МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

УКРАИНСКОЙ ССР

КИЕВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИСТЕТ имени Т. Г. ШЕВЧЕНКО

На правах рукописи

СТРИК Янош

УДК 519.21

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ИСТОЧНИКОВ

01.01.05 - теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель-
доктор физико-математических наук,
профессор **В. В. Анисимов**.

Киев - 1989

С о д е р ж а н и е

ВВЕДЕНИЕ.

Теория массового обслуживания (МО) в последние годы стала одной из наиболее интенсивно развивающихся ветвей теории вероятностей. Методы и результаты теории МО с успехом используются при решении проблем теории надежности, анализе процессов функционирования сложных систем, разработке автоматизированных систем управлений различных видов и во многих других технических областях. В связи с быстрым развитием информационных и вычислительных систем особую актуальность приобрели вопросы исследования сложных систем аналитическими, асимптотическими и имитационными методами. Современное состояние теории МО характеризуется высоким уровнем и интенсивным развитием, что нашло свое отражение в ряде работ, среди которых отметим прежде всего [1, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 26, 27, 30, 32, 33, 35, 36, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 53, 54, 55, 58, 59, 66, 67, 68, 70, 73, 77, 78, 81, 87, 89, 91, 92, 98, 100, 101, 116, 121]. Среди моделей массового обслуживания важную роль играет система с конечным числом источников требований. Такая система состоит из r обслуживающих приборов и n источников, генерирующих требования в случайные моменты времени. Причем, если в некоторый момент времени $t \geq 0$ требование i-го $(i=\overline{1,n})$ источника находится на обслуживании, то до окончания его обслуживания i-й источник не генерирует новых требований.

Время обслуживания каждого требования является случайной величиной, а процесс обслуживания протекает в соответствии с определенной дисциплиной. После окончания обслуживания требование возвращается в источник.

В дальнейшем в диссертационной работе будут рассмотрены три класса задач, каждый из которых требует специфического метода исследования моделей МО с конечным числом источников.

1. В тридцатые годы в связи с автоматизацией станков в промышленности наметился переход на обслуживание одним рабочим нескольких станков. Станки в случайные моменты времени в силу тех или иных причин выходят из стоя и требуют к себе внимания рабочего. Длительность операции по приведению станка в порядок, вообше говоря, не постоянна и является случайной величиной. Спрашивается, как велика вероятность того, что в определенный момент времени (при заданном режиме работы станка и рабочего) будет ожидать обслуживания то или иное число станков. Дальнейшие естественные и важные для практики вопросы таковы: как велико среднее время простоя станков при том или ином числе станков, порученных рабочему ? Сколько станков при заданной организации труда экономически оправдано поручить обслуживать одному рабочему ? Как рациональнее организовать обслуживание: поручить ли n станков одному рабочему или ns станков s рабочим ?

Исследованиям проблемы обслуживания станков посвяшен широкий круг работ, среди которых следует выделить [17, 32, 41, 43, 49, 58, 59, 66, 68, 74, 77-79, 81-86, 89, 90, 93-95, 99, 102, 104, 105, 108-110, 112-114, 116, 117, 120-123].

2. Рассмотрим резервированую систему с восстановлением, состоящую из n независимых элементов и r ремонтных устройств ($1 \le r \le n$). В момент времени $t=0$ система включается в рабочее состояние и все элементы исправны. Длительности исправной работы, а также длительности восстановления элементов являются случайными величинами. Восстановления отказавщих элементов проводятся по определенной дисциплине. Система отказывает тогда, когда одновременно неисправны $m+1$ элементов, $0< m <n$. Задача состоит в том, чтобы найти распределение момента первого отказа системы.

Изучениям надежности систем с восстановлением посвящены работы многих авторов, например, [25, 26, 28-30, 46, 47, 51, 53, 63-65, 70, 71, 98].

3. Рассмотрим вычислительную систему оперативной обработки информации с диалоговым режимом работы. Система содержит n терминалов, за каждым из которых работает пользователь, формирующий запросы на обслуживание заявки. Обслуживание запросов выполняется совокупностью из r ЭВМ ($r \le n$) по определенной дисциплине. Формирование нового запроса пользователь начинает лишь после получения ответа на предыдущий запрос. Время обслуживания запроса и время, затраченное пользователем на создание нового запроса, являются случайными величинами. Важная характеристика этой системы - среднее время пребывания заявки в ЭВМ, т. е. время,в течение которого пользователь ждет ответа на запрос.

Применению методов и результатов теории массового обслуживания к анализу вычислительних систем посвящен ряд работ, среди котопих отметим [1, 2, 13, 14, 16, 21, 36, 42, 44, 55, 67, 72, 73, 75-78, 88, 89, 91, 96-98, 101, 103, 107, 111, 119, 124, 125, 127].

Настоящая работа посвящена анализу систем МО с конечним числом источников требований. При этом используются аналитические, численные, асимптотические и имитационные методы исследований. Тема диссертации тесно связана с проблемами, впервые исследованными Хинчиным, Пальмом, Такачем [68, 117, 120, 121].

Перейдем теперь к краткому изложению результатов с указанием их места среди аналогичных исследований.

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

Первая глава диссертационной работы посвящена аналитическому моделированию систем $\vec{G}/M/r$ с различными дисциплинами обслуживания. Получены в явном виде стационарные распределения вероятностей состояний систем, которые затем используются для расчета их основных характеристик.

Пусть система состоит из r обслуживающих приборов. Требования возникают в $n > r$ источниках. Если в данный момент времени t требование некоторого источника обслуживается, то новое требование данный источник послать не может. Время пребывания в источнике каждого требования связано с выполнением некоторой работы. Объем работы, соотвествующей различным требованиям, предположим случайной величиной с общей функцией распределения $F_i(x)$ и плотностью $f_i(x)$ для i-го источника требований, $i=\overline{1,n}$. Время обслуживания каждого требования тоже интерпретируется как объем работы. Предположим, что объемы работ для всех требований являются одинаково экспоненциально распределенными случайными величинами с параметром μ.

Все случайные величины будем считать независимыми.

Обозначим через $a(k)$, $b(k)$ интенсивность (скорость) выполнения работ в источнике и на обслуживании, соответственно, при условии наличия k требований в источнике. Обслуживание требований происходит по дисциплине FIFO (First In, First Out - первым пришел, первым обслужен) или SIRO (Service In Random Order - случайный выбор требования из очереди на обслуживание).

В работе [83] рассмотрена система $G/M/r$ с единичными скоростями. Показано что стационарное распределение вероятностей состояний системы совпадает с соответствующим распределением классической системы $M/M/r$. Основной целью настоящей главы является обобшение этих результатов на случай разнотипных требований и получение основных характеристик системы в стационарном режиме.

Введем обозначения:

$\nu(t)$ - число требований, находящихся в источнике в момент времени t,

$\alpha_1(t),\dots,\alpha_{\nu(t)}(t)$ - их индексы в лексикографическом порядке,

$$Q(0)=\lim_{t\to\infty} P(\nu(t)=0),$$

$$Q(i_1,\dots,i_k)=\lim_{t\to\infty} P(\nu(t)=k;\alpha_s(t)=i_s, s=\overline{1,k}),\quad k=\overline{1,n}.$$

С помощью теории многомерных марковских процессов установлено существование эргодического режима системы. Используя метод интегро-дифференциальных уравнений доказано, что стационарные распределения вероятностей систем $\vec{G}/M/r/FIFO$ и $\vec{G}/M/r/SIRO$ совпадают и

$$Q(0)=\frac{a(1)\ldots a(n)}{\mu(0)\ldots\mu(n-1)}\,\frac{n!}{r!r^{n-r}}\,c(n),$$

$$Q(i_1,\ldots,i_k)=\frac{a(k+1)\ldots a(n+k)}{\mu(k)\ldots\mu(n+k-1)}\,\frac{(n-k)!}{r!r^{n-r-k}}\,\frac{1}{\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_k}}\,c(n),$$

$$k=\overline{1,n-r},$$

$$Q(i_1,\ldots,i_k)=\frac{a(k+1)\ldots a(n+k)}{\mu(k)\ldots\mu(n+k-1)}\,\frac{1}{\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_k}}\,c(n),$$

$$k=\overline{n-r+1,n},$$

где $\mu(k)=\mu b(k)$, $\mu(m)=a(m+1)=1$, при $m>n$.

Так как

$$c(n)=\lambda_1\ldots\lambda_n Q(1,\ldots,n),\ \text{то}$$

постоянная $c(n)$ определяется из условия нормировки.

Найдены формулы для основных стационарных характеристик: среднее число требований, находящихся в источнике, среднее число занятых обслуживающих приборов, средняя длина очереди, производительность станков, эффективность обслуживающих приборов, средняя длительность интервала занятости, среднее время пребывания требований в центре обслуживания, среднее время ожидания обслуживания.

В связи с быстрым развитием современной вычислительной техники все более важную роль играют вычислительные методы при решении задач массового обслуживания [см. 15, 16, 36, 78, 89, 90, 91, 97, 98, 100, 101, 107, 111, 124, 127].

Во второй главе рассматриваются СМО с разнотипными источниками требований. Приводятся эффективные вычислительные алгоритмы для расчета стационарных вероятностей состояний систем и формулы для вычисления их основных характеристик.

§ 2.1. посвящен анализу функционированию системы $\vec{M}/\vec{M}/1/PPS$. Эта система тесно связана с вычислительной техникой , так как дисциплина обслуживания требований характерна для мультипрограммных и терминальных систем [см. 13, 42].

Рассмотрим вычислительную систему оперативной обработки информации с диалоговым режимом работы. Система содержит n терминалов, за каждым из которых работает пользователь, формирующий запросы на обслуживание заявки. Обслуживание запросов выпольняется одним центральным процессором (ЦП). Формирование нового запроса пользователь начинает лиш после получения ответа на предыдущий запрос. Время, затраченное i-м пользователем на создание нового запроса, является случайной величиной, распределенной по показательному закону с параметром λ_i, $i=\overline{1,n}$. Предположим также, что время обслуживания запросов i-го пользователя распределено по показательному закону с параметром μ_i, $i=\overline{1,n}$.
Все случайные величины будем считать независимыми.
ЦП обслуживает запросы по следующему алгоритму. Вновь поступающие запросы становятся в единственную очередь, продвига-

ются к ее началу в порядке поступления и, наконец, получают квант обслуживания. Если этот квант времени истекает и необходимо дальнейшее обслуживание, требование возвращается в хвост той же очереди и повторяет цикл. Предположим, что квант для запросов i-го пользователя равен $r_i Q$, $i=\overline{1,n}$, где r_i называется весовым коэффициентом. При $Q\to 0$ получается модель приоритетного разделения процессора (Priority Processor Sharing - PPS) для системы коллективного пользования. Это понятие впервые было введено в [106]. Задача состоит в том, чтобы найти основные стационарные характеристики системы.

Введем следующие обозначения:

$\nu(t)$ - число заявок, находящихся в процессоре в момемт времени t,

$\alpha_1(t),\dots,\alpha_{\nu(t)}(t)$ - их индексы в лексикографическом порядке,

$$\Lambda_{i_1,\dots,i_k} = \sum_{j\neq i_1,\dots,i_k} \lambda_j , \quad \Lambda=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j , \quad R_{i_1,\dots,i_k}=\sum_{j=1}^{k} r_{i_j} ,$$

$$б_{i_1,\dots,i_k} = \frac{1}{R_{i_1,\dots,i_k}} \sum_{s=1}^{k} r_{i_s}\mu_{i_s} + \Lambda_{i_1,\dots,i_k} ,$$

$$p(0)=\lim_{t\to\infty} P(\nu(t)=0),$$

$$p(i_1,\dots,i_k)=\lim_{t\to\infty} P(\nu(t)=k;\ \alpha_1(t)=i_1,\dots,\alpha_k(t)=i_k),\ k=\overline{1,n}. \quad (1)$$

Справедлива следующая

Теорема 2.1.1. Если $\lambda_i>0$, $\mu_i>0$, $r_i>0$, $i=\overline{1,n}$, то $\underline{X}(t)$, $t\geq 0$ обладает единственным эргодическим (стационарным) распределением (1), которое удовлетворит системе линейных уравнений

$$\Lambda p(0) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j p(j),$$

$$\sigma_{i_1,\dots,i_k} p(i_1,\dots,i_k) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_{i_s} p(i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},\dots,i_k) +$$

$$+ \sum_{j\neq i_1,\dots,i_k} \frac{\mu_j r_j}{R_{i_1,\dots,i_k}} p(i'_1,\dots,i'_{k+1}), \qquad (2)$$

$$\sigma_{1,\dots,n} p(1,\dots,n) = \sum_{s=1}^{n} \lambda_s p(1,\dots,s-1,s+1,\dots,n),$$

дополненной условием нормировки

$$p(0) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in C_n^k} p(i_1,\dots,i_k) = 1. \qquad (3)$$

В случае $r_i = r$, $i=\overline{1,n}$ (разделение процессора) решением (2),(3) служит

$$p(i_1,\dots,i_k) = p(0) k! \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} / \mu_{i_j}$$

[см. 73, 75, 88, 90, 95].

В принципе, решить систему (2),(3) нетрудно. Хотя ввиду того, что система уравнений содержит 2^n неизвестных, пришлось бы использовать вычислительные методы для решения систем линейных уравнений большой размерности [см. 89, 100, 124]. Вместо этого мы приведем здесь рекуррентные соотношения для расчета стационарных вероятностей состояний системы.

Введем обозначение

$$\underline{Y}_k = \begin{bmatrix} p(1,\dots,k) \\ \vdots \\ p(i_1,\dots,i_k) \\ \vdots \\ p(n-k+1,\dots,n) \end{bmatrix}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Элементы $p(i_1,\dots,i_k)$ вектора $\underline{Y}_k$ находятся в лексикографическом порядке по их индексам. Доказано что (2) можно записать в матричном виде

$$
\begin{aligned}
&\underline{Y}_o=B_o\underline{Y}_1,\\
&Y_1=A_1Y_o+B_1Y_1,\\
&\vdots\\
&\underline{Y}_k=A_k\underline{Y}_{k-1}+B_k\underline{Y}_{k+1},\\
&\vdots\\
&\underline{Y}_n=A_n\underline{Y}_{n-1},
\end{aligned}
$$

где

матрица A_k – размерности $\binom{n}{k}\times\binom{n}{k-1}$, $k=\overline{1,n}$,

матрица B_k – размерности $\binom{n}{k}\times\binom{n}{k+1}$, $k=\overline{0,n-1}$,

$\underline{Y}_o=p(0)$, вектор $\underline{Y}_k$ – размерности $\binom{n}{k}$, $k=\overline{1,n}$.

Элементы матриц A_k, B_k легко определяются с помощью (2).

Основным результатом настоящего параграфа является

Теорема 2.1.2. Векторы $\underline{Y}_k$, $k=\overline{1,n}$ вычисляются из следующих рекуррентных соотношений

$$\underline{Y}_k=F_k\underline{Y}_{k-1},\quad k=\overline{1,n},$$

$$\text{где}\quad F_n=A_n,\qquad F_k=(E-B_kF_{k+1})^{-1}A_k,\quad k=\overline{1,n-1}.$$

В заключении параграфа приводятся результаты численных примеров, используемые для сравнения различных дисциплин обслуживания с PPS.

В § 2.2. рассматривается экспоненциальная СМО, в которой требования различных типов, возникающие от двух групп конечных источников объема m и n обслуживаются одним прибором. Заявки из источника объема m имеют абсолютный приоритет. СМО типа M/G/1 с приоритетом были изучены в [32, 102, 122, 123]. Основный результат параграфа заключается в разработке алгоритмического подхода к решению системы уравнений баланса. Приводятся выражения для основных стационарных характеристик рассматриваемой системы.

Рассмотрим сложную систему, состоящую из m приоритетных и n неприоритетных требований. Причем если все приоритетные требования находятся в источнике в момент времени t, то вероятность поступления i-го приоритетного требования в интервале $(t,t+h)$ равна $\gamma_i h + o(h)$, в противном случае $\gamma^*_i h + o(h)$, $i=\overline{1,m}$. Вероятность поступления j-го неприоритетного требования на участке $(t,t+h)$ равна $\lambda_j h+o(h)$, $j=\overline{1,n}$. Требования обслуживаются одним обслуживающим прибором по следующей дисциплине. Обслуживание неприоритетных требований происходит только тогда, когда все приоритетные требования находятся в источнике. Однако если на обслуживании находится требование неприоритетной группы, а поступит требование из приоритетной группы, то обслуживание немедленно прерывается и обслуживающий прибор начинает обслуживать новую заявку. Внутри каждого класса - прямой порядок обслуживания (FIFO). Время обслуживания i-го приоритетного требования предполагается случайной величиной, распределенной по показательному закону с параметром σ_i, $i=\overline{1,m}$. Время обслуживания j-го неприоритетного требования - экспоненциально распределенная случайная величина с параметром μ_j, $j=\overline{1,n}$. Все случайные величины будем считать назависимыми.

Эта модель может быть интерпретирована как задача о простое станков, в которой предполагается, что рабочий закреплен за двумя независимыми группами станков, имеющими различные параметры отказов и восстановлений. Это довольно обычная ситуация, поскольку часто либо в связи с расширением производства, либо в связи с заменой устаревших станков устанавливаются новые станки, и так как обновление парка станков длится годами, то рабочий обычно имеет дело на практике с неоднородной группой старых и новых станков. Очевидно, важен вопрос о том, какой тип станков сделать приоритетным, чтобы минимизировать потери из-за простоев.

Для того, чтобы проиллюстрировать применение приведенных выше результатов, рассмотрим задачу о простое станков. Зададимся вопросом, какому типу станков назначать приоритет при ремонте, чтобы минимизировать следующую функцию потерь в единицу времени

$$L=\sum_{i=1}^{m} c_i(1-U_i) + \sum_{j=1}^{n} \hat{c}_j(1-\hat{U}_j) + B(1-U),$$

где

c_i – прибыль i-го приоритетного станка в единицу времени,

$\hat{c}_j$ - прибыль j-го неприоритетного станка в единицу времени,

B - зарплата ремонтника в единицу времени,

U_i – производительность i-го приоритетного станка,

$\hat{U}_j$ – производительность j-го неприоритетного станка,

U – эффективность ремонтника.

До сих пор наиболее исследованной является система M/G/1. Библиографические сведения по изучению системы наиболее полно представлены в работах [17, 32, 45, 58, 59, 68, 91, 98, 108, 109, 121]. В терминах преобразования Лапласа-Стилтьеса были получены основные характеристики системы. С помощью метода вложенной цепи Маркова и биномиального преобразования в работе [121] найдены основные показатели системы. В связи с задачами современной вычислительной техники интенсивно исследовались приоритетные системы [см. 27, 32, 36, 97, 107, 124].

В § 2.3. рассмотрена система, состоящая из одного прибора. Время пребывания в i-м источнике требования предполагается случайной величиной, распределенной по показательному закону с параметром λ_i, $i=\overline{1,n}$. Время обслуживания требования от i-го источника - произвольно распределенная случайная величина с функцией распределения $F_i(x)$, $i=\overline{1,n}$. Дисциплина обслуживания - FIFO . Все случайные величины будем считать независимыми.

С помощью метода интегро-дифференциальных уравнений и рекуррентных соотношений изучим основные характеристики описанной системы в стационарном режиме.

Для анализа модели вводится марковский процесс

$$\underline{X}(t)=(\nu(t);\ \alpha_1(t),\dots,\alpha_{\nu(t)}(t);\ \xi_t)$$

где

$\nu(t)$ - число требований, находящихся в центре обслуживания в момемт времени t,

$\alpha_1(t),\dots,\alpha_{\nu(t)}(t)$ - их индексы в порядке поступления,

ξ_t - время, прошедшее с момента начала текущего обслуживания требования $\alpha_1(t)$.

При условии, что первые моменты распределений $F_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ конечны, существуют следующие пределы вероятностей

$$P(0)=\lim_{t\to\infty} P(\ \nu(t)=0\ ),$$

$$P(i_1,\dots,i_k;x)=\lim_{t\to\infty} P(\ \nu(t)=k;\ \alpha_1(t)=i_1,\dots,\alpha_k(t)=i_k;\xi_t\le x\ ).$$

Введем обозначения

$$\Lambda_{i_1,\dots,i_k}=\sum_{j\ne i_1,\dots,i_k}\lambda_j\ ,\quad \Lambda=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\ ,\quad S_{i_1,\dots,i_k}=\sum_{j=1}^{k}\lambda_{i_j},$$

$$\Pi_s^{(i_1,\dots,i_k)}=\prod_{r=s+1}^{k}\lambda_{i_r}\Big/\prod_{q=s+1}^{k}S_{i_{s+1},\dots,i_q}.$$

$$\prod_{r=s+1}^{s}=1,\quad s=\overline{1,k},\quad k=\overline{1,n}.$$

Доказана

Теорема 2.3.1. Стационарное распределение $P(i_1,\dots,i_k;x)$ обладает плотностью $p(i_1,\dots,i_k;x)$ почти для всех $x>0$, за исключением множества $\{x\}$ нулевой меры Лебега. Кроме того функции

$$p^*(i_1,\dots,i_k;x)=p(i_1,\dots,i_k;x)/(1-F_{i_1}(x))$$

дифференцируемы для любого $x>0$.

Далее, справедлива следующая

Лемма 2.3.1. Функции $p^*(i_1,\dots,i_k;x)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dp^*(i_1;x)}{dx}+\Lambda_{i_1}p^*(i_1;x)=0,$$

$$\frac{dp^{*}(i_1,\dots,i_k;x)}{dx}+\Lambda_{i_1,\dots i_k}p^{*}(i_1,\dots,i_k;x)=\lambda_{i_k}p^{*}(i_1,\dots,i_{k-1};x), \tag{4}$$

$$\frac{dp^{*}(i_1,\dots,i_n;x)}{dx}=\lambda_{i_n}p^{*}(i_1,\dots,i_{n-1};x),$$

с граничными условиями

$$\Lambda P(0)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty p^{*}(i;x)dF_i(x),$$

$$p^{*}(i_1;0)=\lambda_{i_1}P(0)+\sum_{j\neq i_1}\int_0^\infty p^{*}(j,i_1;x)dF_j(x), \tag{5}$$

$$p^{*}(i_1,\dots,i_k;0)=\sum_{j\neq i_1,\dots,i_k}\int_0^\infty p^{*}(j,i_1,\dots,i_k;x)dF_j(x),$$

$$p^{*}(i_1,\dots,i_n;0)=0.$$

Основным результатом настоящего параграфа является следующая теорема, которая дает решение (4) при (5).

Теорема 2.3.2. Решение (4) имеет вид

$$p^{*}(i_1,\dots,i_k;x)=\sum_{s=1}^{k}(-1)^{k-s}c(i_1,\dots,i_s)\Pi_s^{(i_1,\dots,i_k)}\exp\{-\Lambda_{i_1,\dots,i_s}x\}$$

где константы $c(i_1,\dots,i_s)$ определяются из (5) рекуррентными соотношениями.

