений (2) выполним следующие замены:

$$H_0(u)=H_0^{(2)}(u)\exp\{iu\kappa_1 N\},$$

$$H_k(u,z)=H_k^{(2)}(u,z)\exp\{iu\kappa_1 N\}, \quad k=1,2,$$

и в результате получим систему вида

$$\frac{\partial H_1^{(2)}(u,0)}{\partial z}+\frac{\partial H_2^{(2)}(u,0)}{\partial z}-\left[(\lambda+\beta)(1-\kappa_1)+(\alpha+\sigma)\kappa_1\right]H_0^{(2)}(u)+$$
$$+\frac{i}{N}[\alpha+\sigma-\lambda-\beta]\frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial H_1^{(2)}(u,z)}{\partial z}-\frac{\partial H_1^{(2)}(u,0)}{\partial z}+\left[\lambda(1-\kappa_1)+\sigma\kappa_1 e^{-iu}\right]B_1(z)H_0^{(2)}(u)+$$
$$+\lambda\left(1-\kappa_1-\frac{1}{N}\right)\left(e^{iu}-1\right)H_1^{(2)}(u,z)+ \tag{3}$$
$$+\frac{i}{N}B_1(z)\left(\lambda-\sigma e^{-iu}\right)\frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u}+\frac{i}{N}\lambda\left(e^{iu}-1\right)\frac{\partial H_1^{(2)}(u,z)}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial H_2^{(2)}(u,z)}{\partial z}-\frac{\partial H_2^{(2)}(u,0)}{\partial z}+\left[\beta(1-\kappa_1)+\alpha\kappa_1 e^{-iu}\right]B_2(z)H_0^{(2)}(u)+$$
$$+\lambda\left(1-\kappa_1-\frac{1}{N}\right)\left(e^{iu}-1\right)H_2^{(2)}(u,z)+$$
$$+\frac{i}{N}B_2(z)\left(\beta-\alpha e^{-iu}\right)\frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u}+\frac{i}{N}\lambda\left(e^{iu}-1\right)\frac{\partial H_2^{(2)}(u,z)}{\partial u}=0.$$

Применяя систему (3), можно доказать следующее утверждение:

Теорема 2. *В условии теоремы* 1 *справедливо равенство*

$$\lim_{N\to\infty} M\exp\left(iw\frac{n(t)-\kappa_1 N}{\sqrt{N}}\right)=\exp\left\{\frac{(iw)^2}{2}\kappa_2\right\},$$

где величина κ_2 *имеет смысл асимптотического семиинварианта второго порядка и определяется равенством*

$$\kappa_2=\frac{\lambda(1-\kappa_1)g_1+(\alpha+\sigma)\kappa_1}{\lambda(1-\kappa_1)g_2+\lambda(\delta_1 b_1+\delta_2 b_2)+(\alpha+\sigma)},$$

где $$g_1=\frac{\lambda}{2}(1-\kappa_1)\left[\delta_1 b_1^{(2)}+\delta_2 b_2^{(2)}\right]-\kappa_1\left[\sigma b_1+\alpha b_2\right],$$

$$g_2=(\lambda-\sigma)b_1+(\beta-\alpha)b_2,\quad \delta_1=\delta_1(\kappa_1),\quad \delta_2=\delta_2(\kappa_1).$$

Таким образом, из теоремы 1 и 2 следует, что допредельное распределение вероятностей числа заявок на орбите можно аппроксимировать нормальным распределением с математическим ожиданием $\kappa_1 N$ и дисперсией $\kappa_2 N$.

Заключение

В работе рассмотрена замкнутая RQ-система M/GI/1//N с вызываемыми заявками. Исследование системы выполнено методом асимптотического анализа в предельном условии растущего числа источников. В результате анализа было показано, что предельное распределение вероятностей числа заявок на орбите имеет нормальное распределение с заданными параметрами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Artalejo J.R.*, *Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems: A Computational Approach. Springer, 2008. 309 p.
2. *Falin G.I.*, *Templeton J.G.C.* Retrial queues. London: Chapman & Hall, 1997. 328 p.
3. *Falin G.* Model of coupled switching in presence of recurrent calls // Engineering Cybernetics Review. 1979. V. 17. P. 53–59.
4. *Artalejo J.R.*, *Phung-Duc T.* Markovian retrial queues with two way communication // J. Industrial and Management Optimization. 2012. V. 8(4). P. 781–806.
5. *Dragieva V.*, *Phung-Duc T.* Two-way communication M/M/1 retrial queue with server-orbit interaction // Proceedings of the 11th International Conference on Queueing Theory and Network Applications. ACM, 2016 . P. 11.
6. *Nazarov A.A.*, *Paul S.*, *Gudkova I.*, *et al.* Asymptotic analysis of Markovian retrial queue with two-way communication under low rate of retrials condition // Proceedings 31st European Conference on Modelling and Simulation. 2017.
7. *Dragieva V.I.* Number of retrials in a finite source retrial queue with unreliable server // Asia-Pac. J. Oper. Res. 2014. V. 31(2). P. 23.
8. *Sztrik J.*, *Almási B.*, *Roszik J.:* Heterogeneous finite-source retrial queues with server subject to breakdowns and repairs // J. Math. Sci. 2006. V. 132. P. 677–685.
9. *Nazarov A.*, *Sztrik J.*, *Kvach A.* A Survey of Recent Results in Finite-Source Retrial Queues with Collisions // Communications in Computer and Information Science. Springer Verlag, 2018. V. 912. P. 1–15.
10. *Nazarov A.*, *Sztrik J.*, *Kvach A. et al.* Asymptotic analysis of finite-source M/M/1 retrial queueing system with collisions and server subject to breakdowns and repairs // Annals of Operations Research. 2018. https://doi.org/10.1007/s10479-018-2894-z
11. *Dragieva V.*, *Phung-Duc T.:* Two-way communication M/M/1//N retrial queue // International Conference on Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications. Springer, 2017. P. 81–94.
1. *Nazarov A.*, *Sztrik J.*, *Kvach A.* Asymptotic sojourn time analysis of closed M/M/1 retrial queuing system with two-way communication // Communications in Computer and Information Science. Springer Verlag, 2018. V. 912. P. 172–183.