Обозначая

$$\underline{c}_k=\begin{bmatrix} c(1,\dots,k)\\ \vdots \\ c(i_1,\dots,i_k)\\ \vdots \\ c(n,n-1,\dots,n-k+1)\end{bmatrix},\quad k=\overline{1,n},$$

получим

$$\underline{c}_n = \sum_{j=1}^{n-1} A_j^{(n)} \underline{c}_j , \qquad \underline{c}_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} B_j^{(n-1)} \underline{c}_j ,$$

где

$$B_j^{(n-1)} = (E - A_n^{(n-1)} A_{n-1}^{(n)} - A_{n-1}^{(n-1)})^{-1} (A_n^{(n-1)} A_j^{(n)} + A_j^{(n-1)}), \quad j=\overline{1,n-2}.$$

Аналогично,

$$\underline{c}_k = \sum_{j=1}^{k-1} B_j^{(k)} \underline{c}_j ,$$

где

$$B_j^{(k)} = (E - A_{k+1}^{(k)} A_k^{(k+1)} - A_k^{(k)})^{-1} (A_{k+1}^{(k)} \ A_j^{(k+1)} + A_j^{(k)}), \quad j=\overline{1,k-1}, \quad k=\overline{2,n-1}.$$

Для $\underline{c}_1$ находим

$$\underline{c}_1 = A_2^{(1)} c_2 + A_1^{(1)} \underline{c}_1 + P(0)\underline{\lambda}, \quad \underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \text{ - вектор-столбцы.}$$

Итак,

$$(E - A_2^{(1)} B_1^{(2)} - A_1^{(1)}) \underline{c}_1 = P(0)\underline{\lambda}.$$

Следовательно,

$$\underline{c}_1 = (E - A_2^{(1)} B_1^{(2)} - A_1^{(1)})^{-1} P(0)\underline{\lambda}.$$

В заключении параграфа решен численный пример с гипер-эрланговскими распределениями времени обслуживания.

Сложность современного производства и в связи с этим сложность и большая размерность соответствующих математических моделей приводит к необходимости развивать методы асимптотического анализа, которые в ряде случаев позволяют приближенно сводить изучение исходной модели к упрощенной и получать простые приближенные формулы. В теории асомптотического фазового укрупнения первичной является задача об асимптотическом поведении момента первого выхода системы из области, когда вероятность выхода стремится к нулю. В настоящее время асимптотическому анализу различных систем массового обслуживания посвящено немало работ [см. 3-11, 20, 24, 28, 29, 31, 38, 39, 46-48, 50-53, 57, 60, 63-65, 70, 71].

В третьей главе используя методику s-множеств, разработанную В. В. Анисимовым, изучается предельное поведение момента первого отказа переключаемых марковских систем с быстрым обслуживанием, а также исследуется поведение потока моментов отказа системы. Показано что предельное распределение момента первого отказа системы будет показательным, а поток отказов системы слабо сходится к пуассоновскому процессу.

Параграф 3.1. является вспомогательным и посвящен изучению предельного поведения времени пребывания полумарковского процесса (ПМП) в фиксированном подмножестве состояний. Приводятся некоторые теоретические результаты, используемые далее в работе.

Поскольку особый интерес для предельных теорем МО представляют задачи, связанные с изучением важной характеристики сложной системы - временем функционирования системы до выхода из строя, то мы сформулируем задачу в терминах теории надежности. Заметим, что изучаемая проблематика тесно связана с работами А. Д. Соловьева [см. 28, 29, 63, 64] по асимптотическому анализу надежности систем методом теории процессов восстановления.

§ 3.2. посвящен решению следующей задачи.

Рассмотрим марковскую систему, состоящую из n элементов. Каждый из этих элементов с течением времени отказывает, сразу же после отказа идет в ремонтное устройство, состоящее из r обслуживающих приборов. Неисправные элементы восстанавливаются в порядке отказов. Если в момент прихода элемента все приборы заняты восстановлением, то этот элемент становится в очередь. По окончании восстановления элемент мгновенно возвращается на свое место, сразу включается в работу, потом снова отказывает и т. д..

Предположим, что элементы работают в некоторой случайной среде, управляемой состояниями эргодической цепи Маркова ($X(t)$, $t\geq 0$), заданной на конечном множестве состояний $\{ 1,2,\dots,r_1 \}$ с матрицей интенсивностей вероятностей переходов

$$\{ a_{ij},\ i,j=\overline{1,r_1},\ a_{ii}=\sum_{j\neq i} a_{ij} \}.$$

Причем, если $X(t)=i$ и в ремонтном органе в момент t находится s элементов, то время безотказной работы каждого элемента распределено по показательному закону с параметром $\lambda(i,s)$ и все приборы обслуживают неисправные элементы по показательному закону с параметром $\mu_\varepsilon(i,s)$.

Все случайные величины будем считать независимыми.

Предположим, что восстановления элементов происходят асимптотически " быстро ", т. е. $\mu_\varepsilon(i,s)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$.

Пусть для наглядности

$$\mu_\varepsilon(i,s)=\mu(i,s)/\varepsilon,\quad i=\overline{1,r_1},\quad s=\overline{1,n}.$$

Система отказывает тогда, когда одновременно неисправны $m+1$ элементов, $0<m<n$.

Задача состоит в том, чтобы найти предельное распределение момента первого отказа системы при $\varepsilon\to0^{+}$.

Зададим векторный марковский процесс

$$Z_\varepsilon(t)=\{\ X(t),Y_\varepsilon(t)\ \}$$

с множеством состояний

$$\{\ (i,s),\ i=\overline{1,r_1},\ s=\overline{0,n}\ \},$$

где

$X(t)$ - управляющая цепь Маркова,

$Y_\varepsilon(t)$ - количество неисправных элементов в момент времени t.

Выделим из множества состояний подмножество

$$\langle\ \alpha_m\ \rangle = \{\ (i,s),\ i=\overline{1,r_1},\ \ s=\overline{0,m}\ \}.$$

Через $\Omega_\varepsilon(m)$ обозначим момент первого отказа системы, т. е.

$$\Omega_\varepsilon(m)\ =\ \inf(\ t\ :\ Y_\varepsilon(t)=m+1\ /\ Y_\varepsilon(0)\le m\ ).$$

Тогда $\Omega_\varepsilon(m)$ - это момент первого выхода $Z_\varepsilon(t)$ из $\langle\ \alpha_m\ \rangle$.

Обозначим через

Π_k, $k=\overline{1,r_1}$ - стационарное распределение цепи $X(t)$, $t\ge0$,

$S_r=\min(s,r)$.

Доказывается

Теорема 3.2.1. При указанных выше предположениях распределение величины $\varepsilon^m\Omega_\varepsilon(m)$ независимо от начального состояния системы слабо сходится к показательному с параметром Λ, где

$$\Lambda=n\sum_{i=1}^{r_1}\Pi_i\lambda(i,0)\prod_{s=1}^{m}\frac{(n-s)\lambda(i,s)}{S_r\mu(i,s)}.$$

Следовательно, для момента первого отказа системы имеет место

$$P(\ \Omega_\varepsilon(m)>t\ )\ \simeq\ \exp(-\varepsilon^m\Lambda t).$$

Исследуем поведение потока моментов отказа системы. Пусть $\nu_\varepsilon(t)$ – количество отказов системы на промежутке $[0,t]$.

Справедлива следующая

Теорема 3.2.2. Конечномерные распределения процесса $\nu_\varepsilon(\varepsilon^{-m}t)$ (поток отказов системы) слабо сходятся к распределениям пуассоновского процесса с параметром Λ.

В параграфе 3.3. исследована восстаналиваемая система с разнотипными элементами.

Рассмотрим марковскую систему, состоящую из n элементов. Каждый из этих элементов с течением времени отказывает, сразу же после отказа идет в ремонтное устройство, состоящее из r обслуживающих приборов. Неисправные элементы восстанавливаются в порядке отказов. Если в момент прихода элемента все приборы заняты восстановлением, то этот элемент становится в очередь. По окончании восстановления элемент мгновенно возвращается на свое место, сразу включается в работу, потом снова отказывает и. т. д. .

Предположим, что элементы работают в некоторой случайной среде, управляемой состояниями эргодической цепи Маркова ($X(t)$, $t\geq 0$), заданной на конечном множестве состояний $\{\ 1,2,\dots,r_1\ \}$ с матрицей интенсивностей вероятностей переходов

$$\{ a_{ij},\ i,j=\overline{1,r_1},\ a_{ii}=\sum_{j\neq i} a_{ij} \}.$$

Причем, если $X(t)=i$ и в ремонтном органе в момент t находится s элементов с номерами $k_1,k_2,\ldots,k_s$, то вероятность отказа j-го элемента на участке $(t,t+h)$ равна

$$\lambda_j(i:k_1,\ldots,k_s)h + o(h),\ j\in\{ 1,\ldots,n \}\setminus\{ k_1,\ldots,k_s \},$$

а вероятность восстановления j-го элемента на участке $(t,t+h)$ равна

$$\mu_j(i:k_1,\ldots,k_s,\varepsilon)h + o(h), \quad j=k_1,\ldots,k_{\min(s,r)}.$$

Случайную среду и все случайные величины будем считать независимыми.

Предположим, что восстановления элементов происходят асимптотически " быстро ", т.е. $\mu_j(i:k_1,\ldots,k_s,\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$.

Пусть для наглядности

$$\mu_j(i:k_1,\ldots,k_s:\varepsilon)=\mu_j(i:k_1,\ldots,k_s)/\varepsilon.$$

Система отказывает тогда, когда одновременно неисправны $m+1$ элементов, $0<m<n$.

Задача состоит в том, чтобы найти предельное распеделение момента первого отказа системы при $\varepsilon\to 0$.

Зададим векторный марковский процесс

$$Z_\varepsilon(t)=\{ X(t):Y_\varepsilon(t);\gamma_1(t),\gamma_2(t),\ldots,\gamma_{Y_\varepsilon(t)}(t) \}$$

с множеством состояний

$$\{(i:s;k_1,\ldots,k_s),\ i=\overline{1,r_1},\ s=\overline{0,n},\ (k_1,\ldots,k_s)\in V_n^s,\ k_0=0 \},$$

где

$X(t)$ – управляющая цепь Маркова,

$Y_\varepsilon(t)$ – количество неисправных элементов в момент времени t,

$\gamma_1(t),\dots,\gamma_{Y_\varepsilon(t)}(t)$ – номера неисправных элементов в момент времени t в порядке их отказов,

V_n^k – множество всех k-элементных размещений из элементов $1,\dots,n$.

Выделим из множества состояний подмножество

$$\langle \alpha_m \rangle = \{ (i:q;k_1,\dots k_q),\ i=\overline{1,r_1},\ q=\overline{0,m},\ (k_1,\dots,k_s)\in V_n^s \}.$$

Через $\Omega_\varepsilon(m)$ обозначим момент первого отказа системы, т. е.

$$\Omega_\varepsilon(m) = \inf(t : Y_\varepsilon(t)=m+1 \ / \ Y_\varepsilon(0)\le m).$$

Тогда $\Omega_\varepsilon(m)$ – это момент первого выхода $Z_\varepsilon(t)$ из $\langle \alpha_m \rangle$.

Обозначим через

Π_i, $i=\overline{1,r_1}$ – стационарное распределение управляющей цепи $(X(t),\ t\ge 0)$.

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 3.3.1. При указанных выше предположениях распределение величины $\varepsilon^m\Omega_\varepsilon(m)$ независимо от начального состояния системы слабо сходится к показательному с параметром Λ, где

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{(k_1,\dots,k_{m+1})\in V_n^{m+1}} \Pi_i \frac{\prod\limits_{s=0}^{m} \lambda_{k_{s+1}}(i:k_1,\dots,k_s)}{\prod\limits_{s=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{\min(s,r)} \mu_{k_j}(i:k_1,\dots k_s)}.$$

Далее рассматривается аналогичная система с тем различием, что элементы работают в некоторой случайной среде, управляемой состояниями эргодической цепи Маркова $(X_1(t),\ t\geq 0)$, заданной на конечном множестве состояний $\{ 1,2,\dots,r_1 \}$ с матрицей интенсивностей вероятностей переходов

$$\{ a_{i_1 j_1},\ i_1,j_1=\overline{1,r_1},\ a_{i_1 i_1} = \sum_{j\neq i_1} a_{i_1 j} \}.$$

Причем, если $X_1(t)=i_1$ и в ремонтном органе в момент t находится s элементов с номерами $k_1,k_2,\dots,k_s$, то вероятность отказа j-го элемента на участке $(t,t+h)$ равна $\lambda_j(i_1:k_1,\dots,k_s)h + o(h)$, $j\in\{ 1,\dots,n \}\setminus\{ k_1,\dots,k_s \}$. Аналогично, предположим что ремонтное устройство функсионирует в некоторой случайной среде, управляемой состояниями эргодической цепи Маркова $(X_2(t),\ t\geq 0)$, заданной на конечном множестве состояний $\{ 1,\dots,r_2 \}$ с матрицей интенсивностей вероятностей переходов

$$\{ b_{i_2 j_2},\ i_2,j_2=\overline{1,r_2},\ b_{i_2 i_2} = \sum_{j\neq i_2} b_{i_2 j} \}$$

Причем, если $X_2(t)=i_2$ и в ремонтном органе в момент t находится s элементов с номерами $k_1,\dots,k_s$ то вероятность восстановления j-го элемента на участке $(t,t+h)$ равна

$$\mu_j(i_2:k_1,\dots,k_s,\varepsilon)h + o(h),$$
$$j=k_1,\dots,k_{\min(s,r)}.$$

Случайные среды и все случайные величины будем считать независимыми.

Предположим, что восстановления элементов происходят асимптотически " быстро ", т. е. $\mu_j(i_2:k_1,\dots,k_s,\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$.

Пусть для наглядности

$$\mu_j(i_2:k_1,\dots,k_s:\varepsilon)=\mu_j(i_2:k_1,\dots,k_s)/\varepsilon.$$

Система отказывает тогда, когда одновременно неисправны $m+1$ элементов, $0<m<n$.

Задача состоит в том, чтобы найти предельное распределение момента первого отказа системы при $\varepsilon\to 0$.

Обозначая через

$$(\ \Pi^{(1)}_{i_1},\ i_1=\overline{1,r_1}\ )\ ,\ (\ \Pi^{(2)}_{i_2},\ i_2=\overline{1,r_2}\ )$$

стационарное распределение управляющих цепей Маркова, нетрудно убедиться в силу теоремы 3.3.1. в том, что распределение величины $\varepsilon^m\Omega_\varepsilon(m)$ независимо от начального состояния системы слабо сходится к показательному с параметром Λ,

где

$$\Lambda=\sum_{i_1=1}^{r_1}\sum_{i_2=1}^{r_2}\sum_{(k_1,\dots,k_{m+1})\in V_N^{m+1}}\Pi^{(1)}_{i_1}\Pi^{(2)}_{i_2}\frac{\prod\limits_{s=0}^{m}\lambda_{k_{s+1}}(i_1:k_1,\dots,k_s)}{\prod\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{\min(s,r)}\mu_{k_j}(i_2:k_1,\dots k_s)}.$$

В четвертой главе рассмотрена общая модель системы массового обслуживания с конечным числом источников – система типа $\vec{G}/\vec{G}/r/FIFO$. Как показали предыдущие результаты оценить характеристики этой системы в явном виде невозможно. Даже в случае $\vec{M}/\vec{M}/1/FIFO$ требуется использовать численные методы.

С помощью статистического моделирования получены оценки основных характеристик системы. Приведен ряд примеров численных расчетов и проверяются аналитические результаты, доказанные в предыдущих параграфах.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору В. В. Анисимову за научное руководство, ценные советы и постоянное внимание к работе.

Глава 1

АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ $\vec{G}/M/r$ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Аналитический аппарат теории МО позвольяет решить ряд важных задач анализа сложных систем. Его использование помогает выделить наиболее общие закономерности функционирования системы, получить основные характеристики целых классов систем [см. 13, 30, 40, 41, 43, 59, 67, 73, 78, 89, 97, 98, 100, 101, 105, 116, 127].

Настоящая глава посвящена изучению систем $\vec{G}/M/r$ с различными дисцилпинами обслуживания. Получены в явном виде стационарные распределения вероятностей состояний систем, которые затем используются для расчета их основных характеристик.

Пусть система состоит из r обслуживающих приборов. Требования возникают в $n > r$ источниках. Если в данный момент времени t требование некоторого источника обслуживается, то новое требование данный источник послать не может. Время пребывания в источнике каждого требования связано с выпольнением некоторой работы. Объемы работ, соотвествующие различным требованиям, предположим случайными величинами с общей функцией распределения $F_i(x)$ с плотностью $f_i(x)$ для i-го источника требований, $i=\overline{1,n}$. Время обслуживания каждого требования тоже интерпретируется как

объем работы. Предположим, что объемы работ для всех требований являются показательно распределенными с параметром μ случайными величинами.
Все случайные величины будем считать независимыми.
Обозначим через $a(k)$, $b(k)$ интенсивность (скорость) выполнения работ в источнике и на обслуживании, соответственно, при условии находящихся k требований в источнике. Обслуживание требований происходит по дисциплине FIFO (First In, First Out - первым пришел, первым обслужен) или SIRO (Service In Random Order - случайный выбор требования из очереди на обслуживание).

В работе [83] рассмотрена система G/M/r с единичными скоростями. Показано что стационарное распределение вероятностей состояний ситемы совпадает с соответствующим распределением классической системы M/M/r. Основной целью настоящей главы является обобщение этих результатов на случай разнотипных требований и получение основные характеристики системы в стационарном режиме.

§ 1.1. Система $\vec{G}$/M/r/FIFO

Введем обозначения:

$\nu(t)$ - число требований, находящихся в источнике в момент времени t;

$\alpha_1(t),\dots,\alpha_{\nu(t)}(t)$ - их индексы в лексикографическом порядке;

$\xi_{\alpha_1(t)},\dots,\xi_{\alpha_{\nu(t)}(t)}$ - обьемы работ, выполненных к моменту времени t для требований, находящихся в этот момент в источнике;

$\beta_1(t),\dots,\beta_{n-\nu(t)}$ – индексы требований, находящихся в центре обслуживания в порядке их поступления.

Нетрудно видеть, что процесс

$$\underline{X}(t)=[\ \nu(t);\ \alpha_s(t);\ \xi_{\alpha_s}(t);\ \beta_j(t):\ s=\overline{1,\nu(t)},\ j=\overline{1,n-\nu(t)}\ ] \quad (1)$$

принадлежит классу кусочно-линейных марковских процессов [см. 30, 48]. Множеством состояний процесса (1) является

$$\{(k;i_1,\dots,i_k;x_1,\dots,x_k;j_1,\dots,j_{n-k}),\ x_i>0,\ i=\overline{1,k},$$
$$(i_1,\dots,i_k)\in C_n^k,\ (j_1,\dots,j_{n-k})\in V_n^{n-k}\ ,\ k=\overline{0,n}\ \}$$

где

$(k;i_1,\dots,i_k;x_1,\dots,x_k;j_1,\dots,j_{n-k})$ –

$(\nu(t)=k;\ \alpha_s(t)=i_s;\ \xi_{i_s}\le x_s;\ \beta_q(t)=j_q;\ x_s>0,\ s=\overline{1,k},\ q=\overline{1,n-k});$

$(0;j_1,\dots,j_n)$ – $(\nu(t)=0;\ \beta_s(t)=j_s,\ s=\overline{1,n});$

$(n;1,\dots,n;x_1,\dots,x_n;0)$ – $(\nu(t)=n;\ \alpha_s(t)=s\ ;\ \xi_s\le x_s,\ s=\overline{1,n});$

C_n^k – множество всех k-элементных сочетаний из элементов $1,\dots,n$;

V_n^k – множество всех k-элементных размещений из элементов $1,\dots,n$.

Обозначим через

$$Q_{0:j_1,\dots,j_n} = \lim_{t\to\infty} P(\nu(t)=0;\ \beta_1(t)=j_1,\dots,\beta_n(t)=j_n),$$

$$Q_{i_1,\dots,i_k:j_1,\dots,j_{n-k}}(x_1,\dots,x_k)= \quad (2)$$
$$\lim_{t\to\infty} P(\nu(t)=k;\ \alpha_s(t)=i_s;\ \xi_{i_s}\le x_s;\ \beta_q(t)=j_q;\ s=\overline{1,k},\ q=\overline{1,n-k})$$

стационарное распределение процесса $\underline{X}(t)$, $t\geq 0$, которое существует и единственно при условиях $a(k+1)>0$, $b(k)>0$, $k=\overline{1,n-1}$, $0<\mu<\infty$, $1/\lambda_i=\int_0^\infty xf_i(x)dx<\infty$, $i=\overline{1,n}$, [см. 30, 48, 118].

Далее,

$$q_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_k)dx_1\ldots dx_k=$$

$$\lim_{t\to\infty} P(\nu(t)=k;\ \alpha_s(t)=i_s;x_s\leq\xi_{i_s}<x_s+dx_s;\beta_q(t)=j_q;s=\overline{1,k},q=\overline{1,n-k});$$

[см. 30, 48]. Пусть, наконец

$$q^*_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_k)= \tag{3}$$

$$q_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_k)/(1-F_{i_1}(x_1))\ldots(1-F_{i_k}(x_k)).$$

Справедлива следующая

Теорема 1.1.1. Функция (3) удовлетворяют следующей системе интегро-дифференциальных уравнений (4.1),(4.2),(5.1),(5.2) с граничными условиями (4.3),(5.3)

$$r\mu(0)Q_{0:j_1,\ldots,j_n}=\int_0^\infty a(1)q^*_{j_n;j_1,\ldots,j_{n-1}}(y)f_{j_n}(y)dy, \tag{4.1}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_k}\right]^* q^*_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_k)=$$

$$-r\mu(k)\,q^*_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_k)+ \tag{4.2}$$

$$+\int_0^\infty a(k+1)q^*_{i'_1,\ldots,j'_{n-k},\ldots,i'_k;j_1,\ldots,j_{n-k-1}}(x'_1,\ldots,y',\ldots,x'_k)f_{j_{n-k}}(y')dy',$$

$$q^*_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_{s-1},0,x_{s+1},\ldots,x_k)a(k)=$$

$$\mu(k-1)\sum_{\substack{i_s\\ V_{j_1,\ldots,j_r}}} q^*_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},i_k;j_1,\ldots,i_s,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_{s-1},x_{s+1},\ldots,x_k)$$

$$s=\overline{1,k},\quad k=\overline{1,n-r}, \tag{4.3}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_k}\right]^* q^*_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_k)=$$

$$-(n-k)\mu(k)\ q^*_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_k)\ + \tag{5.1}$$

$$+\int_0^\infty a(k+1)q^*_{i'_1,\ldots,j'_{n-k},\ldots,i'_k;j_1,\ldots,j_{n-k-1}}(x'_1,\ldots,y',\ldots,x'_k)f_{j_{n-k}}(y')dy',$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^* q^*_{1,\ldots,n;0}(x_1,\ldots,x_n)=0, \tag{5.2}$$

$$q^*_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_{s-1},0,x_{s+1},\ldots,x_k)a(k)=$$

$$\mu(k-1)\sum_{\substack{i_s\\ V_{j_1,\ldots,j_{n-k}}}} q^*_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},i_k;j_1,\ldots,i_s,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_{s-1},x_{s+1},\ldots,x_k)$$

$$s=\overline{1,k},\quad k=\overline{n-r+1,n}, \tag{5.3}$$

с условием нормировки

$$\sum_{k=0}^{n}\ \sum_{C_n^k,V_n^{n-k}}\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty q^*_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_k)\ \times$$

$$\times\ (1-F_{i_1}(x_1))\ldots(1-F_{i_k}(x_k))dx_1\ldots dx_k\ =\ 1. \tag{6}$$

В левой части уравнений $[\ ]^*$ обозначает производную по направлению $(a(k),\dots,a(k))\in R_k$. Далее,

$$V^{i_q}_{j_1,\dots,j_s}=\{(i_q,j_2,\dots,j_s),(j_1,i_q,\dots,j_s),\dots,(j_1,\dots,j_{s-1},i_q)\},$$

$\mu(k)=\mu b(k)$, $(i'_1,\dots,j'_{n-k},\dots,i'_k)$ – лексикографический порядок индексов $(i_1,\dots,j_{n-k},\dots,i_k)$, $(x'_1,\dots,y',\dots,x'_k)$ – соответствующие обьемы работ.

Доказательство. Метод доказательства основан на результатах работ [30, 88]. Поскольку $\underline{X}(t)$, $t\ge 0$ является кусочно-линейным марковским процессом, то справедливо

$$Q_{0:j_1,\dots,j_n}=Q_{0:j_1,\dots,j_n}[1-r\mu(0)h]+$$

$$+\int_0^\infty q_{j_n;j_1,\dots,j_{n-1}}(y)(a(1)f_{j_n}(y)h/(1-F_{j_n}(y)))dy+o(h), \quad (7.1)$$

$$q_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}}(x_1+a(k)h,\dots,x_k+a(k)h)=$$

$$q_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_{n-k}}(x_1,\dots,x_k)(1-r\mu(k)h)\prod_{s=1}^{k}\frac{1-F_{i_s}(x_s+a(k)h)}{1-F_{i_s}(x_s)}+$$

$$\prod_{s=1}^{k}\frac{1-F_{i_s}(x_s+a(k)h)}{1-F_{i_s}(x_s)}\int_0^\infty q_{i'_1,\dots,j'_{n-k},\dots,i'_k;j_1,\dots,j_{n-k-1}}(x'_1,\dots,y',\dots,x'_k)\times$$

$$\times\frac{a(k+1)f_{j_{n-k}}(y')hdy'}{1-F_{j_{n-k}}(y')}+o(h), \quad (7.2)$$

$$q_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1+a(k)h,\ldots,x_{s-1}+a(k)h,0,x_{s+1}+a(k)h,\ldots,x_k+a(k)h)a(k)h=$$

$$\mu(k-1)h\sum_{i_s \vee j_1,\ldots,j_r} q_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_k;j_1,\ldots,i_s,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_{s-1},x_{s+1},\ldots,x_k)\times$$

$$\times\prod_{q=1,q\neq s}^{k}\frac{1-F_{i_q}(x_s+a(k)h)}{1-F_{i_q}(x_s)}+o(h), \qquad (7.3)$$

$$s=\overline{1,k},\quad k=\overline{1,n-r}.$$

Подобным же образом

$$q_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1+a(k)h,\ldots,x_k+a(k)h)=$$

$$q_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_{n-k}}(x_1,\ldots,x_k)(1-(n-k)\mu(k)h)\prod_{s=1}^{k}\frac{1-F_{i_s}(x_s+a(k)h)}{1-F_{i_s}(x_s)}+$$

$$+\prod_{s=1}^{k}\frac{1-F_{i_s}(x_s+a(k)h)}{1-F_{i_s}(x_s)}\int_0^{\infty}q_{i_1',\ldots,j_{n-k}',\ldots,i_k';j_1,\ldots,j_{n-k-1}}(x_1',\ldots,y',\ldots,x_k')\times$$

$$\times\frac{a(k+1)f_{j_{n-k}}(y')hdy'}{1-F_{j_{n-k}}(y')}+o(h), \qquad (8.1)$$

$$q_{1,\ldots,n;0}(x_1+a(n)h,\ldots,x_n+a(n)h)=$$

$$\prod_{s=1}^{n}\frac{1-F_{i_s}(x_s+a(k)h)}{1-F_{i_s}(x_s)}q_{1,\ldots,n;0}(x_1,\ldots,x_n)+o(h), \qquad (8.2)$$

$$q_{i_1,..,i_k;j_1,..,j_{n-k}}(x_1+a(k)h,..,x_{s-1}+a(k)h,0,x_{s+1}+a(k)h,..,x_k+a(k)h)a(k)h=$$

$$\mu(k-1)h\sum_{\substack{i_s\\ V_{j_1,...,j_{nk}}}} q_{i_1,..,i_{s-1},i_{s+1},..,i_k;j_1,..,i_s,..,j_{n-k}}(x_1,...,x_{s-1},x_{s+1},...,x_k)\ \times$$

$$\times\prod_{q=1,q\neq s}^{k}\frac{1-F_{i_q}(x_s+a(k)h)}{1-F_{i_q}(x_s)}+o(h), \qquad (8.3)$$

$$s=\overline{1,k},\quad k=\overline{n-r+1,n}.$$

После деления обеих частей (7.2), (7.3), (8.1)-(8.3) на $\prod_{s=1}^{k}(1-F_{i_s}(x_s+a(k)h))$ и перегруппировки слагаемых, при $h\to 0$ получим (4.1)-(4.3), (5.1)-(5.3). Теорема доказана.

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что решением этой системы служат функции

$$Q_{0:j_1,...,j_n}=c(0),\qquad q^{*}_{i_1,...,i_k;j_1,...,j_{n-k}}(x_1,...,x_k)=c(k),$$

$$(i_1,...,i_k)\in C_n^k,\ (j_1,...,j_{n-k})\in V_n^{n-k},\ x_s>0,\ s=\overline{1,k},\ k=\overline{1,n},$$

где

$$c(k)=\frac{a(k+1)...a(n+k)}{\mu(k)...\mu(n+k-1)}\,\frac{1}{r!r^{n-r-k}}\,c(n),\quad k=\overline{0,n-r}, \qquad (9.1)$$

$$c(k)=\frac{a(k+1)...a(n+k)}{\mu(k)...\mu(n+k-1)}\,\frac{1}{(n-k)!}\,c(n),\quad k=\overline{n-r+1,n}, \qquad (9.2)$$

$\mu(m)=a(m+1)=1$, при $m>n$.

Обозначим

$$Q(0)=\lim_{t\to\infty} P(\nu(t)=0),\quad Q(i_1,\dots,i_k)=\lim_{t\to\infty} P(\nu(t)=k;\alpha_s(t)=i_s,s=\overline{1,k}).$$

Тогда в силу (3), (9.1) и (9.2) получим

$$Q(0)=\frac{a(1)\dots a(n)}{\mu(0)\dots\mu(n-1)}\,\frac{n!}{r!r^{n-r}}\,c(n), \tag{10.1}$$

$$Q(i_1,\dots,i_k)=\frac{a(k+1)\dots a(n+k)}{\mu(k)\dots\mu(n+k-1)}\,\frac{(n-k)!}{r!r^{n-r-k}}\,\frac{1}{\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_k}}\,c(n), \tag{10.2}$$

$$k=\overline{1,n-r},$$

$$Q(i_1,\dots,i_k)=\frac{a(k+1)\dots a(n+k)}{\mu(k)\dots\mu(n+k-1)}\,\frac{1}{\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_k}}\,c(n), \tag{10.3}$$

$$k=\overline{n-r+1,n}.$$

Обозначим также

$$\hat{Q}_k=\lim_{t\to\infty} P(\nu(t)=k),\quad \hat{P}_k=\lim_{t\to\infty} P(\nu(t)=n-k),\quad k=\overline{0,n}.$$

Тогда легко видеть, что

$$\hat{Q}_n=Q(1,\dots,n),\quad \hat{Q}_0=Q(0),\quad \hat{P}_k=\hat{Q}_{n-k},$$

$$\hat{Q}_k=\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in C_n^k} Q(i_1,\dots,i_k),\quad k=\overline{1,n}.$$

Так как

$$c(n)=\lambda_1\dots\lambda_n\hat{Q}_n,\ \text{то}$$

постоянная $\hat{Q}_n$ определяется условием нормировки (6).

Следствие 1. В частности, при $a(k+1)=b(k)=1$, $k=\overline{0,n-1}$, (10.1)-(10.3) дают

$$Q(o)=\frac{n!}{\mu^n r!r^{n-r}}\,c(n),$$

$$Q(i_1,\dots,i_k)=\begin{cases}\dfrac{(n-k)!}{\mu^{n-k}r!r^{n-r-k}}\,\dfrac{1}{\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_k}}\,c(n), & k=\overline{1,n-r},\\[2ex] \dfrac{1}{\mu^{n-k}}\,\dfrac{1}{\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_k}}\,c(n), & k=\overline{n-r+1,n},\end{cases} \qquad (11)$$

которое было получено в [132, 133].

Следствие 2. В случае $\lambda_s=\lambda$, $s=\overline{1,n}$ из (11) следует

$$\hat{P}_k=\begin{cases}\binom{n}{k}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k\hat{P}_o, & k=\overline{1,r},\\[2ex] \dfrac{1}{(n-k)!r!r^{k-r}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k\hat{P}_o, & k=\overline{r+1,n},\end{cases}$$

которое совпадает с результатом [83].

Следствие 3. При $r=1$, $a(k)=1$, $k=\overline{1,n}$ из (10.1)-(10.3) вытекает

$$\hat{Q}_k=(n-k)!S_k\Big/\sum_{j=0}^{k}(n-j)!S_j\ ,\quad k=\overline{0,n},$$

где

$$S_o=1,\quad S_j=\mu(o)\dots\mu(j-1)\sum_{(i_1,\dots,i_k)\in C_n^k}\frac{1}{\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_k}}\ ,\quad j=\overline{1,n},$$

которое находится в [135].

Основные стационарные характеристики

(i) Средние значения.

Введем обозначения:

$\bar{n}$ – среднее число требований, находящихся в источнике,

$\bar{r}$ – среднее число занятых обслуживающих приборов,

$\bar{q}$ – средная длина очереди.

Имеют место следующие формулы

$$\bar{n} = \sum_{k=1}^{n} k\hat{Q}_k, \qquad \bar{r} = \sum_{k=1}^{r} k\hat{P}_k + r\sum_{k=r+1}^{n} \hat{P}_k, \qquad \bar{q} = \sum_{k=r+1}^{n} (k-r)\hat{P}_k.$$

(ii) Производительность станков.

В случае обслуживания станков важным показателем является производительность i-го станка U_i – доля времени, на протяжении которого i-й станок находится в рабочем состоянии. Известно, что

$$U_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varkappa(i\in(\alpha_1(t),\ldots,\alpha_{\nu(t)}(t)),\ \nu(t)>0)dt =$$

$$Q^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i\in(i_1,\ldots,i_k)\in C_n^k} Q(i_1,\ldots,i_k),$$

вероятность того, что i-е требование находится в источнике [см. 51, 78, 100, 126].

Далее, ясно что $\bar{n} = \sum_{i=1}^{n} Q^{(i)}$.

(iii) Эффективность эксплуатации обслуживающих приборов.

Обозночим через U_o эффективность обслуживающего прибора - долю времени, на протяжении которого данный прибор занят. Так как обслуживающие приборы однотипны нетрудно видеть что

$$U_o=\bar{r}/r.$$

(iv) Средная длительность интервала занятости.

Обозначим через $M\delta$ интервал времени, на протяжении которого хотя бы один прибор занят обслуживанием. В общем случае определить $M\delta$ сложно. Однако в случае $\vec{M}/M/r$ имеет место

$$M\delta=(1-\hat{Q}_n)/(\hat{Q}_n a(0)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i).$$

(v) Среднее время пребывания требований в центре обслуживания.

Эта характеристика является важным показателем для вычислительной техники (среднее время реакции системы). В случае $\vec{M}/M/r$ в силу теоремы Литтла получим

$$R_i=(1-Q^{(i)})/(\lambda_i\sum_{k=1}^{n}Q_k^{(i)}a(k)),\quad i=\overline{1,n},$$

где

$$Q_k^{(i)}=\sum_{i\in(i_1,\dots,i_k)\in C_n^k}Q(i_1,\dots,i_k).$$

В общем случае при $a(k)=1$, $k=\overline{1,n}$, с учетом [126] имеет место

$$Q^{(i)}=(1/\lambda_i)/(1/\lambda_i+R_i).$$

Отсюда

$$R_i=(1-Q^{(i)})/(\lambda_i Q^{(i)}), \quad i=\overline{1,n}.$$

При $b(k)=1$, $k=\overline{0,n-1}$, среднее время ожидания i-го требования начала обслуживания W_i, имеет вид

$$W_i=R_i-1/\mu.$$

Результаты настоящего параграфа опубликованы в [132, 133, 135, 139].

Заметим что обобщить полученные резулчтаты на случай $\vec{G}/\vec{M}/r/FIFO$ очень сложно, ведь стационарное распределение вероятностей системы $\vec{M}/\vec{M}/1/FIFO$ получено только с помощью рекуррентных соотношений [см. 90].

§ 1.2. Система $\vec{G}/M/r/SIRO$

Введем обозначения:

$\nu(t)$ – число требований, находящихся в источнике в момент времени t;

$\alpha_1(t),\dots,\alpha_{\nu(t)}(t)$ – их индексы в лексикографическом порядке

$\xi_{\alpha_1}(t),\dots,\xi_{\alpha_{\nu(t)}}(t)$ – обьемы работ, выполненных к моменту времени t для требований, находящихся в этот момент в источнике;

$\beta_1(t),\dots,\beta_r$ – индексы требований, находящихся на обслуживании, при $\nu(t)<n-r$.

Нетрудно видеть, что процесс

$$\underline{X}(t)=[\ \nu(t);\ \alpha_s(t);\ \xi_{\alpha_s(t)};\ \beta_j(t):\ s=\overline{1,\nu(t)},j=\overline{1,r}\ ] \qquad (1)$$

принадлежит классу кусочно-линейных марковских процессов [см. 30, 48]. Множеством состояний (1) является

$$\{(k;i_1,\ldots,i_k;x_1,\ldots,x_k;j_1,\ldots,j_r\ ),\ x_i>0,\ i=\overline{1,k},$$
$$(i_1,\ldots,i_k)\in C_n^k,\ (j_1,\ldots,j_r)\in C_n^r,\ k=\overline{1,n-r-1},$$
$$(k;i_1,\ldots,i_k;x_1,\ldots,x_k),\ x_i>0,\ i=\overline{1,k},$$
$$(i_1,\ldots,i_k)\in C_n^k,\ k=\overline{n-r,n},$$
$$(0;j_1,\ldots,j_r)\}$$

где

$(k;i_1,\ldots,i_k;x_1,\ldots,x_k;j_1,\ldots,j_r)$ -

$(\nu(t)=k;\ \alpha_s(t)=i_s;\ \xi_{i_s}\le x_s;\ \beta_q(t)=j_q;\ x_s>0,\ s=\overline{1,k},\ q=\overline{1,n-r-1});$

$(k;i_1,\ldots,i_k;x_1,\ldots,x_k)$ -

$(\nu(t)=k;\ \alpha_s(t)=i_s;\ \xi_{i_s}\le x_s;\ x_s>0,\ s=\overline{1,k},\ q=\overline{n-r,n});$

$(0;j_1,\ldots,j_r)$ - $(\nu(t)=0;\ \beta_s(t)=j_s,\ s=\overline{1,r});$

C_n^k - множество всех k-элементных сочетаний из элементов $1,\ldots,n$;

Обозначим через

$$Q_{0:j_1,\ldots,j_r}=\lim_{t\to\infty}P(\nu(t)=0;\ \beta_1(t)=j_1,\ldots,\beta_r(t)=j_r),$$

$$Q_{i_1,\ldots,i_k:j_1,\ldots,j_r}(x_1,\ldots,x_k)=$$
$$\lim_{t\to\infty}P(\nu(t)=k;\ \alpha_s(t)=i_s;\ \xi_{i_s}\le x_s;\ \beta_q(t)=j_q;\ s=\overline{1,k},\ q=\overline{1,r});$$

$$k=\overline{1,n-r-1}, \qquad (2)$$

$$Q_{i_1,\ldots,i_k}(x_1,\ldots,x_k)=$$

$$\lim_{t\to\infty} P(\nu(t)=k;\ \alpha_s(t)=i_s;\ \xi_{i_s}\le x_s;\quad s=\overline{1,k}\ ),\ k=\overline{n-r,n}$$

стационарное распределение процесса $\underline{X}(t)$, $t\ge 0$, которое существует и единственно при условиях $a(k+1)>0$, $b(k)>0$, $k=\overline{1,n-1}$, $0<\mu<\infty$, $1/\lambda_i=\int_0^\infty xf_i(x)dx<\infty$, $i=\overline{1,n}$, [см. 30, 48, 118].

Далее,

$$q_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_r}(x_1,\ldots,x_k)dx_1\ldots dx_k=$$

$$\lim_{t\to\infty} P(\nu(t)=k;\ \alpha_s(t)=i_s;x_s\le\xi_{i_s}<x_s+dx_s;\beta_q(t)=j_q;s=\overline{1,k},q=\overline{1,r});$$

$$k=\overline{1,n-r-1},$$

$$q_{i_1,\ldots,i_k}(x_1,\ldots,x_k)dx_1\ldots dx_k=$$

$$\lim_{t\to\infty} P(\nu(t)=k;\ \alpha_s(t)=i_s;x_s\le\xi_{i_s}<x_s+dx_s;s=\overline{1,k});\ k=\overline{n-r,n},$$

[см. 30, 48]. Пусть, наконец

$$q^*_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_r}(x_1,\ldots,x_k)=$$

$$q_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_r}(x_1,\ldots,x_k)/(1-F_{i_1}(x_1))\ldots(1-F_{i_k}(x_k)),$$

$$q^*_{i_1,\ldots,i_k}(x_1,\ldots,x_k)= \tag{3}$$

$$q_{i_1,\ldots,i_k}(x_1,\ldots,x_k)/(1-F_{i_1}(x_1))\ldots(1-F_{i_k}(x_k)).$$

Справедлива следующая

Теорема 1.2.1. Функция (3) удовлетворяют следующей системе интегро-дифференциальных уравнений (4.1),(4.2),(5.1),(5.2) с граничными условиями (4.3),(5.3)

$$r\mu(0)Q_{0:j_1,\dots,j_r} = \sum_{s\neq j_1,\dots,j_r} \int_0^\infty a(1)q^*_{s;j_1,\dots,j_r}(y)f_s(y)dy, \quad (4.1)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+\frac{\partial}{\partial x_k}\right]^* q^*_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_r}(x_1,\dots,x_k) =$$

$$-r\mu(k)\; q^*_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_r}(x_1,\dots,x_k) + \quad (4.2)$$

$$\sum_{s\neq i_1,\dots,i_k,j_1,\dots,j_r} \int_0^\infty a(k+1)q^*_{i_1',\dots,s',\dots,i_k';j_1,\dots,j_r}(x_1',\dots,y',\dots,x_k')f_s(y')dy',$$

$$q^*_{i_1,\dots,i_k;j_1,\dots,j_r}(x_1,\dots,x_{s-1},0,x_{s+1},\dots,x_k)a(k) =$$

$$\frac{\mu(k-1)}{n-k-r-1}\sum_{i_s \in C_{j_1,\dots,j_r}} q^*_{i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},i_k;\dots,i_s,\dots}(x_1,\dots,x_{s-1},x_{s+1},\dots,x_k),$$

$$s=\overline{1,k},\quad k=\overline{1,n-r-1}, \quad (4.3)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}+\dots+\frac{\partial}{\partial x_k}\right]^* q^*_{i_1,\dots,i_k}(x_1,\dots,x_k) =$$

$$-(n-k)\mu(k)\; q^*_{i_1,\dots,i_k}(x_1,\dots,x_k) + \quad (5.1)$$

$$+\sum_{s\neq i_1,\dots,i_k} \int_0^\infty a(k+1)q^*_{i_1',\dots,s',\dots,i_k'}(x_1',\dots,y',\dots,x_k')f_s(y')dy',$$

$$[\frac{\partial}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_n}]^* q^*_{1,\ldots,n}(x_1,\ldots,x_n)=0, \qquad (5.2)$$

$$q^*_{i_1,\ldots,i_k}(x_1,\ldots,x_{s-1},0,x_{s+1},\ldots,x_k)a(k)=$$

$$\mu(k-1) \qquad q^*_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},i_k}(x_1,\ldots,x_{s-1},x_{s+1},\ldots,x_k),$$

$$s=\overline{1,k}, \quad k=\overline{n-r,n}, \qquad (5.3)$$

с условием нормировки

$$\sum_{k=0}^{n-r-1}\sum_{C_n^k,C_n^r}\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty q^*_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_r}(x_1,\ldots,x_k)\times$$

$$\times(1-F_{i_1}(x_1))\ldots(1-F_{i_k}(x_k))dx_1\ldots dx_k + \qquad (6)$$

$$+\sum_{k=n-r}^{n}\sum_{C_n^k}\int_0^\infty\ldots\int_0^\infty q^*_{i_1,\ldots,i_k}(x_1,\ldots,x_k)(1-F_{i_1}(x_1))\ldots(1-F_{i_k}(x_k))dx_1\ldots dx_k=1$$

где

$$C^{i_q}_{j_1,\ldots,j_s}=\{(i'_q,j'_2,\ldots,j'_s),(j'_1,i'_q,\ldots,j'_s),\ldots,(j'_1,\ldots,j'_{s-1},i'_q)\},$$

$\mu(k)=\mu b(k)$, $(i'_1,\ldots,s',\ldots,i'_k)$ – лексикографический порядок индексов $(i_1,\ldots,s,\ldots,i_k)$, $(x'_1,\ldots,y',\ldots,x'_k)$ – соответствующие обьемы работ.

Доказательство. проводится аналогично теорему 1.1.1.

Непосредственной подстановкой можно убедиться в том, что решением этой системы служат функции

$$Q_{0:j_1,\ldots,j_r}=c(0), \qquad q^*_{i_1,\ldots,i_k;j_1,\ldots,j_r}(x_1,\ldots,x_k)=c(k),$$

$$k=\overline{1,n-r-1},$$

$$q^{*}_{i_1,\dots,i_k}(x_1,\dots,x_k)=c(k),\qquad k=\overline{n-r,n},$$

$$(i_1,\dots,i_k)\in C_n^k,\ (j_1,\dots,j_r)\in C_n^r\ ,\ x_s>0,\ s=\overline{1,k},\ k=\overline{1,n},$$

где

$$c(k)=\frac{a(k+1)\dots a(n+k)}{\mu(k)\dots\mu(n+k-1)}\,\frac{(n-k-r)!}{r!r^{n-r-k}}\,c(n),\quad k=\overline{0,n-r},\tag{7.1}$$

$$c(k)=\frac{a(k+1)\dots a(n+k)}{\mu(k)\dots\mu(n+k-1)}\,c(n),\quad k=\overline{n-r+1,n},\tag{7.2}$$

$\mu(m)=a(m+1)=1$, при $m>n$.

Обозначим

$$Q(0)=\lim_{t\to\infty}P(\nu(t)=0),\ Q(i_1,\dots,i_k)=\lim_{t\to\infty}P(\nu(t)=k;\alpha_s(t)=i_s,s=\overline{1,k}).$$

Тогда в силу (3), (7.1) и (7.2) получим

$$Q(0)=\frac{a(1)\dots a(n)}{\mu(0)\dots\mu(n-1)}\,\frac{n!}{r!r^{n-r}}\,c(n),\tag{8.1}$$

$$Q(i_1,\dots,i_k)=\frac{a(k+1)\dots a(n+k)}{\mu(k)\dots\mu(n+k-1)}\,\frac{(n-k)!}{r!r^{n-r-k}}\,\frac{1}{\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_k}}\,c(n),\tag{8.2}$$

$$k=\overline{1,n-r},$$

$$Q(i_1,\dots,i_k)=\frac{a(k+1)\dots a(n+k)}{\mu(k)\dots\mu(n+k-1)}\,\frac{1}{\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_k}}\,c(n),\tag{8.3}$$

$$k=\overline{n-r+1,n}.$$

Обозначим также

$$\hat{Q}_k = \lim_{t\to\infty} P(\nu(t)=k), \quad k=\overline{0,n}.$$

Тогда легко видеть, что

$$\hat{Q}_n = Q(1,\dots,n), \quad \hat{Q}_0 = Q(0),$$

$$\hat{Q}_k = \sum_{(i_1,\dots,i_k)\in C_n^k} Q(i_1,\dots,i_k), \quad k=\overline{1,n}.$$

Так как

$$c(n)=\lambda_1\dots\lambda_n\hat{Q}_n, \text{ то}$$

постоянная $\hat{Q}_n$ определяется условием нормировки (6).

Заметим что формулы (8.1)-(8.3) совпадают с формулами (10.1)-(10.3) предыдущего параграфа. Так как стационарное распределение вероятностей состояний систем $\vec{G}/M/r/FIFO$ и $\vec{G}/M/r/SIRO$ совподают, то и все соответствующие стационарные характеристики одинаковы.

Следствие 1. В частности, при $a(k+1)=b(k)=1$, $r=1$, $k=\overline{0,n-1}$, (8.1)-(8.3) дают

$$Q(o)=\frac{n!}{\mu^n}c(n), \qquad k=0,$$

$$Q(i_1,\dots,i_k)=\frac{(n-k)!}{\mu^{n-k}}\frac{1}{\lambda_{i_1}\dots\lambda_{i_k}}c(n), \qquad k=\overline{1,n},$$

которое было получено в [138].

Результаты настоящего параграфа опубликованы в [138, 140].

Глава 2

ЧИСЛЕННЫЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С РАЗНОТИПНЫМИ ТРЕБОВАНИЯМИ

В связи с быстрым развитием современной вычислительной техники все более важную роль играют вычислительные методы при решении задач массового обслуживания [см. 15, 16, 36, 78, 89, 90, 91, 97, 98, 100, 101, 107, 111, 124, 127].
В настоящей главе рассматриваются СМО с разнотипными источниками требований. Приводятся эффективные вычислительные алгоритмы для расчета стационарных вероятностей состояний систем и формулы для вычисления их основных характеристик.

§ 2.1. Система $\vec{M}/\vec{M}/1/PPS$

Исследуямая система тесно связана с вычислительной техникой , так как дисциплина обслуживания требований характерна для мултипрограммных и терминальных систем [см. 13, 42].

Рассмотрим вычислительную систему оперативной обработки информации с диалоговым режимом работы. Система содержит n терминалов, за каждым из которых работает пользователь, формирующий запросы на обслуживание заявки. Обслуживание запросов выполняется одним центральным процессором (ЦП). Формирование нового запроса пользователь начинает лищь после получения ответа на предыдущий запрос. Время, затраченное i-м пользователем на создание нового запроса, является случайной величиной, распределенной по показательному закону с параметром λ_i, $i=\overline{1,n}$. В дальнейшем предположим, что время обслуживания запросов i-го пользователя распределено по показательному закону с параметром μ_i, $i=\overline{1,n}$.

Все случайные величины будем считать независимыми.

ЦП обслуживает запросы по следующему алгоритму. Вновь поступающие запросы становятся в единственную очередь, продвигаются к ее началу в порядке поступления и, наконец, получают квант обслуживания. Когда этот квант истекает и необходимо дальнейшее обслуживание, требование возвращается в хвост той же очереди и повторяет цикл. Предположим, что квант для запросов i-го пользователя равен r_iQ, $i=\overline{1,n}$, где r_i называется весовым коэффициентом. При $Q\to 0$ получается модель приоритетного разделения процессора (Priority Processor Sharing - PPS) для системы коллективного пользования. Это понятие впервые было введено в [106].

Задача состоит в том, чтобы найти основные стационарные характеристики системы.

Введем следующие обозначения:

$\nu(t)$ - число заявок, находящихся в процессоре в момент времени t;

$\alpha_1(t),\dots,\alpha_{\nu(t)}(t)$ - их индексы в лексикографическом порядке.

Легко видеть, что

$$\underline{X}(t)=(\ \nu(t);\ \alpha_1(t),\dots,\alpha_{\nu(t)}(t)\ )$$

является марковским процессом с множеством состояний

$$\left((k;i_1,\dots,i_k),\ (i_1,\dots,i_k)\in C_n^k,\ k=\overline{0,n},\ \right)$$

где

$(k;i_1,\dots,i_k)$ – $(\nu(t)=k;\ \alpha_1(t)=i_1,\dots,\alpha_k(t)=i_k)$,

$(\ 0\ )$ – $(\nu(t)=0)$, т.е. процессор свободен.

Обозначим через

$$\Lambda_{i_1,\dots,i_k}=\sum_{j\neq i_1,\dots,i_k}\lambda_j\ ,\quad \Lambda=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\ ,\quad R_{i_1,\dots,i_k}=\sum_{j=1}^{k}r_{i_j}\ ,$$

$$\sigma_{i_1,\dots,i_k}=\frac{1}{R_{i_1,\dots,i_k}}\sum_{s=1}^{k}r_{i_s}\mu_{i_s}+\Lambda_{i_1,\dots,i_k}\ ,$$

$$p(0)=\lim_{t\to\infty}P\,(\nu(t)=0),$$

$$p(i_1,\dots,i_k)=\lim_{t\to\infty}P(\nu(t)=k;\ \alpha_1(t)=i_1,\dots,\alpha_k(t)=i_k), \qquad (1)$$

$$(i_1,\dots,i_k)\in C_n^k,\ k=\overline{1,n}.$$

Справедлива следующая

Теорема 2.1.1. Если $\lambda_i>0$, $\mu_i>0$, $r_i>0$, $i=\overline{1,n}$, то $\underline{X}(t)$, $t\geq 0$ обладает единственным эргодическим (стационарным) распределением (1), которое удовлетворит системе линейных уравнений

$$\Lambda p(0)=\sum_{j=1}^{n}\mu_j p(j),$$

$$\sigma_{i_1,\dots,i_k}p(i_1,\dots,i_k)=\sum_{s=1}^{k}\lambda_{i_s}p(i_1,\dots,i_{s-1},i_{s+1},\dots,i_k)\ +$$

$$+\sum_{j\neq i_1,\dots,i_k}\frac{\mu_j r_j}{R_{i_1,\dots,i_k}}\,p(i'_1,\dots,i'_{k+1}), \qquad (2)$$

$$\sigma_{1,\dots,n}p(1,\dots,n)=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s p(1,\dots,s-1,s+1,\dots,n),$$

дополненной условием нормировки

$$p(0) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in C_n^k} p(i_1,\ldots,i_k)=1. \qquad (3)$$

Доказательство. Ясно, что $\underline{X}(t)$, $t\geq 0$ является эргодическим марковским процессом. Утверждение непосредственно вытекает из уравнения Колмогорова.

В случае $r_i=r$, $i=\overline{1,n}$ (разделение процессора) решением (2),(3) служит

$$p(i_1,\ldots,i_k)=p(0)k!\prod_{j=1}^{k}\lambda_{i_j}/\mu_{i_j}$$

[см. 73, 75, 88, 90, 95].

В принципе, решить систему (2),(3) нертудно. Хотя ввиду того, что система уравнений содержит 2^n неизвестных, пришлось бы использовать вычислительные методы для решения систем линейных уравнений большой размерности [см. 89, 100, 124]. Вместо этого мы приведем здесь рекуррентные соотношения для расчета стационарных вероятностей состояний системы.

Введем обозначение

$$\underline{Y}_k = \begin{bmatrix} p(1,\ldots,k) \\ \vdots \\ p(i_1,\ldots,i_k) \\ \vdots \\ p(n-k+1,\ldots,n) \end{bmatrix}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Элементы $p(i_1,\ldots,i_k)$ вектора $\underline{Y}_k$ находятся в лексикографическом порядке по их индексам. Заметим что (2) можно записать в матричном виде

$$\underline{Y}_o = B_o \underline{Y}_1,$$

$$\underline{Y}_1 = A_1 \underline{Y}_o + B_1 \underline{Y}_2,$$

$$\vdots$$

$$\underline{Y}_k = A_k \underline{Y}_{k-1} + B_k \underline{Y}_{k+1}$$

$$\vdots$$

$$\underline{Y}_n = A_n \underline{Y}_{n-1},$$

где

матрица A_k – размерности $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k-1}$, $k=\overline{1,n}$,

матрица B_k – размерности $\binom{n}{k} \times \binom{n}{k+1}$, $k=\overline{0,n-1}$,

$\underline{Y}_o = p(0)$, вектор $\underline{Y}_k$ – размерности $\binom{n}{k}$, $k=\overline{1,n}$.

Элементы матриц A_k, B_k легко определяются с помощью (2).

Справедлива следующая

Теорема 2.1.2. Векторы $\underline{Y}_k$, $k=\overline{1,n}$ вычисляются из следующих рекуррентных соотношений

$$\underline{Y}_k = F_k \underline{Y}_{k-1}, \quad k=\overline{1,n},$$

где

$$F_n = A_n, \qquad F_k = (E - B_k F_{k+1})^{-1} A_k, \qquad k=1,\overline{n-1}.$$

Доказательство. Легко видеть, что при $k=n$, $F_n = A_n$.

Предположим, что $\underline{Y}_{k+1} = F_{k+1} \underline{Y}_k$. Тогда

$$\underline{Y}_k = A_k \underline{Y}_{k-1} + B_k F_{k+1} \underline{Y}_k,$$

отсюда

$$\underline{Y}_k = (E - B_k F_{k+1})^{-1} A_k \underline{Y}_{k-1},$$

итак,

$$F_k = (E - B_k F_{k+1})^{-1} A_k, \quad k=\overline{1,n-1}.$$

Обратные матрицы существуют, так как при фиксированном $\underline{Y}_o$ система обладает единственным решением. Тогда начиная вычисления при произвольном $\underline{Y}_o$, находим $\underline{Y}_k$, $k=\overline{1,n}$. Наконец, $\underline{Y}_o$ определяется условием нормировки (3). После деления $\underline{Y}_k$, $k=\overline{1,n}$ на $\underline{Y}_o$ получаем стационарное распределение вероятностей состояний системы. Теорема доказана.

Основные стационарные характеристики системы

(i) Эффективность процессора - доля времени в течение которого ЦП занят обслуживанием

$$U= 1-p(0)$$

(ii) Средная длительность периода занятости процессора

$$M\delta = (1-p(0))/(\Lambda p(0)).$$

(iii) Среднее время ответа процессора

$$R_i = P^{(i)}/(\lambda_i(1-P^{(i)})), \quad i=\overline{1,n},$$

где

$$P^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i\in(i_1,\ldots,i_k)} p(i_1,\ldots,i_k).$$

(iv) Среднее число заявок на обслуживание

$$\bar{n} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in C_n^k} kp(i_1,\ldots,i_k) = \sum_{i=1}^{n} P^{(i)}.$$

Численные примеры

Численные примеры, иллюстрирующие работу предыдущего алгоритма были решены в вычислительном центре Дебреценского университета на языке Pl/1. Таблицы показывают характеристики системы по дисциплинам

PR (Preemptive Priority) - абсолютный приоритет,

PS (Processor Sharing) - разделение процессора,

PPS (Priority Processor Sharing) - приоритетное разделение процессора.

Параметры: $n=3$ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.3$ $\mu_1=\mu_2=\mu_3=0.7$

	R_i	U	Mб	$\bar{n}$
PR	1.428 2.413 4.242	0.74	3.177	1.27
PS	2.450 2.450 2.450	0.74	3.177	1.27
PPS весовые коэффициенты 125 5 1	1.467 2.559 3.776	0.74	3.177	1.27
1000 10 1	1.437 2.485 3.955	0.74	3.177	1.27
125000 50 1	1.428 2.396 4.120	0.74	3.177	1.27

Таблица 1.

Параметры: $n=3$ $\lambda_1=0.5$ $\lambda_2=0.3$ $\lambda_3=0.2$

$\mu_1=0.9$ $\mu_2=0.7$ $\mu_3=0.5$

PR	1.125 2.619 6.363	0.16	3.345	1.34
PS	1.885 2.526 3.574	0.76	3.213	1.33
PPS				
1 1 2	2.056 2.745 2.990	0.75	3.152	1.33

Таблица 2.

Параметры: $n=3$ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.2$

$\mu_1=0.4$ $\mu_2=0.6$ $\mu_3=0.8$

PPS				
1 5 125	4.831 2.498 1.277	0.675	3.472	1.453
1 10 100	4.965 2.407 1.250	0.675	3.427	1.024
1 100 1000000	5.100 2.304 1.250	0.675	3.427	1.020

Таблица 3.

Параметры: $n=6$ $\lambda_1=1$ $\lambda_2=2$ $\lambda_3=3$ $\lambda_4=4$ $\lambda_5=5$ $\lambda_6=6$

$\mu_1=6$ $\mu_2=5$ $\mu_3=4$ $\mu_4=3$ $\mu_5=2$ $\mu_6=1$

PPS				
1	3.008			
2	1.834			
3	1.543	0.999	289.350	5.070
4	1.549			
5	1.853			
6	3.052			
36	0.329			
25	0.435			
16	0.659	0.999	94.777	4.145
9	1.233			
4	3.379			
1	22.522			

Таблица 4.

Выводы

По таблицам 1-2 мы можем сравнить между собой характеристики, соответствующие различным дисциплинам. Можно увидеть, что уменьшая весовые коэффициенты r_i, характеристики системы с дисциплиной PPS становятся близки к характеристикам системы с дисциплиной PR или PS.

В таблицах 3-4 отражено поведение системы при различных значениях весовых коэффициентов.

Результаты настоящего параграфа опубликованы в [134].

§ 2.2. Система < (m, n)/$\vec{M}$/$\vec{M}$/1/FIFO >

В этом параграфе рассматривается экпоненциальная СМО, в которой требования различных типов, возникающие от двух групп конечных источников обьема m и n обслуживаются одним прибором. Заявки из источника обьема m имеют абсолютный приоритет. СМО типа M/G/1 с приоритетом были изучены в [32, 102, 122, 123]. Основный результат параграфа заключается в разработке алгоритмического подхода к решению системы уравнений баланса. Проводятся выражения для основных стационарных характеристик рассматриваемой СМО.

Рассмотрим сложную систему, состоящую из m приоритетных и n неприоритетных требований. Причем если все приоритетные требования находятся в источнике в момент времени t, то вероятность поступления i-го приоритетного требования в интервале $(t,t+h)$ равна $\gamma_i h + o(h)$, в противном случае $\gamma^*_i h + o(h)$, $i=\overline{1,m}$. Вероятность поступления j-го неприоритетного требования на участке $(t,t+h)$ равна $\lambda_j h+o(h)$, $j=\overline{1,n}$. Требования обслуживаются одним обслуживающим прибором по следующей дисциплине. Обслуживание неприоритетных требований происходит только тогда, когда все приоритетные требования находятся в источниках. Однако если на обслуживании находится требование неприоритетной группы и поступит требование из приоритетной группы, то обслуживание немедленно прерывается и обслуживающий прибор начинает обслуживать новую заявку.

Внутри каждого класса - прямой порядок обслуживания (FIFO). Время обслуживания i-го приоритетного требования предполагается случайной величиной, распределенной по показательному закону с параметром σ_i, $i=\overline{1,m}$. Время обслуживания j-го неприоритетного требования - экспоненциально распределенная случайная величина с параметром μ_j, $j=\overline{1,n}$. Все случайные величины будем считать назависимыми.

Эта модель может быть интерпретирована как задача о простое станков, в которой предполагается, что рабочий закреплен за двумя независимыми группами станков, имеющиими различные параметры отказов и восстановлений. Это довольно обычная ситуация, поскольку часто либо в связи с расширением производства, либо в связи с заменой устаревших станков устанавливаются новые станки, и так как обновление парка станков длится годами, то рабочий обычно имеет дело на практике с неоднородной группой старых и новых станков. Очевидно, важен вопрос о том, какой тип станков сделать приоритетным, чтобы минимизировать потери из-за простоев.

Рассматриваемая модель при $m=1$ может быть интерпретирована как модель простоя станков с учетом отказов обслуживающего прибора или его переключения на выполнение других работ. Можно пояснить это, заметив, что обычное предположение относительно модели простоя станков состоит в том, что рабочий (или обслуживающий прибор) либо занят ремонтом станка, либо свободен, ожидая отказа станка. Говорят, что в этом случае прибор находится в состоянии постоянной готовности. Однако на практике рабочий выполняет также и побочную работу, имеющую или не имеющую непосредственного отношения к его основной работе по ремонту станков, например такую, как доставка сырья или инструментов. Эта побочная работа может выполняться рабочим на приоритетной основе, что приводит к данному типу модели с приоритетами. Предположение о различии параметров входного потока удобно при изучении двух вариантов отказов.

а. Отказы могут появиться независимо от того, занят прибор или нет. Такие отказы называются независимыни, при этом $\gamma^{*}=\gamma$.

б. Отказы могут появиться только, когда прибор занят обслуживанием требований, т.е. $\gamma=0$, $\gamma^{*}>0$. Такие отказы называются активными.

Для того, что получить основные характеристики системы введем векторный марковский процесс

$$\underline{X}(t)=\{ \varkappa(t);\alpha_1(t),\dots,\alpha_{\varkappa(t)}(t):\nu(t);\beta_1(t),\dots,\beta_{\nu(t)}(t) \} \quad (1)$$

с множеством состояний

$$\{(k;i_1,\dots,i_k:s;j_1,\dots,j_s),\ k=\overline{0,m},\ s=\overline{0,n},\ (i_1,\dots,i_k)\in V_m^k,$$
$$(j_1,\dots,j_s)\in V_n^s,\ i_o=0,\ j_o=0\},$$

где

$\varkappa(t)$ – число приоритетных требований, находящихся в центре обслуживания в момент времени t;

$\alpha_1(t),\dots,\alpha_{\varkappa(t)}(t)$ – их номера в порядке поступления;

$\nu(t)$ – число неприоритетных требований, находящихся в центре обслуживания в момент времени t;

$\beta_1(t),\dots\beta_{\nu(t)}(t)$ – их номера в порядке поступления.

Пусть

$$p(0:0)=\lim_{t\to\infty} P(\varkappa(t)=0:\ \nu(t)=0),$$

$$p(0:j_1,\dots,j_s)=\lim_{t\to\infty} P(\varkappa(t)=0:\nu(t)=s;\beta_1(t)=j_1,\dots,\beta_s(t)=j_s),$$

$$p(i_1,\dots,i_k:0)=\lim_{t\to\infty} P(\varkappa(t)=k;\alpha_1(t)=i_1,\dots,\alpha_k(t)=i_k:\nu(t)=0),$$

$$p(i_1,\dots,i_k:j_1,\dots,j_s)= \tag{2}$$

$$\lim_{t\to\infty} P(\varkappa(t)=k;\alpha_1(t)=i_1,\dots,\alpha_k(t)=i_k:\nu(t)=s;\beta_1(t)=j_1,\dots,\beta_s(t)=j_s)$$

$$(j_1,\dots,j_s)\in V_n^s,\quad (i_1,\dots,i_k)\in V_m^k,\qquad k=\overline{1,m},\quad s=\overline{1,n}.$$

Поскольку γ_i, $\gamma_i^* \geq 0$, $\sigma_i>0$, $i=\overline{1,m}$, λ_j, $\mu_j>0$, $j=\overline{1,n}$, то (1) обладает стационарным распределением (2). Нетрудно убедиться в том, что система стационарных уравнений имеет вид

$$\Big(\sum_{i=1}^{m}\gamma_i + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\Big)p(0:0) = \sum_{j=1}^{n}\mu_j p(0:j)+\sum_{i=1}^{m}\sigma_i p(i:0), \tag{3}$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{m}\gamma_i^* + \sum_{r\neq j_1,\dots,j_s}\lambda_r + \mu_{j_1}\Big)p(0:j_1,\dots,j_s) =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sigma_i p(i:j_1,\dots,j_s) + \sum_{r\neq j_1,\dots,j_s}\mu_r p(0:r,j_1,\dots,j_s) + \tag{4}$$

$$\lambda_{j_s} p(0:j_1,\dots,j_{s-1}),$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{m}\gamma_i^* + \mu_{j_1}\Big)p(0:j_1,\dots,j_n) = \sum_{i=1}^{m}\sigma_i\ p(i:j_1,\dots,j_n) +$$

$$\lambda_{j_n} p(0:j_1,\dots,j_{n-1}), \tag{5}$$

$$\Big(\sum_{q\neq i_1,\dots,i_k}\gamma_q+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j+\sigma_{i_1}\Big)p(i_1,\dots,i_k:0)=$$

$$\gamma_{i_k}p(i_1,\dots,i_{k-1}:0)+\sum_{q\neq i_1,\dots,i}\sigma_q\ p(q,i_1,\dots,i_k:0), \qquad (6)$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{m}\lambda_j+\sigma_{i_1}\Big)p(i_1,\dots,i_m:0)=\gamma_{i_m}p(i_1,\dots,i_{m-1}:0), \qquad (7)$$

$$\Big(\sum_{q\neq i_1,\dots,i_k}\gamma_q^{*}+\sum_{r\neq j_1,\dots,j_s}^{m}\lambda_r+\sigma_{i_1}\Big)p(i_1,\dots,i_k:j_1,\dots,j_s)=$$

$$\gamma_{i_k}^{*}p(i_1,\dots,i_{k-1}:j_1,\dots,j_s)+\lambda_{j_s}p(i_1,\dots,i_k:j_1,\dots,j_{s-1})+$$

$$\sum_{q\neq i_1,\dots,i_k}\sigma_q p(q,i_1,\dots,i_k:j_1,\dots,j_s), \qquad (8)$$

$$\Big(\sum_{r\neq j_1,\dots,j_s}^{m}\lambda_r+\sigma_{i_1}\Big)p(i_1,\dots,i_m:j_1,\dots,j_s)= \qquad (9)$$

$$\gamma_{i_m}^{*}p(i_1,\dots,i_{m-1}:j_1,\dots,j_s)+\lambda_{j_s}p(i_1,\dots,i_m:j_1,\dots,j_{s-1}).$$

Задача состоит в том, чтобы найти решение этой системы уравнений при условии нормировки

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\sum_{(i_1,\dots,i_k)}\sum_{(j_1,\dots,j_s)}p(i_1,\dots,i_k:j_1,\dots,j_s)=1.$$

Аналогично предыдущему параграфу введем векторы

$$Z^{(o,o)}=p(0:0), \qquad \underline{Z}^{(k,s)}=\begin{bmatrix} p(1,\dots,k:1,\dots,s) \\ \vdots \\ p(1,\dots,k:j_1,\dots,j_s) \\ \vdots \\ P(i_1,\dots,i_k:j_1,\dots,j_k) \\ \vdots \\ p(m,\dots,m-k+1:n,\dots,n-1) \end{bmatrix},$$

$$k=\overline{0,m}, \qquad s=\overline{0,m}.$$

Заметим, что при этом соотношения (3)-(9) записываются в виде

$$Z^{(o,o)}=A_{o,o}\underline{Z}^{(1,o)}+B_{o,o}\underline{Z}^{(o,1)}, \tag{10}$$

$$\underline{Z}^{(o,s)}=A_{o,s}\underline{Z}^{(1,s)}+B_{o,s}\underline{Z}^{(o,s+1)}+C_{o,s}\underline{Z}^{(o,s-1)}, \quad s=\overline{1,n-1}, \tag{11}$$

$$\underline{Z}^{(o,n)}=A_{o,n}\underline{Z}^{(1,n)}+C_{o,n}\underline{Z}^{(o,n-1)}, \tag{12}$$

$$\underline{Z}^{(k,o)}=D_{k,o}\underline{Z}^{(k-1,o)}+A_{k,o}\underline{Z}^{(k+1,o)}, \qquad k=\overline{1,n-1}, \tag{13}$$

$$\underline{Z}^{(m,o)}=D_{m,o}\underline{Z}^{(m-1,o)}, \tag{14}$$

$$\underline{Z}^{(k,s)}=A_{k,s}\underline{Z}^{(k+1,s)}+D_{k,s}\underline{Z}^{(k-1,s)}+C_{k,s}\underline{Z}^{(k,s-1)} \tag{15}$$

$$k=\overline{1,n-1}, \quad s=\overline{1,n},$$

$$\underline{Z}^{(m,s)}=D_{m,s}\underline{Z}^{(m-1,s)}+C_{m,s}\underline{Z}^{(m,s-1)}, \qquad s=\overline{1,n}. \tag{16}$$

Легко видеть, что векторы $\underline{Z}^{(k,o)}$ определяются рекуррентными соотношениями, именно

$$\underline{Z}^{(k,o)}=G_{k,o}\underline{Z}^{(k-1,o)}, \qquad k=\overline{1,m}, \tag{17}$$

где

$$G_{m,o}=D_{m,o}, \quad G_{k,o}=(E-A_{k,o}G_{k+1,o})^{-1}D_{k,o}.$$

Введем обозначение

$$\underline{Z}_s = \begin{bmatrix} \underline{Z}^{(o,s)} \\ \vdots \\ \underline{Z}^{(k,s)} \\ \vdots \\ \underline{Z}^{(m,s)} \end{bmatrix}, \qquad s=\overline{1,n}.$$

С помощью этих векторов соотнощения (10), (13), (14) записываются в виде

$$\underline{Z}_1 = A_o\underline{Z}_o + B_o\underline{Z}_1, \tag{18}$$

Аналогично, для (11), (15) получаем

$$\underline{Z}_s = A_s\underline{Z}_s + B_s\underline{Z}_{s+1} + D_s\underline{Z}_{s-1} . \tag{19}$$

Наконец, для (12), (16) имеем

$$\underline{Z}_n = A_n\underline{Z}_n + D_n\underline{Z}_{n-1} , \tag{20}$$

где A_s, B_s, D_s – клеточные матрицы типа

$$A_s=\begin{bmatrix} 0_0 & A_{o,s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1,s} & \ddots & & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & A_{m-1,s} & \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & C_{m,s} & 0 & \end{bmatrix}, \quad B_s=\begin{bmatrix} B_{o,s} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_s=\begin{bmatrix} D_{o,s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{m,s} \end{bmatrix}$$

$$s=\overline{1,n}.$$

Справедлива следующая

Теорема 2.2.1. Векторы $\underline{Z}_k$, $k=\overline{1,n}$ вычисляются из следующих рекуррентных соотношений

$$\underline{Z}_s = F_s \underline{Z}_{s-1}, \quad s=\overline{1,n}, \tag{21}$$

где

$$F_n=(E-A_n)^{-1}D_n, \quad F_s=(E-A_s-B_sF_{s+1})^{-1}D_s, \quad s=\overline{1,n-1}.$$

Доказательство проводится аналогично Теореме 2.1.2.

Поскольку, (21) начинается вектором $\underline{Z}_o$, который определяется (17), поэтому система зависит от p(0:0). Так как при фиксированном p(0:0) система уравнений обладает единственним решением, то обратные матрицы существуют. Начиная с произвольного знаюения p(0:0) используя рекуррентные соотношения (17), (21) после нормировки получаем стационарное распределение состояний системы.

Основные стационарные характеристики системы

Сохраняя обозначения предыдущих параграфов легко видеть, что справедливы следующие формулы.

(i) Эффективность обслучивающего прибора

$$U= 1-p(0:0).$$

(ii) Средная длительность периода занятости

$$M\delta = (1-p(0:0))/(p(0:0)(\sum_{i=1}^{m}\gamma_i + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j)).$$

(iii) Среднее время пребывания требований на обслуживание

$$R_i=\frac{P^{(i)}}{\gamma_i\sum_{k=1}^{m}\sum_{i\notin(i_1,\dots,i_k)}p(i_1,\dots,i_k:0)+\gamma_i^{*}\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\sum_{i\notin(i_1,\dots,i_k)}p(i_1,\dots,i_k:j_1,\dots,j_s)},$$

$$\hat{R}_j=\hat{P}^{(j)}/\lambda_j(1-\hat{P}^{(j)}),$$

где

$$P^{(i)}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=o}\sum_{i\in(i_1,\dots,i_k)}\sum_{(j_1,\dots,j_k)}p(i_1,\dots,i_k:j_1,\dots j_s),$$

$$i=\overline{1,m},$$

$$\hat{P}^{(j)}=\sum_{k=o}^{n}\sum_{s=1}\sum_{(i_1,\dots,i_k)}\sum_{j\in(j_1,\dots,j_k)}p(i_1,\dots,i_k:j_1,\dots j_s),$$

$$j=\overline{1,n}.$$

(iv) Среднее время ожидания обслуживания

$$W_i=R_i-1/\sigma_i,\qquad i=\overline{1,m},$$

$$\hat{W}_j=\hat{R}_j-1/\mu_j,\qquad j=\overline{1,n}.$$

(v) Производительность станков

$$U_i=1-P^{(i)},\qquad i=\overline{1,m},$$

$$\hat{U}_j=1-\hat{P}^{(j)},\qquad j=\overline{1,n}.$$

(vi) Среднее число заявок на обслуживание

$$\bar{n}=\sum_{i=1}^{m}P^{(i)}+\sum_{j=1}^{n}P^{(j)}.$$

Численные примеры

Для того, чтобы проиллюстрировать применение приведенных выше результатов, рассмотрим задачу о простое станков. Зададимся вопросом, какому типу станков назначать приоритет при ремонте, чтобы минимизировать следующую функцию потерь в единицу времени

$$L= \sum_{i=1}^{m} c_i(1-U_i) + \sum_{j=1}^{n} \hat{c}_j(1-\hat{U}_j) + Bp(0:0),$$

где

c_i - прибыль i-го приоритетного станка в единицу времени,

$\hat{c}_j$ - прибыль j-го неприоритетного станка в единицу времени,

B - зарплата ремонтника в единицу времени.

Входные параметры старых станков

станок	инт. отказы	инт. ремонта	прибыл
1	0.5	0.8	4
2	0.6	0.9	5
3	0.7	1.1	6

Входные параметры новых станков

1	0.1	0.3	2
2	0.2	0.4	3

Зарплата рабочего: 7.

Результаты вычислений по формулам сведены в Таблице 1. Рассмотрены 2 случая. В случае 1 новые станки обладают приоритетом, а в случае 2 старые станки.

случай	U	$M\delta$	R_1	R_2	R_3	W_1	W_2	W_3
1	0.95	10.14	4.19	3.27		0.85	0.77	
2	0.98	32.91	2.23	2.11	1.96	0.98	1.00	1.05

случай	$\bar{n}$	L	$\hat{R}_1$	$\hat{R}_2$	$\hat{R}_3$	$\hat{W}_1$	$\hat{W}_2$	$\hat{W}_3$
1	3.04	1.38	6.46	6.09	5.70	5.21	4.98	4.79
2	3.34	1.27	39.97	34.78		36.64	32.24	

Таблица 1.

Выводы

Из Таблицы 1. видно, что если назначить приоритет старым станкам, то значение функции стоимости меньше, таким образом назначение приоритета старым станкам было бы предпочительнее. Чтобы более точно определить влияние различных параметров, необходим большой обьем вычислительной работы. В следующих работах приводятся выводы численных расчетов при различных параметрах [см. 136, 137].

Основные результаты настоящего параграфа опубликованы в [136, 137].

§ 2.3. Система $\vec{M}/\vec{G}/1/FIFO$

До сих пор наиболее исследованной является система M/G/1. Библиографические сведения по изучению такой системы наиболее польно представлены в работах [17, 32, 45, 58, 59, 68, 91, 98, 108, 109, 121]. В терминах преобразования Лапласа-Стилтьеса были получены основные характеристики системы. С помощью метода вложенной цепи Маркова и биномиального преобразования в работе [121] найдены основные показатели системы. В связи с задачами современной вычислительной техники интенсивно исследовались приоритетные системы [см. 27, 32, 36, 73, 97, 107, 124]. В настоящем параграфе рассмотрена следующая система.

Пусть система состоит из одного обслуживающего прибора. Время пребывания в i-м источнике требования предполагается случайной величиной, распределенной по показательному закону с параметром λ_i, $i=\overline{1,n}$. Время обслуживания требования от i-го источника - произвольно распределенная случайная величина с функцией распределения $F_i(x)$, $i=\overline{1,n}$. Дисциплина обслуживания - FIFO. Все случайные величины будем считать независимыми. С помощью метода интегро-дифференциальных уравнений и рекуррентных соотношений изучим основные характеристики описанной системы в стационарном режиме.

Введем следующие обозначения

$\nu(t)$ - число требований, находящихся в центре обслуживания в момемт времени t;

$\alpha_1(t),\dots,\alpha_{\nu(t)}(t)$ - их индексы в порядке поступления;

ξ_t - время, прошедшее с момента начала текущего обслуживания требования $\alpha_1(t)$.

Легко видеть, что

$$\underline{X}(t)=(\ \nu(t);\ \alpha_1(t),\dots,\alpha_{\nu(t)}(t);\ \xi_t\ )$$

является марковским процессом с множеством состояний

$$\{\ (k:i_1,\dots,i_k;x),k=\overline{1,n},\ x>0,\ (i_1,\dots,i_k)\in V_n^k,\ (0)\ \},$$

где

$(k:i_1,\dots,i_k;x)$ - k требований нуждаются в обслуживании, их индексы $(i_1,\dots,i_k)$ и прошедшее время с момента начала обслуживния i_1-го требования равно x,

{0} - обслуживающий прибор свободен.

Введем обозначения

$$\Lambda_{i_1,\dots,i_k} = \sum_{j\neq i_1,\dots,i_k} \lambda_j , \quad \Lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j , \quad \beta_i = \int_0^\infty x dF_i(x), \quad i=\overline{1,n},$$

$$S_{i_1,\dots,i_k} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} , \qquad \Phi(s;i) = \int_0^\infty e^{-sx} dF_i(x),$$

$$\Pi_s^{(i_1,\dots,i_k)} = \prod_{r=s+1}^{k} \lambda_{i_r} \Big/ \prod_{q=s+1}^{k} S_{i_{s+1},\dots,i_q},$$

$$\prod_{r=s+1}^{s} = 1, \quad r=\overline{1,k}, \quad k=\overline{1,n}.$$

$$P(0) = \lim_{t\to\infty} P(\ \nu(t)=0\ ),$$

$$P(i_1,\dots,i_k;x) = \lim_{t\to\infty} P(\ \nu(t)=k;\ \alpha_1(t)=i_1,\dots,\alpha_k(t)=i_k; \xi_t \le x\ ),$$

$$(i_1,\dots,i_k)\in V_n^k, \quad k=\overline{1,n}, \quad x>0. \tag{1}$$

Ясно, что стационарное (эргодическое) распределение (1) существует i единственно при $\beta_i<\infty$, $i=\overline{1,n}$, [см. 30, 118]. Задача состоит в том, чтобы найти стационарные вероятности

$$P(0), \quad P(i_1,\dots,i_k) = P(i_1,\dots,i_k;\infty), \quad (i_1,\dots,i_k)\in V_n^k, \quad k=\overline{1,n}.$$

Вычислим сначала следующие условные вероятности

$$P\{\nu(t+\tau)=k;\alpha_j(t+\tau)=i_j, 1\le j\le k; \xi_{t+\tau}=\tau/\nu(t)=s;\alpha_j=i_j, 1\le j\le s;\xi_t=0\},$$

$$(i_1,\dots,i_k)\in V_n^k, \quad k=\overline{1,n}, \quad \tau>0, \quad 1 \le s \le k \le n. \tag{2}$$

Нетрудно убедиться в том, что они равны

$$(1-F_{i_1}(\tau))\exp(-\Lambda_{i_1,\dots,i_k}\tau) \int\limits_{0<z_{s+1}<\dots<z_k<\tau} \prod_{j=s+1}^{k} \lambda_{i_j} \exp(-\lambda_{i_j} z_j) dz_j .$$

Обозначим

$$V_{i_1,\dots,i_s}^{i_1,\dots,i_k}(\tau)=\exp(-\Lambda_{i_1,\dots,i_k}\tau)\int\limits_{0<z_{s+1}<\dots<z_k<\tau}\prod_{j=s+1}^{k}\lambda_{i_j}\exp(-\lambda_{i_j}z_j)dz_j.$$

Легко видеть, что при $\lambda_i=\lambda$, $i=\overline{1,n}$,

$$V_{i_1,\dots,i_s}^{i_1,\dots,i_k}(\tau)=\frac{1}{(k-s)!}(1-\exp(-\lambda\tau))^{k-s}\exp(-(n-k)\lambda\tau).$$

Справедлива следующая

Теорема 2.3.1. Стационарное распределение $P(i_1,\dots,i_k;x)$ обладает плотностью $p(i_1,\dots,i_k;x)$ почти для всех $x>0$, за исключением множества $\{x\}$ нулевой меры Лебега. Кроме того функции

$$p^*(i_1,\dots,i_k;x) = p(i_1,\dots,i_k;x)/(1-F_{i_1}(x))$$

дифференцируемы для любого $x>0$.

Доказательство. Сначала мы докажем существование $p(i_1,\dots,i_k;x)$. Рассмотрим последовательность моментов времени, когда обслуживание i_1-го требования только что началось и в очереди находятся требования с индексами $(i_2,\dots,i_r)$. Нетрудно видеть, что эти моменты являются моментами регенерации, и их совокупность образует процесс восстановления. Пусть

$(j_1,\dots,j_s;z)$ – начальное состояние процесса $\underline{X}(t)$, $t\ge 0$,

$H_{j_1,\dots,j_s;z}^{i_1,\dots,i_r}(t)$ – функция восстановления ,

$R(0),R(j_1,\dots,j_s;x)$ – начальное распределение $\underline{X}(t)$, $t\ge 0$.

Ясно, что

$$P\{\nu(t)=k;\alpha_j(t)=i_j,1\le j\le k;\xi_t\le 0\}=\Big(\sum_{s=1}^{n}\sum_{V_n^s}\int_0^t dR(j_1,\dots,j_s;z)+R(0)\Big)\times$$

$$\times\sum_{r=1}^{k}\int_{t-x}^{t}V_{i_1,\dots,i_s}^{i_1,\dots,i_k}(t-u)[1-F_{i_1}(t-u)]\,dH_{j_1,\dots,j_s;z}^{i_1,\dots,i_r}(u).$$

В силу теоремы Смита получим

$$P(i_1,\dots,i_k;x)=\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{m(i_1,\dots,i_r)}\int_0^x[1-F_{i_1}(u)]\,V_{i_1,\dots,i_s}^{i_1,\dots,i_k}(u)\,du,$$

где

$m(i_1,\dots,i_r)$ – время возвращения процесса $\underline{X}(t)$, $t\ge 0$ в состояние $(i_1,\dots,i_r;0)$.

Следовательно,

$$p(i_1,\dots,i_k;x)=\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{m(i_1,\dots,i_r)}[1-F_{i_1}(x)]\,V_{i_1,\dots,i_s}^{i_1,\dots,i_k}(x),$$

$$(i_1,\dots,i_r)\in V_n^r,\quad r=\overline{1,n},\quad x>0 \text{ п. н.}$$

Таким образом, утверждение теоремы немедленно вытекает из (2).

Справедлива следующая

Лемма 2.3.1. Функции $p^*(i_1,\dots,i_k;x)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dp^*(i_1;x)}{dx}+\Lambda_{i_1}p^*(i_1;x)=0,$$

$$\frac{dp^*(i_1,\dots,i_k;x)}{dx}+\Lambda_{i_1,\dots i_k}p^*(i_1,\dots,i_k;x)=\lambda_{i_k}p^*(i_1,\dots,i_{k-1};x), \tag{3}$$

$$\frac{dp^*(i_1,\dots,i_n;x)}{dx}=\lambda_{i_n}p^*(i_1,\dots,i_{n-1};x),$$

с граничными условиями

$$\Lambda P(0)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^{\infty} p^*(i;x)dF_i(x),$$

$$p^*(i_1;0)=\lambda_{i_1}P(0)+\sum_{j\neq i_1}\int_0^{\infty} p^*(j,i_1;x)dF_j(x), \tag{4}$$

$$p^*(i_1,\ldots,i_k;0)=\sum_{j\neq i_1,\ldots,i_k}\int_0^{\infty} p^*(j,i_1,\ldots,i_k;x)dF_j(x),$$

$$p^*(i_1,\ldots,i_n;0)=0.$$

Доказательство. Это утверждение несложно доказать используя Δt метод [см. 30, 40].

Основным результатом настоящего параграфа является следующая теорема, которая дает решение (3) при (4).

Теорема 2.3.2. Решение (3) имеет вид

$$p^*(i_1,\ldots,i_k;x)=\sum_{s=1}^{k}(-1)^{k-s}c(i_1,\ldots,i_s)\Pi_s^{(i_1,\ldots,i_k)}\exp(-\Lambda_{i_1,\ldots,i_s}x) \tag{5}$$

где константы $c(i_1,\ldots,i_s)$ определяются из (4) рекуррентными соотношениями.

Доказательство. Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться в том, что функции (5) удовлетворяют (3).

Обозначим

$$\underline{c}_k=\begin{bmatrix} c(1,\ldots,k) \\ \vdots \\ c(i_1,\ldots,i_k) \\ \vdots \\ c(n,n-1,\ldots,n-k+1)\end{bmatrix}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Тогда используя (5) условие $p^*(i_1,\ldots,i_n;0)=0$ можно записать в матричном виде

$$\underline{c}_n = A^{(n)}_{n-1}\underline{c}_{n-1} + \ldots + A^{(n)}_1 \underline{c}_1 .$$

Аналогично получим

$$\sum_{s=1}^{k} (-1)^{k-s} c(i_1,\ldots,i_s)\Pi_s^{(i_1,\ldots,i_k)} = \int_0^{\infty} \exp(-\Lambda_{i_1,\ldots,i_k} x)\, dF_j(x) \times$$

$$\times \sum_{j\neq i_1,\ldots i_k} \sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} c(j,i_1,\ldots,i_s)\Pi_{s+1}^{(j,i_1,\ldots,i_k)}, \qquad k=\overline{2,n-1}.$$

В терминах преобразования Лапласа-Стилтьеса последнее равенство можно переписать в следующем виде

$$\sum_{s=1}^{k} (-1)^{k-s} c(i_1,\ldots,i_s)\Pi_s^{(i_1,\ldots,i_k)} = \Phi(\Lambda_{j,i_1,\ldots,i_k}; j) \times$$

$$\times \sum_{j\neq i_1,\ldots i_k} \sum_{s=0}^{k} (-1)^{k-s} c(j,i_1,\ldots,i_s)\Pi_{s+1}^{(j,i_1,\ldots,i_k)}.$$

Таким образом,

$$\underline{c}_k = A^{(k)}_{k+1}\underline{c}_{k+1} + \ldots + A^{(k)}_1 \underline{c}_1 , \qquad k=\overline{2,n-1}.$$

Далее, легко видеть, что

$$\underline{c}_n = \sum_{j=1}^{n-1} A_j^{(n)} \underline{c}_j , \qquad \underline{c}_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} B_j^{(n-1)} \underline{c}_j ,$$

где

$$B_j^{(n-1)} = (E - A_n^{(n-1)} A_{n-1}^{(n)} - A_{n-1}^{(n-1)})^{-1} (A_n^{(n-1)} A_j^{(n)} + A_j^{(n-1)}), \quad j=\overline{1,n-2}.$$

Аналогично,

$$\underline{c}_k = \sum_{j=1}^{k-1} B_j^{(k)} \underline{c}_j ,$$

где

$$B_j^{(k)}=(E-A_{k+1}^{(k)}A_k^{(k+1)}-A_k^{(k)})^{-1}(A_{k+1}^{(k)}\ A_j^{(k+1)}+A_j^{(k)}),\quad j=\overline{1,k-1},\quad k=\overline{2,n-1}.$$

Для $\underline{C}_1$ находим

$$\underline{C}_1=A_2^{(1)}C_2+A_1^{(1)}\underline{C}_1+P(0)\underline{\lambda},\quad \underline{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \text{ - вектор-столбец.}$$

Итак,

$$(E-A_2^{(1)}B_1^{(2)}-A_1^{(1)})\underline{C}_1=P(0)\underline{\lambda}.$$

Следовательно,

$$\underline{C}_1=(E-A_2^{(1)}B_1^{(2)}-A_1^{(1)})^{-1}P(0)\underline{\lambda}.$$

При фиксированном $P(0)$ система (3), (4) обладает единственным решением, поэтому обратные матрицы существуют. Начиная процедуру вычисления при произвольном $P(0)$ находим $\underline{C}_k$, $k=\overline{1,n}$, которые зависят от $P(0)$, определенного условием нормировки. Зная C_k, $k=\overline{1,n}$, функции $p^*(i_1,\ldots,i_k;x)$ легко определяются с помощью (5).

Следовательно,

$$P(i_1,\ldots,i_k)=\int_0^\infty p(i_1,\ldots,i_k;x)dx=\int_0^\infty p^*(i_1,\ldots,i_k;x)(1-F_{i_1}(x))dx.$$

Пусть

$$P_k=\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in V_n^k} P(i_1,\ldots,i_k),$$

таким образом,

$$P(0)=(1+\sum_{k=1}^{n}P_k)^{-1}.$$

После деления $\underline{C}_k$, $k=\overline{1,n}$, на $P(0)$ получим стационарное распределение вероятностей состояний системы.

Основные стационарные характеристики системы

Сохраняя обозначения предыдущих параграфов легко видеть, что справедливы следующие формулы.

(i) Эффективность обслуживающего прибора

$$U = 1 - P(0).$$

(ii) Средняя длительность периода занятости

$$M\delta = (1-P(0))/(P(0)\Lambda).$$

(iii) Среднее время пребывания требований на обслуживание

$$R_i = P^{(i)}/(\lambda_i(1-P^{(i)})),$$

где

$$P^{(i)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i\in(i_1,\dots,i_k)\varepsilon V_n^k} P(i_1,\dots,i_k), \quad i=\overline{1,n}.$$

(iv) Среднее время ожидания обслуживания

$$W_i = R_i - \beta_i, \quad i=\overline{1,n}.$$

(v) Производительность станков

$$U_i = 1 - P^{(i)}, \quad i=\overline{1,n}.$$

(vi) Среднее число заявок на обслуживание

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{n} P^{(i)}.$$

Численные примеры

Численные примеры, иллюстрирующие работу предыдущего алгоритма были решены в вычислительном центре Дебреценского университета на языке SIMULA. Результаты вычислений по формулам сведены в Таблицах 1-3.

Обозначим через $E(n,\mu,x)$ распределение Эрланга порядка n с плотностью

$$\mu \frac{(\mu x)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\mu x), \quad (x\ge 0).$$

Случай 1.

Входные параметры

$$n=4 \quad \lambda_i=\lambda=1.2, \quad i=\overline{1,4},$$

$F_1(x)=E(1,1.2,x)$,

$F_2(x)=0.8E(2,3.3,x) + 0.2E(2,0.9,x)$,

$F_3(x)=0.2E(2,3.5,x) + 0.6E(3,2.6,x) + 0.2E(1,0.2,x)$,

$F_4(x)=0.8E(2,3.3,x) + 0.2E(2,0.9,x)$.

Характеристики системы

$U=0.999$	$M\delta=34.513$		$\bar{n}=3.255$
$U_1=0.189$	$U_2=0.187$	$U_3=0.180$	$U_4=0.187$
$R_1=4.410$	$R_2=4.552$	$R_3=5.627$	$R_4=4.552$
$W_1=3.577$	$W_2=3.623$	$W_3=3.821$	$W_4=3.623$

Таблица 1.

Случай 2.

Входные параметры

$$n=5 \quad \lambda_i=\lambda=0.25, \quad i=\overline{1,5},$$

$F_i(x)=F(x)=E(3,0.5,x)$, $\quad i=\overline{1,5}$.

Характеристики системы

$U=0.999$	$M\delta=4443.64$		$\bar{n}=3.255$
$U_i=0.112$,	$R_i=32.00$,	$W_i=26.00$	$i=\overline{1,5}$.

Таблица 2.

Случай 3.

Входные параметры

$$n=5 \qquad \lambda_i=\lambda=0.08,\ i=\overline{1,4},$$

$F_1(x)=0.4E(2,0.3,x) + 0.6E(3,0.25,x)$,

$F_2(x)=0.2E(1,0.6,x) + 0.5E(2,0.35,x) + 0.3E(4,0.17,x)$,

$F_3(x)=E(3,0.25,x)$,

$F_4(x)=0.3E(1,0.4,x) + 0.5E(2,0.17,x) + 0.2E(3,0.182,x)$,

$F_5(x)=0.2E(1,0.8,x) + 0.3E(2,,0.26,x) + 0.4E(1,0.168,x) +$

$+ 0.1E(3,0.65,x)$.

Характеристики системы

$U=0.994$		$M\delta=450.31$		$\bar{n}=3.900$
$U_1=0.215$	$U_2=0.217$	$U_3=0.203$	$U_4=0.217$	$U_5=0.244$
$R_1=45.83$	$R_2=45.23$	$R_3=49.11$	$R_4=45.30$	$R_5=38.82$
$W_1=35.97$	$W_2=35.03$	$W_3=37.11$	$W_4=35.38$	$W_5=33.42$

Таблица 3.

Результаты настоящего параграфа опубликованы в [128, 129, 130, 131].

Глава 3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРЕКЛЮЧАЕМЫХ МАРКОВСКИХ СИСТЕМ С БЫСТРЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ

Сложность современного производства и в связи с этим сложность и большая размерность соответствующих математических моделей приводит к необходимости развивать методы асимптотического анализа, которые в ряде случаев позволяют сводить изучение исходной модели к упрощенной и получать простые приближенные формулы. В теории асимптотического укрупнения первичной является задача об асимптотическом поведении момента первого выхода системы из области, когда вероятность выхода стремится к нулю. В настоящее время асимптотическому анализу различных систем массового обслуживания посвящено немало работ [см. 3-11, 20, 24, 28, 29, 31, 38, 39, 46-48, 50-53, 57, 60, 63-65, 70, 71].

В настоящей главе используя методику s-множеств, введенную В.В. Анисимовым [3, 4], изучается предельное поведение момента первого отказа переключаемых марковских систем с быстрым обслуживанием, а также исследуется поведение потока моментов отказа системы. Показано что предельное распределение момента первого отказа системы будет показательным, а поток отказов системы слабо сходится к пуассоновскому процессу.

§ 3.1. Вспомогательные результаты

Данный параграф является вспомогательным и посвящен изучению предельного поведения времени пребывания полумарковског процесса (ПМП) в фиксированном подмножестве состояний. Приводятся некоторые теоретические результаты, используемые в дальнейшей работе.

Пусть задан ПМП $\xi_\varepsilon(t)$, $t\geq 0$ с множеством состояний $\{0,\dots,r\}$, который задается вложенной цепью Маркова $X_\varepsilon(s)$, $s\geq 0$, с матрицей вероятностей переходов $\| p_\varepsilon(k,j) \|$, $k,j=\overline{0,r}$, и набором времен переходов $\tau_\varepsilon(k,j)$, $k,j=\overline{0,r}$. Пусть $\langle \alpha \rangle$ - некоторое подмножество состояний из $\{1,\dots,r\}$. Положим

$$\nu_\varepsilon(i,\langle\alpha\rangle) = \min\{ k;\ k>0,\ X_\varepsilon(k)\notin\langle\alpha\rangle \ /\ X_\varepsilon(0)=i\in\langle\alpha\rangle \},$$

$q_\varepsilon(i,j,\langle\alpha\rangle)=P\ \{ X_\varepsilon(k)=j$ хотя бы для одного k: $k<\nu_\varepsilon(i,\langle\alpha\rangle)\ /\ X_\varepsilon(0)=i\ \}$, $i,j\in\langle\alpha\rangle$, т.е. $q_\varepsilon(i,j,\langle\alpha\rangle)$ - вероятность того, что начиная из i, цепь попадает в j прежде чем выйдет из $\langle\alpha\rangle$.

Определение 3.1.1. Подмножество состояний $\langle\alpha\rangle$ образует s-множество, если для любых $i,j\in\langle\alpha\rangle$ $q_\varepsilon(i,j,\langle\alpha\rangle)\to 1$ при $\varepsilon\to 0$.

Это фактически означает, что начиная из любого состояния, цепь посетит каждое состояние из $\langle\alpha\rangle$ асимптотически бесконечное число раз, прежде чем выйдет из $\langle\alpha\rangle$. Простейшим примером s-множества может служить такое множество, которое в пределе образует один существенный класс.

Пусть

$$\Omega_\varepsilon(k) = \inf \{t;\ t>0,\ \xi_\varepsilon(t)=0 \ /\ \xi_\varepsilon(0)=k,\ k\neq 0 \}$$

т. е. $\Omega_\varepsilon(k)$ - время пребывания $\xi_\varepsilon(t)$ в подмножестве $\{1,..r\}$, начиная из состояния $\{k\}$. Предположим, что $\{1,...,r\}$ образует s-множество. Положим

$$g_\varepsilon = \sum_{k=1}^{r} \Pi_\varepsilon(k) p_\varepsilon(k,0),$$

где $\Pi_\varepsilon(k)$, $k=\overline{1,r}$, -стационарное распределение для цепи с матрицей $\| p_\varepsilon(i,j) \,/\, (1-p_\varepsilon(i,0)) \|$, $i,j=\overline{1,r}$.

Предположим далее, что

$$\frac{\Pi_\varepsilon(k) p_\varepsilon(k,0)}{g_\varepsilon} \to b_k \,, \quad k=\overline{1,r},$$

и существует нормирующий множитель β_ε такой, что

$$M \exp\{ i\theta\beta_\varepsilon\tau_\varepsilon(k,j) \} = 1 + g_\varepsilon a_{kj}(\theta) + o(g_\varepsilon), \quad k,j=\overline{1,r},$$

$$M \exp\{ i\theta\beta_\varepsilon\tau_\varepsilon(k,0) \} \to \rho_k(\theta), \quad k=\overline{1,r}.$$

Тогда при указанных предположениях справедлива

Теорема 3.1.1. Распределение величины $\beta_\varepsilon\Omega_\varepsilon(k)$ независимо от начального состояния $k=\overline{1,r}$ слабо сходится к распределению с характеристической функцией

$$\sum_{k=1}^{r} b_k \rho_k(\theta) / (1 - \sum_{k,j}^{r} \Pi_o(k) p_o(k,j) a_{kj}(\theta))$$

где

$$\Pi_o(k) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Pi_\varepsilon(k), \quad p_o(k,j) = \lim_{\varepsilon\to 0} p_\varepsilon(k,j), \quad k,j=\overline{1,r}.$$

Доказательство приводится в [10 стр. 149].

Основные технические проблемы, возникающие при применении теоремы 3.1.1. к конкретным системам, связаны с явным вычислением главных частей стационарных вероятностей $\Pi_\varepsilon(k)$ и g_ε.

Рассмотрим один пример, который играет важную роль при дальнейшем исследовании и существенно упрощает решение задач.

Пример 3.1.1.

Пусть $x_\varepsilon(k)$, $k\ge 0$ - однородная цепь Маркова с множеством состояний

$$\bigcup_{q=0}^{m+1} X_q \ , \ X_i \cap X_j = 0 \ , \ i\ne j.$$

Переходные вероятности за один шаг $p_\varepsilon(i^{(q)},j^{(z)})$ ведут себя следующим образом

1. $p_\varepsilon(i^{(o)},j^{(o)}) \to p_o(i^{(o)},j^{(o)})$, $\quad i^{(o)},j^{(o)}\in X_o$ и

   $P_o = \| p_o(i^{(o)},j^{(o)}) \|$, $i^{(o)},j^{(o)}\in X_o$ неприводима;

2. $p_\varepsilon(i^{(q)},j^{(q+1)}) = \varepsilon\alpha^{(q)}(i^{(q)},j^{(q+1)}) + o(\varepsilon)$,

   $$i^{(q)}\in X_q,\ j^{(q+1)}\in X_{q+1}\ ;$$

3. $p_\varepsilon(i^{(q)},f^{(q)}) \to 0$, $\quad i^{(q)}, f^{(q)} \in X_q$, $q\ge 1$;

4. $p_\varepsilon(i^{(q)},j^{(z)}) \equiv 0$, $\quad i^{(q)}\in X_q$, $j^{(z)}\in X_z$, при $z-q\ge 2$.

Будем говорить, что множество состояний X_q представляет собой q-й уровень, $q=0,\dots,m+1$.

Выделим подмножество состояний

$$\langle \alpha_m \rangle = \bigcup_{q=0}^{m} X_q \ .$$

Введем обозночения

$\{ \Pi_\varepsilon(i^{(q)}),\ \ i^{(q)}\in X_q \},\ \ q=\overline{0,m}$ – стационарное распределение для цепи с матрицей

$$\left\| \frac{p_\varepsilon(i^{(q)},j^{(z)})}{1-\sum\limits_{k^{(m+1)}\in X_{m+1}} p_\varepsilon(i^{(q)},k^{(m+1)})} \right\|,\quad i^{(q)}\in X_q,\quad j^{(z)}\in X_z,\quad q,z\le m,$$

$g_\varepsilon(\langle\alpha_m\rangle)$ – стационарная вероятность выхода из $\langle\alpha_m\rangle$, т. е.

$$g_\varepsilon(\langle\alpha_m\rangle)=\sum_{i^{(m)}\in X_m} \Pi_\varepsilon(i^{(m)}) \sum_{j^{(m+1)}\in X_{m+1}} p_\varepsilon(i^{(m)},j^{(m+1)}),$$

$\{ \Pi_o(i^{(o)}),\ i^{(o)}\in X_o \}$ – стационарное распределение для P_o.

$$\overline{\Pi}_o=\{ \Pi_o(i^{(o)}),\ i^{(o)}\in X_o \},\quad \overline{\Pi}_\varepsilon^{(q)}=\{ \Pi_\varepsilon(i^{(q)}),\ i^{(q)}\in X_q \}$$

вектора-строки,

$$A^{(q)}=\| \alpha^{(q)}(i^{(q)},j^{(q+1)}) \|,\ i^{(q)}\in X_q,\ j^{(q+1)}\in X_{q+1},\ q=\overline{0,m}.$$

Тогда справедлива следующая

Лемма 3.1.1. В предположениях (1)-(4)

$$\overline{\Pi}_\varepsilon^{(q)}=\varepsilon^q\overline{\Pi}_o A^{(o)}A^{(1)}\ldots A^{(q-1)}+o(\varepsilon^q),\quad q=\overline{1,m},$$

а

$$g_\varepsilon(\langle\alpha_m\rangle)=\varepsilon^{m+1}\overline{\Pi}_o A^{(o)}A^{(1)}\ldots A^{(m)}\underline{1}+o(\varepsilon^{m+1}), \tag{1}$$

где

$\underline{1}=(1,\ldots,1)$ – вектор-столбцы.

Доказательство приводится в [11] из плиложения 2.

Заметим, что эти формулы развивают приметительно к подобным схемам принцип монотонности траекторий, предложенный в [46].

Как следствие леммы 3.1.1. и теоремы 3.1.1. приведем один результат, который в дальнейшем будет использован при асимптотическом анализе переключаемых марковских систем с быстрым обслуживанием.

Следствие 3.1.1. Пусть ПМП $\xi_\varepsilon(t)$, $t\ge 0$, задан вложенной цепью $x_\varepsilon(k)$, $k\ge 0$, удовлетворяющей условиям (1)-(4) и временами переходов из $j^{(s)}$ в $k^{(z)}$ $\tau_\varepsilon(j^{(s)},k^{(z)})$, удовлетворяющими условиями

$$M\exp\{\, i\theta\beta_\varepsilon\tau_\varepsilon(j^{(s)},k^{(z)})\,\}= 1+a_{jk}(s,z,\theta)\varepsilon^{m+1}+o(\varepsilon^{m+1})$$

где β_ε - некоторый нормирующий множитель.

Через $\Omega_\varepsilon(m)$ обозначим момент первого достижения уровня $m+1$, если $\xi_\varepsilon(0)\in\langle\alpha_m\rangle$.

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M\exp\{\, i\theta\beta_\varepsilon\Omega_\varepsilon(m)\,\}=(1-A(\theta))^{-1},$$

где

$$A(\theta)=\frac{\sum\limits_{j,k\in X_o}\Pi_o(j)p_o(j,k)a_{jk}(0,0,\theta)}{\bar{\Pi}_o A^{(o)}\ldots A^{(m)}\underline{1}}.$$

В частности, если

$a_{jk}(s,z,\theta)=i\theta m_{jk}(s,z)$, ($i=\sqrt{-1}$) то предельное распределение будет показательным с параметром

$$\overline{\Pi}_o A^{(o)} \dots A^{(m)} \underline{1} / \Big(\sum_{j,k \in X_o} \Pi_o(j) p_o(j,k) m_{jk}(0,0) \Big).$$

Отметим теперь следующий общий результат, который удобно использовать при исследовании асимптотического поведения редких потоков .

Теорема 3.1.2. Пусть задан поток событий $\nu_\varepsilon(t)$, у которого $0 \le \mu_\varepsilon(0) \le \mu_\varepsilon(1) \le$ - последовательность моментов наступления событий, и существует нормирующий множитель β_ε такой, что случайные величины

$$\beta_\varepsilon(\mu_\varepsilon(k+1)-\mu_\varepsilon(k)),\ k\ge 0$$

асимптотически независимы и для любого k

$$P\{ \beta_\varepsilon(\mu_\varepsilon(k+1)-\mu_\varepsilon(k))<x \} \overset{\text{сл}}{\Longrightarrow} F(x).$$

Тогда конечномерное распределения потока $\nu_\varepsilon(\beta_\varepsilon^{-1}t)$ слабо сходятся на любом промежутке времени $[0,T]$ к потоку восстановления $\nu_o(t)$ с распределением промежутка восстановления $F(x)$, где T- точка непрерывности $F^{(m)*}(x)$, при любом $m\ge 1$. Здесь символ $\Longrightarrow$ обозначает слабо сходимость функций распределения, а $F^{(m)*}(x)$ - m-краткая свертка $F(x)$ с тобой.

Доказательство приводится в [10 стр. 161].

§ 3.2. Система $M_u/M_u/r/FIFO$

Поскольку вопрос о времени функционирования системы до выхода из строя, представляет собой особый интерес в теории надежности, то мы сформулируем нашу задачу в терминах теории надежности. Заметим, что изучаемая проблематика тесно связана с работами А.Д. Соловьева [см. 28, 29, 63, 64] по асимптотическому анализу надежности систем методом теории процессов восстановления.

Рассмотрим марковскую систему, состоящую из n элементов. Каждый из этих элементов с течением времени отказывает, сразу же после отказа идет в ремонтное устройство, состоящее из r обслуживающих приборов. Неисправные элементы восстанавливаются в порядке отказов. Если в момент прихода элемента все приборы заняты восстановлением, то этот элемент становится в очередь. По окончании восстановления элемент мгновенно возвращается на свое место и сразу включается в работу, потом снова отказывает и.т.д..

Предположим, что элементы работают в некоторой случайной среде, управляемой состояниями некоторой эргодической цепи Маркова ($X(t)$, $t\geq 0$), заданной на конечном множестве состояний $\{ 1,2,\dots,r_1 \}$ с матрицей интенсивностей вероятностей переходов

$$\{ a_{ij},\ i,j=\overline{1,r_1},\ a_{ii}=\sum_{j\neq i} a_{ij} \}.$$

Причем если $X(t)=i$ и в ремонтном органе в момент t находится s элементов, то время безотказной работы каждого элемента распределено по показательному закону с параметром

$\lambda(i,s)$ и все приборы обслуживают неисправные элементы по показательному закону с параметром $\mu_\varepsilon(i,s)$.

Все случайные величины будем считать независимыми.

Предположим, что восстановления элементов происходят асимптотически " быстро ", т. е. $\mu_\varepsilon(i,s)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$.

Пусть для наглядности

$$\mu_\varepsilon(i,s)=\mu(i,s)/\varepsilon, \quad i=\overline{1,r_1}, \quad s=\overline{1,n}.$$

Система отказывает тогда, когда одновременно неисправны $m+1$ элементов, $0<m<n$.

Задача состоит в том, чтобы найти предельное распределение момента первого отказа системы при $\varepsilon\to 0$.

Зададим векторный марковский процесс

$$Z_\varepsilon(t)=\{\ X(t),Y_\varepsilon(t)\ \}$$

с множеством состояний

$$\{\ (i,s),\ i=\overline{1,r_1},\ s=\overline{0,n}\ \}$$

где

$X(t)$ - управляющая цепь Маркова,

$Y_\varepsilon(t)$ - количество неисправных элементов в момент времени t.

Выделим из множества состояний подмножество состояний

$$\langle\ \alpha_m\ \rangle = \{\ (i,s),\ i=\overline{1,r_1},\quad s=\overline{0,m},\ \}.$$

Через $\Omega_\varepsilon(m)$ обозначим момент первого отказа системы, т. е.

$$\Omega_\varepsilon(m)\ =\ \inf(\ t\ :\ Y_\varepsilon(t)=m+1\ /\ Y_\varepsilon(0)\le m\ ).$$

Тогда $\Omega_\varepsilon(m)$ - это момент первого выхода $Z_\varepsilon(t)$ из $\langle \alpha_m \rangle$.

Вычислим характеристики $Z_\varepsilon(t)$, $t\ge 0$. Нетрудно убедиться в том, что на малом промежутке времени $(t,t+h)$ возможны следующие переходы

$$
(i,s) \xrightarrow{h}
\begin{cases}
(j,s) & \text{с вероятностью } a_{ij}h + o(h), \quad i\ne j, \\
(i,s+1) & \text{с вероятностью } (n-s)\lambda(i,s)h + o(h), \quad 0\le s<n, \\
(i,s-1) & \text{с вероятностью } (S_r\mu(i,s)/\varepsilon)h + o(h), \quad 1\le s\le n, \\
(i,s) & \text{с вероятностью} \\
 & 1-h[(n-s)\lambda(i,s)+S_r\mu(i,s)/\varepsilon+a_{ii}]+o(h),
\end{cases}
$$

где $S_r=\min(s,r)$. При этом в состоянии (i,s) цепь сидит показательное время $\tau_\varepsilon(i,s)$ с параметром

$$(n-s)\lambda(i,s)+S_r\mu(i,s)/\varepsilon+a_{ii}.$$

Отсюда вероятности перехода для вложенной цепи Маркова имеют вид

$$p_\varepsilon[(i,s),(j,s)]=a_{ij}/[(n-s)\lambda(i,s)+S_r\mu(i,s)/\varepsilon+a_{ii}], \quad s=\overline{1,n},$$

$$p_\varepsilon[(i,0),(j,0)]=a_{ij}/[n\lambda(i,0)+a_{ii}],$$

$$p_\varepsilon[(i,s),(i,s+1)]=(n-s)\lambda(i,s)/[(n-s)\lambda(i,s)+S_r\mu(i,s)/\varepsilon+a_{ii}],$$
$$s=\overline{1,n-1},$$

$$p_\varepsilon[(i,0),(i,1)]=n\lambda(i,0)/[n\lambda(i,0)+a_{ii}],$$

$$p_\varepsilon[(i,s),(i,s-1)]=S_r\mu(i,s)/[\varepsilon\{(n-s)\lambda(i,s)+S_r\mu(i,s)/\varepsilon+a_{ii}\}],$$
$$s=\overline{1,n}.$$

Из полученных формул следует, что при $\varepsilon\to 0$

$$p_\varepsilon[(i,s),(j,s)]=o(1),$$

$$p_\varepsilon[(i,s),(i,s+1)]=(\varepsilon(n-s)\lambda(i,s)/S_r\mu(i,s))(1+o(1)),$$
$$s=\overline{1,n-1},$$

$$p_\varepsilon[(i,s),(i,s-1)]=S_r\mu(i,s)/[\varepsilon\{(n-s)\lambda(i,s)+S_r\mu(i,s)/\varepsilon+a_{ii}\}],$$
$$s=\overline{1,n}.$$

$$p_\varepsilon[(i,0),(j,0)]=a_{ij}/[n\lambda(i,0)+a_{ii}],$$

$$p_\varepsilon[(i,0),(i,1)]=n\lambda(i,0)/[n\lambda(i,0)+a_{ii}].$$

Отсюда вытакает справедливость условий примера 3.1.1. при этом роль нулевого уровня играет множество

$$X_0=\{(i,0),(i,1),\ i=\overline{1,r_1}\},$$

а роль q-го уровня

$$X_q=\{(i,q+1),i=\overline{1,r_1}\}.$$

Так как нулевой уровень в пределе образует один существенный класс, то вероятности $\Pi_0(i,0)$, $\Pi_0(i,1)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\Pi_0(j,0)=\sum_{i\neq j}\Pi_0(i,0)a_{ij}/(n\lambda(i,0)+a_{ii})+\Pi_0(j,1), \tag{1}$$

$$\Pi_0(j,1)=\Pi_0(j,0)n\lambda(j,0)/(n\lambda(j,0)+a_{jj}),\quad j=\overline{1,r_1}. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\Pi_0(j,0)a_{jj}/(n\lambda(j,0)+a_{jj}) = \sum_{i\neq j}\Pi_0(i,0)a_{ij}/(n\lambda(i,0)+a_{ii}).$$

Обозначим через

Π_k, $k=\overline{1,r_1}$ - стационарное распределение цепи $X(t)$, $t\geq 0$.

Поскольку,

$$\Pi_j a_{jj} = \sum_{i\neq j}\Pi_i a_{ij},\qquad j=\overline{1,r_1},$$

то имеем, что

$$\Pi_o(i,0)=B\Pi_i(n\lambda(i,0)+a_{ii}),$$

$$\Pi_o(i,1)=Bn\lambda(i,0)\Pi_i,\quad i=\overline{1,r_1},$$

где

$$B=[\sum_{k=1}^{r_1}\Pi_k(\;2n\lambda(k,0)\;+\;a_{kk})]^{-1}.$$

Обозначим через

$\Pi_\varepsilon(i,q)$ – стационарное распределение для цепи с матрицей

$$\left\| \frac{p_\varepsilon[(i,s),(j,z)]}{1-\sum\limits_{k=1}^{r}p_\varepsilon[(i,s),(k,m+1)]} \right\|,\quad i,j=\overline{1,r_1},\quad s,z\le m.$$

Теперь согласно формулам (1), (2) в § 3.1. получим

$$\Pi_\varepsilon(i,q)=\varepsilon^{q-1}B\Pi_i n\lambda(i,0)\prod_{s=1}^{q-1}\frac{(n-s)\lambda(i,s)}{S_r\mu(i,s)}(1\;+\;o(1)\;),$$

$$q\ge1,\quad \prod_{s=1}^{0}=1,$$

а стационарная вероятность выхода из подмножества $\langle\,\alpha_m\,\rangle$ равна

$$g_\varepsilon(\langle\alpha\rangle)=\varepsilon^m nB\sum_{i=1}^{r_1}\Pi_i\lambda(i,0)\prod_{s=1}^{m}\frac{(n-s)\lambda(i,s)}{S_r\mu(i,s)}(1\;+\;o(1)\;).$$

Тогда, учитывая показательность распределения величин $\tau_\varepsilon(i,s)$ легко получим, что при фиксированном θ

$$M\;\exp\{i\varepsilon^m\theta\tau_\varepsilon(j,0)\}=1+(\varepsilon^m\theta i/(n\lambda(j,0)+a_{jj})(1+o(1)),$$

$$M\;\exp\{i\varepsilon^m\theta\tau_\varepsilon(j,s)\}=1+o(\varepsilon^m),\quad s>0.$$

Отсюда, согласно следствию 3.1.1. легко получить следующу теорему.

Теорема 3.2.1. При указанных выше предположениях распределение величины $\varepsilon^m \Omega_\varepsilon(m)$ независимо от начального состояния системы, слабо сходится к показательному с параметром Λ, где

$$\Lambda=n \sum_{i=1}^{r_1} \Pi_i \lambda(i,0) \prod_{s=1}^{m} \frac{(n-s)\lambda(i,s)}{S_r \mu(i,s)} . \qquad (3)$$

Следовательно, для момента первого отказа системы имеет место

$$P(\Omega_\varepsilon(m)>t) \simeq \exp(-\varepsilon^m \Lambda t).$$

Отметим в частности, что для системы M/M/r с конечным числом источников значение Λ имеет вид

$$\Lambda=n\lambda \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \prod_{s=1}^{m} \frac{(n-s)}{S_r} . \qquad (4)$$

Для этой же системы аналогичний параметр Λ, соответствующий величине $\varepsilon^{r+m}\Omega_\varepsilon(r+m)$, равен

$$\Lambda= \lambda \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{m+r} \binom{n}{r+m+1} \frac{(r+m+1)!}{r!r^m} . \qquad (5)$$

Известно, что если $n\to\infty$ и $\lambda\to 0$ так, что $n\lambda\to\lambda'$, то стационарное распределение системы M/M/r с конечным числом источников, совпадает с распределением системы M/M/r с пуассоновским входящим потоком с параметром λ' и одинаковыми приборами с интенсивностью обслуживания μ. Действительно, из (5) при $n\to\infty$, $\lambda\to 0$, $n\lambda\to\lambda'$ легко получить

$$\Lambda = \frac{1}{r!r^m}\lambda'\left(\frac{\lambda'}{\mu}\right)^{r+m}$$

что согласуется с [10 стр. 157].

Исследуем поведение потока моментов отказа системы. Пусть $\nu_\varepsilon(t)$ - количество отказов системы на промежутке $[0,t]$. Поскольку суммарная вероятность перейти с уровня s на уровни $q<s$, при $s\ge 1$ стремится к единице, то отсюда следует что с вероятностью, близкой к единице, требование, следующее за отказом системы, поступит в пустое ремонтное устройство (все элементы исправны). После этого следующий отказ системы будет через время $\Omega_\varepsilon(m)$. Так как предельное распределение не зависит от начального состояния системы, то отсюда следует асимптотическая независимость нормированных промежутков времени между последовательными отказов системы. Следовательно, при $\beta_\varepsilon=\varepsilon^m$ можно использовать теорему 3.1.2. Справедлива следующая

Теорема 3.2.2. Конечномерные распределения процесса $\nu_\varepsilon(\varepsilon^{-m}t)$ (поток отказов системы) слабо сходятся к соответствующим распределениям пуассоновского процесса с параметром (3).

§ 3.2. Система $\vec{M}_u/\vec{M}_u/r/FIFO$

В этом параграфе мы исследуем восстаналиваемую систему с разнотипными элементами.

Рассмотрим марковскую систему, состоящую из n элементов. Каждый из этих элементов с течением времени отказывает, сразу же после отказа идет в ремонтное устройство, состоящее из r обслуживающих приборов. Неисправные элементы восстанавливаются в порядке отказов. Если в момент прихода элемента все приборы заняты восстановлением, то этот элемент становится в очередь. По окончании восстановления элемент мгновенно возвращается на свое место, сразу включается в работу, потом снова отказывает и. т. д..

Предположим, что элементы работают в некоторой случайной среде, управляемой состояниями эргодической цепи Маркова ($X(t)$, $t\geq 0$), заданной на конечном множестве состояний $\{ 1,2,\dots,r_1 \}$ с матрицей интенсивностей вероятностей переходов

$$\{ a_{ij},\ i,j=\overline{1,r_1},\ a_{ii}=\sum_{j\neq i} a_{ij} \}.$$

Причем если $X(t)=i$ и в ремонтном органе в момент t находится s элементов с номерами $k_1,k_2,\dots,k_s$, то вероятность отказа j-го элемента на участке $(t,t+h)$ равна

$$\lambda_j(i:k_1,\dots,k_s)h + o(h),\ j\in\{ 1,\dots,n \}\setminus\{ k_1,\dots,k_s \},$$

а вероятность восстановления j-го элемента на участке $(t,t+h)$ равна

$$\mu_j(i:k_1,\dots,k_s,\varepsilon)h + o(h),$$
$$j=k_1,\dots,k_{\min(s,r)}.$$

Случайную среду и все случайные величины будем считать независимыми.

Предположим, что восстановления элементов происходят асимптотически " быстро ", т.е. $\mu_j(i:k_1,\dots,k_s,\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$.

Пусть для наглядности

$$\mu_j(i:k_1,\dots,k_s:\varepsilon)=\mu_j(i:k_1,\dots,k_s)/\varepsilon.$$

Система отказывает тогда, когда одновременно неисправны $m+1$ элементов, $0<m<n$.

Задача состоит в том, чтобы найти предельное распределение момента первого отказа системы при $\varepsilon\to 0$.

Зададим векторный марковский процесс

$$Z_\varepsilon(t)=\{\ X(t):Y_\varepsilon(t);\gamma_1(t),\gamma_2(t),\dots,\gamma_{Y_\varepsilon(t)}(t)\ \}$$

с множеством состояний

$$\{(i:s;k_1,\dots,k_s),\ i=\overline{1,r_1},\ s=\overline{0,n},\ (k_1,\dots,k_s)\in V_n^s,\ k_0=0\ \},$$

где

$X(t)$ - управляющая цепь Маркова,

$Y_\varepsilon(t)$ - количество неисправных элементов в момент времени t,

$\gamma_1(t),\dots,\gamma_{Y_\varepsilon(t)}(t)$ - номера неисправных элементов в момент времени t в порядке их отказов.

Выделим из множества состояний подмножество состояний

$$\langle \alpha_m \rangle = \{ (i:q;k_1,\dots k_q),\ i=\overline{1,r_1},\ q=\overline{0,m},\ (k_1,\dots,k_q)\in V_n^q \}.$$

Через $\Omega_\varepsilon(m)$ обозначим момент первого отказа системы, т. е.

$$\Omega_\varepsilon(m) = \inf(\ t : Y_\varepsilon(t)=m+1 \ /\ Y_\varepsilon(0)\le m\ ).$$

Тогда $\Omega_\varepsilon(m)$ - это момент первого выхода $Z_\varepsilon(t)$ из $\langle \alpha_m \rangle$.

Положим

$$a_{ii}+\sum_{j\ne k_1,\dots,k_s}\lambda_j(i:k_1,\dots,k_s)+\sum_{j=1}^{\min(s,r)}\mu_{k_j}(i:k_1,\dots,k_s)$$
$$= R(i:s;k_1,\dots,k_s).$$

Тогда в состоянии $(i:s;k_1,\dots,k_s)$ процесс $Z_\varepsilon(t)$ сидит показательное время $\tau_\varepsilon(i:s;k_1,\dots,k_s)$ с параметром $R(i:s;k_1,\dots k_s)$.

Нетрудно убедиться в том, что вероятности переходов для вложенной цепи Маркова имеют вид /при $\varepsilon\to0$ /

$$p_\varepsilon[(i:s;k_1,\dots,k_s),(j:s;k_1,\dots,k_s)]= o(1),\quad s\ge1,$$

$$p_\varepsilon[(i:s;k_1,\dots,k_s),(i:s+1;k_1,\dots,k_s,k_{s+1})]=$$
$$=(\lambda_{k_{s+1}}(i:k_1,\dots,k_s)\varepsilon/\sum_{j=1}^{\min(s,r)}\mu_{k_j}(i:k_1,\dots,k_s))(1+o(1)),$$

$$p_\varepsilon[(i:0;0),(j:0;0)]= a_{ij}/R(i:0;0),$$

$$p_\varepsilon[(i:0;0),(i:1;k)]= \lambda_k(i:0)/R(i:0;0).$$

Проведем теперь рассуждения, аналогичные рассуждениям предыдущего параграфа.

Разобьем все множество состояний вложенной цепи на уровни

$$X_0=\{\ (i:0;0),(i:1;k),\ i=\overline{1,r_1},\ k=\overline{1,n}\ \}$$

- нулевой уровень,

$$X_q=\{(i:q+1;k_1,\dots,k_{q+1}),i=\overline{1,r_1},(k_1,\dots,k_{q+1})\in V_n^{q+1}\}$$

- q-й уровень.

Так как нулевой уровень в пределе образует один существенный класс, то вероятности $\Pi_0(i:0;0)$, $\Pi_0(i:1;k)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\Pi_0(i:0;0) = \sum_{j\neq i}\Pi_0(j:0;0)a_{ji}/R(j:0;0) + \sum_{k=1}^{n}\Pi_0(i:1;k), \qquad (1)$$

$$\Pi_0(i:1;k)= \Pi_0(i:0;0)\lambda_k(i:0)/R(i:0;0), \qquad (2)$$

где

$\Pi_\varepsilon(i:s;k_1,\dots,k_s)$ - стационарное распределение для цепи с матрицей

$$\left\| \frac{p_\varepsilon[(i:q;k_1,\dots,k_q),(j:z;k_1,\dots,k_z]}{1-\sum\limits_{s=1}^{r_1}\ \sum\limits_{(k_1,\dots,k_{m+1})\in V_n^{m+1}} p_\varepsilon[(i:q;k_1,\dots,k_q),(s:m+1;k_1,\dots,k_{m+1})]} \right\|$$

$$i,j=\overline{1,r_1},\quad (k_1,\dots,k_p)\in V_N^p,\ p=q,z,\ q,z\le m.$$

Обозначим через

Π_i, $i=\overline{1,r_1}$ - стационарное распеделение управляющей цепи $(\ X(t),\ t\ge 0\ )$.

При этом

$$\Pi_i a_{ii} = \sum_{j\neq i} \Pi_j \ a_{ji}, \qquad j=\overline{1,r_1}. \qquad (3)$$

Нетрудно убедиться в том, что решением (1),(2) при (3) является

$$\Pi_o(i:0;0) = B\Pi_i R(i:0;0),$$

$$\Pi_o(i:1;k) = B\Pi_i \lambda_k (i_1:0),$$

где

$$B = [\sum_{i=1}^{r_1} \Pi_i (2\sum_{j=1}^{n} \lambda_j (i:0) + a_{ii})]^{-1}.$$

Теперь, согласно (1), (2) в § 3.1. получим

$$\Pi_\varepsilon(i:q;k_1,\ldots k_q) = \varepsilon^{q-1} B\Pi_i \frac{\prod_{s=0}^{q-1} \lambda_{k_{s+1}} (i:k_1,\ldots,k_s)}{\prod_{s=1}^{q-1} \sum_{j=1}^{\min(s,r)} \mu_{k_j}(i:k_1,\ldots,k_s)} (1+o(1)), \quad q>1,$$

а стационарная вероятность выхода из подмножества $\langle \alpha_m \rangle$ равна

$$g_\varepsilon(\langle\alpha_m\rangle) = \varepsilon^m B \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{(k_1,\ldots,k_{m+1})\in V_n^{m+1}} \Pi_i \frac{\prod_{s=0}^{m} \lambda_{k_{s+1}} (i:k_1,\ldots,k_s)}{\prod_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{\min(s,r)} \mu_{k_j}(i:k_1,\ldots,k_s)} \times$$

$$\times (1+o(1)).$$

Тогда, учитывая показательность $\tau_\varepsilon(i:s;k_1,\ldots k_s)$ легко получим при фиксированном θ

$$M\ \exp(i\varepsilon^m\theta\tau_\varepsilon(i:0;0))=1+(\varepsilon^m\theta i/R(i:0;0))(1+o(1)),$$

$$M\ \exp(i\varepsilon^m\theta\tau_\varepsilon(i:s;k_1,\ldots,k_s))=1+o(\varepsilon^m),\quad s>0,\quad (k_1,\ldots,k_s)\in V_n^s.$$

Используя следствие 3.1.1. непосредственно получим следующую теорему

Теорема 3.3.1. При указанных выше предположениях распределение величины $\varepsilon^m\Omega_\varepsilon(m)$ независимо от начального состояния системы, слабо сходится к показательному с параметром Λ, где

$$\Lambda=\sum_{i=1}^{r_1}\ \sum_{(k_1,\ldots,k_{m+1})\in V_n^{m+1}}\Pi_i\ \frac{\prod\limits_{s=0}^{m}\lambda_{k_{s+1}}(i:k_1,\ldots,k_s)}{\prod\limits_{s=1}^{m}\ \sum\limits_{j=1}^{\min(s,r)}\mu_{k_j}(i:k_1,\ldots k_s)}. \qquad (4)$$

В частности, при

$$r=1,\ \lambda_j(i:k_1,\ldots,k_s)=\lambda_j(i:s),\qquad \mu_j(i:k_1,\ldots,k_s)=\mu_j(i:s)$$

получим

$$\Lambda=\sum_{i=1}^{r_1}\ \sum_{(k_1,\ldots,k_{m+1})\in V_n^{m+1}}\Pi_i\ \frac{\prod\limits_{s=0}^{m}\lambda_{k_{s+1}}(i:s)}{\prod\limits_{s=1}^{m}\ \mu_{k_1}(i:s)},$$

которое получено в [141, 144].

В случае

$$\lambda_j(i:k_1,\ldots,k_s)=\lambda_j(i),\qquad \mu_j(i:k_1,\ldots,k_s)=\mu(i:s)$$

(4) имеет вид

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{(k_1,\ldots,k_{m+1})\in V_n^{m+1}} \Pi_i \frac{\prod_{s=0}^{m} \lambda_{k_{s+1}}(i)}{\prod_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{\min(s,r)} \mu(i:j)},$$

это выражение получено в [143].

Заметим также, что конечномерные распределения процесса $\nu_\varepsilon(\varepsilon^{-m}t)$ (поток отказов системы) слабо сходятся к распределениям пуассоновского процесса с параметром (4).

Рассмотрим тепеь аналогичную систему, с тем отличием, что элементы работают в некоторой случайной среде, управляемой состояниями эргодической цепи Маркова ($X_1(t)$, $t\ge 0$), заданной на конечном множестве состояний $\{ 1,2,\ldots,r_1 \}$ с матрицей интенсивностей вероятностей переходов

$$\{ a_{i_1 j_1},\ i_1,j_1=\overline{1,r_1},\ a_{i_1 i_1} = \sum_{j\ne i_1} a_{i_1 j} \}.$$

Причем если $X_1(t)=i_1$ и в ремонтном органе в момент t находится s элементов с номерами $k_1,k_2,\ldots,k_s$, то вероятность отказа j-го элемента на участке $(t,t+h)$ равна

$$\lambda_j(i_1:k_1,\ldots,k_s)h + o(h),\ j\in\{ 1,\ldots,n \}\setminus\{ k_1,\ldots,k_s \}.$$

Аналогично, предположим что ремонтное устройство функционирует в некоторой случайной среде, управляемой состояниями эргодической цепи Маркова ($X_2(t)$, $t\ge 0$), заданной на конечном множестве состояний $\{ 1,\ldots,r_2 \}$ с матрицей интенсивностей вероятностей переходов

$$\{ b_{i_2 j_2},\ i_2,j_2=\overline{1,r_2},\ b_{i_2 i_2} = \sum_{j\ne i_2} b_{i_2 j} \}.$$

Причем если $X_2(t)=i_2$ и в ремонтном органе в момент t находится s элементов с номерами $k_1,\dots,k_s$, то вероятность восстановления j-го элемента на участке $(t,t+h)$ равна

$$\mu_j(i_2:k_1,\dots,k_s,\varepsilon)h + o(h),$$
$$j=k_1,\dots,k_{\min(s,r)}.$$

Случайные среды и все случайные величины будем считать независимыми.

Предположим, что восстановления элементов происходят асимптотически " быстро ", т.е. $\mu_j(i_2:k_1,\dots,k_s,\varepsilon)\to\infty$ при $\varepsilon\to 0$.

Пусть для наглядности

$$\mu_j(i_2:k_1,\dots,k_s:\varepsilon)=\mu_j(i_2:k_1,\dots,k_s)/\varepsilon.$$

Система отказывает тогда, когда одновременно неисправны $m+1$ элементов, $0<m<n$.

Задача состоит в том, чтобы найти предельное распределение момента первого отказа системы при $\varepsilon\to 0$.

Обозначая через

$$(\Pi^{(1)}_{i_1},\ i_1=\overline{1,r_1}),\ (\Pi^{(2)}_{i_2},\ i_2=\overline{1,r_2})$$

стационарные распределения управляющих цепей Маркова используя результат теоремы 3.3.1. нетрудно убедиться в том, что распределение величины $\varepsilon^m\Omega_\varepsilon(m)$ независимо от начального независимо от начального состояния системы, слабо сходится к показательному с параметром Λ,

где

$$\Lambda=\sum_{i_1=1}^{r_1}\ \sum_{i_2=1}^{r_2}\ \sum_{(k_1,\dots,k_{m+1})\in V_N^{m+1}} \Pi_{i_1}^{(1)}\Pi_{i_2}^{(2)}\frac{\prod\limits_{s=0}^{m}\lambda_{k_{s+1}}(i_1:k_1,\dots,k_s)}{\prod\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{\min(s,r)}\mu_{k_j}(i_2:k_1,\dots k_s)}.$$

Результаты настоящего параграфа опубликованы в [141-144].

Глава 4

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ $\vec{G}/\vec{G}/r/FIFO$

Статистическое моделирование как метод исследования относитя к классу численных методов, т. е. результат моделирования представляется в виде численных значений величин, оценивающих эффективность исследуемой системы при заданных параметрах. Особенно эффективно применение имитации на ЭВМ при изучении сложных систем, когда невозможно в аналитической форме описать процесс функционирования систем. Основным недостатком данного метода является большие затраты машинного времени при решении конкретных задач. Данный способ находит широкое применение при моделировании сравнительно небольших систем, в частности СМО [см. 23, 30, 33, 54, 56, 62, 69, 78, 107, 127]. Метод статистического моделирования стал самым распространенным вычислительным методом решения задач теории МО. Однако, специалисты считают, что моделирование системы целесообразно производить только в тех случаях, когда аналитическое исследование невозможно.

В настоящей главе рассмотрена общая модель системы массового обслуживания с конечным числом источников - система типа $\vec{G}/\vec{G}/r/FIFO$. Как показали предыдущие результаты оценить характеристики этой системы в явном виде невозможно. Даже в случае $\vec{M}/\vec{M}/1/FIFO$ требуется использовать численные методы. С помощью статистического моделирования получены оценки основных характеристик системы. Приведен ряд примеров численных расчетов и проверяются аналитические результаты, доказанные в предыдущих параграфах.

Моделирование случайных чисел с различными законами распределения

Для получения случайных чисел исследователь может воспользовать специальными таблицами либо прибегнуть к выработке случайных чисел с помощью физических генераторов, либо применить аналитические методы [см. 12, 34, 78]. Система математического обеспечения ЕС ЭВМ содержит программный генератор RANDU для получения реализации случайной величины равномерно распределенной на отрезке [0,1] в соответствии с мультипликативным алгоритмом [см. 34, 78]. С помощью независимых реализаций $U_1,\ldots,U_k$ этой случайной величины можно получить следующие законы распределения.

1. Равномерное распределение на отрезке [a,b].

Выборочное значение:

$$x=a+(b-a)U_1.$$

2. Распределение Эрланга порядка k с плотностью

$$f(x)=\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!},\quad x\ge 0.$$

Выборочное значение:

$$x=-\frac{1}{\lambda}\ln\prod_{i=1}^{k}U_i\ .$$

В частности, для показательного распределения получим

$$x=-\frac{1}{\lambda}\ln U_1\ .$$

3. Нормальное распределение с параметрами (m,σ^2).

Выборочное значени:

$$x=m+\sigma\,[-2\ln(U_1)^{1/2}\cos(2U_2)\,].$$

4. Бета-распределение с параметрами (α,β) $(\alpha>0,\beta>0)$

с плотностью

$$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\ ,\quad 0\le x\le 1.$$

Выборочное значение:

$$x=\frac{U_1^{\;1/\alpha}}{U_1^{\;1/\alpha}+U_2^{\;1/\beta}}\ ,\quad U_1^{\;1/\alpha}+U_2^{\;1/\beta}\le 1.$$

Статистическое моделирование системы $\vec{G}/\vec{G}/r/FIFO$

Бригада из r рабочих обслуживает n разнотипных машин. Каждая из этих машин в случайные моменты времени может потребовать к себе внимания рабочего. Длительность безотказной работы i-й машины имеет функцию распределения $F_i(x)$, $i=\overline{1,n}$. Если в момент отказа i-й машины имеются свободные ремонтники (обслуживающие приборы), то немедленно начинается ее обслуживание, в противном случае машина становится последней в очередь на обслуживание. Предполагается, что длительность обслуживания i-й машины имеет функцию распределения $G_i(x)$, $i=\overline{1,n}$. Все случайные величины будем считать независимыми. Предпологается, что в началый моменте все n машины исправны.

Структурная схема алгоритма моделирования приведена на рис.4.1. и приняты следующие обозночения:

INEXT- номер машины, участвующей в следующем событии,

TNEXT- время следующего события,

TIMLIM- продолжительность времени моделирования.

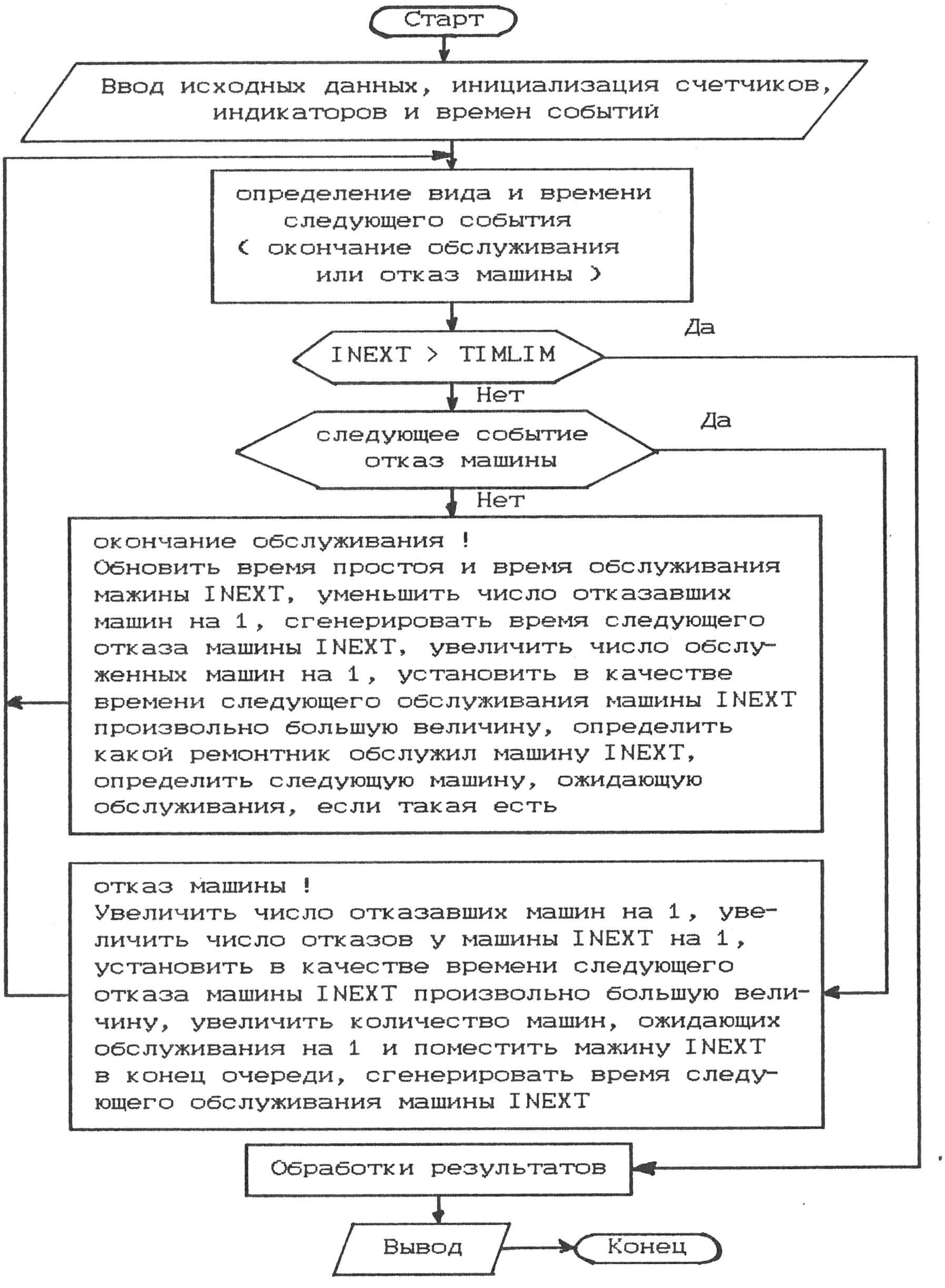

Рис. 4.1. Блок-схема алгоритма

Оценки основных характеристик системы

(i) Производительность машины

$$U_i = \frac{\text{суммарное время пребывания } i\text{-й машины в неисправном состоянии}}{\text{продолжительность времени моделирования}} .$$

(ii) Эффективность обслуживающего прибора

$$U_j^* = \frac{\text{суммарное время пребывания } j\text{-го прибора в занятом состоянии}}{\text{продолжительность времени моделирования}} .$$

(iii) Среднее время пребывания в центре обслуживания

$$R_i = \frac{\text{суммарное время пребывания } i\text{-й машины в неисправном состоянии}}{\text{число отказов } i\text{-й машины}} .$$

(iv) Среднее время ожидания

$$W_i = \frac{\text{суммарное время ожидания } i\text{-й машины}}{\text{число отказов } i\text{-й машины}} .$$

(v) Среднее число неисправных машин

$$\bar{n} = n - \sum_{i=1}^{n} U_i .$$

(vi) Среднее число занятых приборов

$$\bar{r} = \sum_{j=1}^{r} U_j^* .$$

Численные примеры

Программа, реализующая алгоритм, написана на языке FORTRAN для ЕС ЭВМ. Результаты вычислений сведены в Таблицах 1-3.

Случай 1.

Входные параметры

$n=5 \quad r=2 \quad TIMLIM=400$

Распределение длительности бесотказной работы:

для машины 1 - показательное с параметром 10,

для машины 2 - нормальное с параметрами 5, 1,

для машины 3 - равномерное на отрезке [0.10, 0.40],

для машины 4 - эрланговское порядка 2 с параметром 20,

для машины 5 - эрланговское порядка 2 с параметром 40.

Распределение длительности обслуживания - показательное с параметром 0.70 для всех машин.

Оценки характеристик системы

номер машины	U_i теорет. значение	U_i имитац. значение	R_i теорет. значение	R_i имитац. значение	W_i теорет. значение	W_i имитац. значение
1	0.0323	0.0325	2.9959	2.9997	1.5674	1.5266
2	0.5918	0.5920	3.4488	3.3999	2.2202	2.2147
3	0.0760	0.0775	3.0394	2.9999	1.6109	1.5139
4	0.0304	0.0323	2.9959	2.9605	1.5674	1.4862
5	0.0157	0.0164	2.9987	2.9164	1.5702	1.6064
	$\bar{n}=$ 4.25	4.25				

Таблица 1.

Случай 2.

Входные параметры

$n=3 \quad r=1 \quad TIMLIM=400$

Распределение длительности безотказной работы:

для машины 1 - показательное с параметром 0.50,

для машины 2 - показательное с параметром 0.40,

для машины 3 - показательное с параметром 0.30.

Распределение длительности обслуживания :

для машины 1 - показательное с параметром 0.90,

для машины 2 - показательное с параметром 0.70,

для машины 3 - показательное с параметром 0.60.

Оценки характеристик системы

номер машины	U_i		R_i		W_i	
	теорет. значение	имитац. значение	теорет. значение	имитац. значение	теорет. значение	имитац. значение
1	0.4636	0.4992	2.3140	2.1087	1.2029	1.0537
2	0.4934	0.4984	2.5668	2.5722	1.1383	1.2655
3	0.5529	0.5516	2.6954	2.6375	1.0288	0.9076

$U=0.8110 \quad 0.7991 \qquad \bar{n}=1.49 \quad 1.45$

Таблица 2.

Случай 3.

Входные параметры

$n=5 \quad r=2 \quad TIMLIM=400$

Распределение длительности безотказной работы:

для машины 1 - показательное с параметром 1,

для машины 2 - нормальное с параметрами 2, 0.1,

для машины 3 - нормальное с параметрами 3, 0.2,

для машины 4 - равномерное на отрезке [0.30, 0.90],

для машины 5 - Бета с параметрами 0.30, 0.40.

Распределение длительности обслуживания -

для машины 1 - равномерное на отрезке [0.10, 0.90],

для машины 2 - показательное с параметром 1.5,

для машины 3 - Бета с параметрами 0.70, 1,

для машины 4 - показательное с параметром 1.9,

для машины 5 - показательное с параметром 2.30.

Оценка характеристик системы

номер машины	U_i	R_i	W_i
1	0.5855	0.6685	0.1808
2	0.6980	0.8691	0.1581
3	0.8431	0.5603	0.1357
4	0.4768	0.6707	0.1115
5	0.4534	0.5385	0.1215

$U_1^{*}=0.8071$ $\quad U_2^{*}=0.7206$

$\bar{n}=1.94$ $\quad \bar{r}=1.53$

Таблица 3.

Выводы

Теоретические значения в Таблице 1 основаны на формулах § 1.1, а значения в Таблице 2 находятся в [90]. В Таблице 3 отражено поведение системы $\vec{G}/\vec{G}/r/FIFO$. Можно увидеть, что теоретические характеристики системы почти совпадают с соответсвующими характеристиками, полученными с помощью статистического моделирования.

З а к л ю ч е н и е

В работе получены следующие новые результаты:

- исследованы модели СМО $\vec{G}/M/r/FIFO$, $\vec{G}/M/r/SIRO$ с переменной скоростью обслуживания и найдены в явном виде стационарные распределения вероятностей состояний систем;

- приведены эффективные вычислительные алгоритмы для вычисления основных стационарных характеристик систем $\vec{M}/\vec{M}/1/PPS$, $\langle (m,n)/\vec{M}/\vec{M}/1/FIFO \rangle$, $\vec{M}/\vec{G}/1/FIFO$;

- развит принцип монотонных траекторий и, используя этот принцип, изучено асимптотическое поведение момента первого отказа переключаемых марковских систем с быстрым обслуживанием и предельное распределение потока моментов отказов системы;

- с помощью статистического моделирования получены оценки основных характеристик системы $\vec{G}/\vec{G}/r/FIFO$.

В практическом плане результаты диссертации могут быть использованы при решении задач, связанных с изучением функционирования производственных процессов, вычислительных систем с диалоговым режимом работы и сложных восстанавливаемых систем.

Список литературы

1. **Авен О.И., Коган Я.А.,** Управление вычислительным процессом в ЭВМ. -М.: Энергия, 1978, 240 с.
2. **Аладышев В.П., Винниченко А.И., Литвин В.Г.,** Анализ производительности мультипрограммных ЭВМ. -М.: Финансы и статистика, 1984, 160 с.
3. **Анисимов В.В.,** Предельные распределения функционалов от полумарковского процесса, заданных на фиксированном множестве состояний до момента первого выхода // Докл. АН СССР, 1970, No 4, с.743-745.
4. **Анисимов В.В.,** Предельные теоремы для сумм случайных величин, заданных на счетном подмножестве состояний цепи Маркова до момента выхода, в схеме серий // Теория вероятностей и мат. статистика, 1971, Вып. 4, с.18-26.
5. **Анисимов В.В.,** Предельные теоремы для сумм случайных величин, заданных на подмножестве состояний цепи Маркова до момента выхода // Теория вероятностей и мат. статистика, 1973, Вып. 8, с.3-14.
6. **Анисимов В.В.,** Предельные теоремы для случайных процессов и их применение к дискретным схемам суммирования. -К.: Выща школа, 1976, 80 с.
7. **Анисимов В.В., Лукашук Л.И.,** Асимптотический анализ многомерных характеристик марковских систем обслуживания // Кибернетика, 1984, No 4, с.82-88.

8. **Анисимов В.В., Зайнутдинов Г.Ф.,** Предельные распределения для момента 1-й потери требования управляемых марковских систем обслуживания с приоритетами // Докл. АН УССР, Сер. А, 1984, No 7, с.67-70.

9. **Анисимов В.В.,** Асимптотические методы анализа стохастических систем. -Тбилиси: Мецниереба, 1984, 180с.

10. **Анисимов В.В., Закусило О.К., Донченко В.С.,** Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем. -К.:Выша школа, 1987, 248 с.

11. **Анисимов В.В.,** Случайные процессы с дискретной компонентной, Предельные теоремы. -К.:Выша школа,1988, 183 с.

12. **Апанасович В.В., Тихоненко О.М.,** Цифровое моделирование стохастических систем. -Минск: Университетское, 1986, 127 с.

13. **Артомонов Г.Т., Брехов О.М.,** Аналитические вероятностные модели функционирования ЭВМ. -М.:Энергия, 1987, 368 с.

14. **Артамонов Г.Т.,** Анализ производительности ЦВМ методами теории массового обслуживания. -М.: Энергия,1972,173 с.

15. **Башарин Г.П., Громов А.И.,** Матричный метод нахождения стационарного распределения для некоторых СМО // Автоматика и телемеханика, 1978, No 1, с.29-39.

16. **Башарин Г.П., Толмачев А.Л,** Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем // Итоги науки и техники. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. Кибернетики. -М.:ВИНИТИ, 1983, Т.21, с.3-119.

17. **Баруча-Рид А.Т.,** Элементы теории марковских процессов и их приложения. -М.:Наука, 1969, 511 с.

18. **Биллингсли П.,** Сходимость вероятностных мер. -М.:Наука, 1977, 352 с.

19. **Боровков А.А.,** Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. -М.:Наука, 1972, 368 с.

20. **Боровков А.А.,** Асимптотические методы в теории массового обслуживания. -М.:Наука, 1980, 381 с.

21. **Бронштейн О.И., Духовный И.М.,** Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах. -М.:Наука, 1976, 220 с.

22. **Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н.,** Лекции по теориям сложных систем. -М.:Сов. радио, 1973, 439 с.

23. **Бусленко Н.П.,** Моделирование сложных систем, -М.:Сов. радио, 1973, 439 с.

24. **Гилевич Я.,** Предельное поведение момента потери требования управляемых марковских систем массового обслуживания // Кибернетика, 1980, No 3, с.120-125.

25. **Гнеденко Б.В.,** О дублировании с восстановлением // Изв. АН СССР, Техн. киб., 1964, No 5, с.111-121.

26. **Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.,** Математические методы в теории надежности. -М.:Наука, 1965, 524 с.

27. **Гнеденко Б.В.** и др., Приоритетные системы обслуживания. -М.:Изд.-во МГУ, 1973, 448 с.

28. **Гнеденко Д.Б., Соловьев А.Д.,** Одна общая модель резервирования с восстановлением // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1974, No 6, с.113-118.

29. **Гнеденко Д.Б. Соловьев А.Д.,** Оценка надежности сложных восстанавливаемых систем // Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1975, No 3, с.121-128.

30. **Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.,** Введение в теорию массового обслуживания. -М.:Наука, 1966, 413 с., 1987, 336 с.

31. **Грищенко В.А.,** Предельное распределение для момента первой потери требования в системе массового обслуживания с полумарковским входящим потоком // Кибернетика, 1977, No 2, с.113-119.

32. **Джейсуол Н.,** Очереди с приоритетом. -М.:Мир,1973,279 с.

33. **Ермаков С.М., Михайлов Г.А.,** Курс статистического моделирования. -М.:Наука, 1976, 319 с.

34. **Иванова В.М.,** Случайные числа и их применение. -М.:Финансы и статистика, 1984, 111 с.

35. **Ивченко Г.И., Каштанов Б.А., Коваленко И.Н.,** Теория массового обслуживания. -М.:Высшая школа, 1982, 256 с.

36. **Кабалевский А.Н.,** Малые ЭВМ, функциональное проектирование. -М.:Наука, 1986, 224 с.

37. **Каплан Е.И.,** Предельное распределение для момента выхода нестационарных случайных последовательностей // Докл. АН УССР, Сер. А, 1979, No 11, с.900-902.

38. **Карташов Н.В.,** Операторные методы оценки асимптотики моментов редких событий на траекториях общих цепей Маркова // Теория вероятностей и мат. статистика, 1984, 29, Вып. 3, с.612-613.

39. **Карташов Н.В.,** Оценки геометрической асимптотики моментов первого достижения для общих цепей Маркова // Теория вероятностей и мат. статистика, 1985, 30, Вып. 1, с. 202-203.

40. **Кениг Д., Штойан Д.,** Методы теории массового обслуживания. -М.:Радио и связь, 1981, 127 с.

41. **Клейнрок Л.,** Теория массового обслуживания. -М.:Машиностроение, 1979, 432 с.

42. **Клейнрок Л.,** Вычислительные системы с очередями. -М.:Мир, 1979, 600 с.

43. **Климов Г.П.,** Стохастические системы обслуживания. -М.:Наука, 1966, 244 с.

44. **Климов Г.П., Ляху А.К., Матвеев В.Ф.,** Математические модели систем с разделением времени. -Кишинев, Штиинца, 1983, 110 с.

45. **Коваленко И.Н.,** Теория массового обслуживания. -Итоги науки. Сер. Теория вероятностей, Мат. статистика, Теорет. кибернетика, 1970/1971, 8, с.1-110.

46. **Коваленко И.Н.,** Исследования по анализу надежности сложных систем. -К.:Наукова думка, 1975, 212 с.

47. **Коваленко И.Н.,** Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. -М.:Сов. радио, 1980, 208 с.

48. **Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М.,** Случайные процессы, Справочник. -К.:Наукова думка, 1983, 365 с.

49. **Кокс Д., Смит У.,** Теория очередей. -М.:Мир, 1966,137 с.

50. **Королюк В.С.,** Об асимптотическом поведении времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний // Укр. Мат. Журнал, 1969, Т.21, No 6, с.842-845.

51. **Королюк В.С., Турбин А.Ф.,** Полумарковские процессы и их применения. -К.: Наукова думка, 1976, 184 с.

52. **Королюк В.С., Турбин.,** Математические основы фазового укрупнения сложных систем. -К.: Наукова думка,1978,218 с.

53. **Королюк В.С., Турбин А.Ф.,** Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем. -К.: Наукова думка, 1982, 236 с.

54. **Крэйн М., Лемуан О.,** Введение в регенеративный метод анализа моделей. -М.: Наука, 1982, 104 с.

55. **Лебедев А.Н., Чернявский Е.А.,** Вероятностные методы в вычислительной технике. -М.: Высшая школа, 1986, 312 с.

56. **Лифшиц А.Л., Мальц Э.А.,** Статистическое моделирование систем массового обслуживания-М.: Сов. радио,1978,247 с.

57. **Лукашук Л.И.,** Предельное распределение для момента опустошения в однолинейной системе массового обслуживания с марковским входящим потоком // Докл. АН УССР, Сер. А., 1981, No 2, с.75-78.

58. **Риордан Дж.,** Стохастические системы обслуживания. -М.: Связь, 1966, 184 с.

59. **Саати Т.,** Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. -М.: Сов. радио, 1971, 520 с.

60. **Сильвестров Д.С.,** Предельные теоремы для сложных случайных функций. -К.: Выща школа, 1974, 320 с.

61. **Сильвестов Д.С.,** Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний. -М.: Сов. радио, 1980, 272 с.

62. **Соболь И, М.**, Численные методы Монте-Карло. -М.:Наука, 1978, 312 с.

63. **Соловьев А.Д.**, Резервирование с быстрым восстановлением // Изв. АН СССР, Сер. Техн. Кибернетика, 1970, No 1, с.56-71.

64. **Соловьев А.Д.**, Асимптотическое поведение момента первого наступления редкого события в регенерующем процессе // Изв. АН СССР, Сер. Техн. Кибернетика, 1971, No 6, с.79-89.

65. **Соловьев А.Д.**, Аналитические методы расчета и оценки надежности // Вопросы математической теории надежности. -М.:Радио и связь, 1983, с.9-112.

66. **Франкен П.**, **Кениг Д.**, **Арндт У.**, **Шмидт Ф.**, Очереди и точечные процессы. -К.:Наукова думка, 1984, 284 с.

67. **Феррари Д.**, Оценка производительности вычислительних систем. -М.:Мир, 1981, 576 с.

68. **Хинчин А.Я.**, Работы по математической теории массового обслуживания. -М.:Физматгиз, 1963, 236 с.

69. **Шеннон Р.**, Имитационное моделирование систем -искусство и наука. -М.:Мир, 1978, 418 с.

70. Вопросы математической теории надежности. -М.:Радио и связь, 1983, 376 с. / Под ред. **Б.В. Гнеденко.**

71. Надежности технических систем, Справочник. -М.:Радио и связь, 1985, 608 с. / Под ред. **И.А. Ушакова.**

72. **Allen A.O.**, Probability, Statistics and Queueing Theory with Computer Science Applications. -New York, Academic Press, 1978.

73. **Asmussen S.,** Applied Probability and Queues. -Chichester, John Wiley and Sons, 1987.

74. **Ashcroft H.,** The productivity of several machines under the care of one operator // J. Roy. Stat. Soc., Ser. B. 1950, 12, 145-151.

75. **Asztalos D.,** Optimal control of finite source priority queues with computer system applications // Comp. Maths. Appl., 1980, 6, 425-431.

76. **Avi-Itzak B., Heyman D.P.,** Approximate Queueing Models for Multiprogrammming Computer Systems // Opns. Res., 1973, 21, 1212-1230.

77. **Beaumont G.P.,** Introductory Applied Probability. -Chichester, Ellis Horwood Limited, 1983.

78. **Bennett G.K., Schmidt J.W., White J.A.,** Analysis of Queueing Systems. -New York, Academic Press, 1975.

79. **Benson F., Cox D.R.,** The productivity of machines requiring attention at random intervals // J. Roy. Stat. Soc., Ser. B. 1951, 13, 65-82.

80. **Benson.,** Machine Interference. Ph.D. Thesis, University of Birmingham, 1957.

81. **Bhat U.N.,** Sixty years of queueing theory // Manag. Sci., 1969, 15, 280-294.

82. **Blom G.,** Some contribution to the theory of machine interference // Biometrika, 1963, 50, 135-143.

83. **Bunday B.D., Scraton R.E.,** The G/M/r machine interference model // Eur.J. Operational Res., 1984, 4, 399-402.

84. **Bunday B.D., El-Badri W.K.,** Machine interference - a comparison of two repair strategies // Int. J. Prod. Res., 1985, 23, 1115-1120.

85. **Chandra M.J., Shantikumar J.G.,** On a machine interference problem with several types of machines attended by a single repairman // Int. J. Prod. Res., 1983, 21, 529-541.

86. **Chandra M.J.,** A study of multiple finite-source queueing models // J. Opl. Res. Soc., 1986,37,275-283.

87. **Cohen J.W.,** On Regenerative Processes in Queueing Theory. -Berlin, Springer-Verlag, 1976.

88. **Cohen J.W.,** The multiple phase service network with generalized processor sharing // Acta Informatica, 1979, 12, 245-284.

89. **Cooper R.B.,** Introduction to queueing theory. -New York, North Holland, 1981.

90. **Csige L., Tomko J.,** The machine interference for exponentially distributed operating and repair times // Alk. Mat. Lapok, 1982, 8, 107-114 (in Hungarian).

91. **Disney R.L., Konig D.,** Queueing networks: a survey of their random processes // SIAM Rev., 1985, 27,335-403.

92. **Doig A.,** A Bibliography on the theory of Queues // Biometrika, 1957, 44, 490-514.

93. **El-Badri W.K.,** Some aspects of the machine interference problem // Ph.D. Thesis, University of Bradford, 1983.

94. **Elsayed E.A.,** An optimum repair policy for the machine interference problem // J. Opl. Res. Soc., 1981, 32, 793-801.

95. **Ferdinand A.E.,** An analysis of the machine interference model // IBM System Journal, 1971, 10, 129-142.

96. **Gaver D.P.,** Probability models for multiprogramming computer systems // J. ACM, 1967, 3, 423-438.

97. **Gelenbe E., Mitrani I.,** Analysis and Synthesis of Computer Systems // London, Academic Press, 1980.

98. **Gnedenko B.W., Konig D.,** Handbuch der Bedienungstheorie -Berlin, Akedemie-Verlag; Grundlagen und Methoden, 1983 Formeln und andere Ergebnisse, 1984.

99. **Gross D., Ince J.F.,** The machine Repair Problem with Heterogeneous Populations // Opns. Res., 1981, 29, 532-549.

100. **Gross D., Harris C.M.,** Fundamentals of Queueing Theory -New York, John Wiley and Sons, 1985.

101. **Heyman D.P., Sobel M.J.,**Stochastic Models in Operation Research. -New York,McGraw-Hills, 1982.

102. **Jaiswal N.K., Thiruvengadan K.,** Simple machine interference with two types of failures // Opns. Res., 1963, 11, 624-636.

103. **Kameda H.,** Finite-source Queues with Different Customers // J.ACM, 1982, 29, 478-491.

104. **Kleinrock L.,** Time-Shared Systems: A Theoretical Treatment // J.ACM, 1967- 14, 242-261.

105. **Kobayashi H.,** Modeling and Analysis; An Introduction to System Performance Evaluation Methodology. -London, Addison-Wesley Publ. Comp., 1978.

106. **Karmeshu K., Jaiswal N.K.,** A machine interference model with threshold effect // J. Appl. Prob., 1981, 18, 491-498.

107. **Karmeshu K., Jaiswal N.K.,** A non-linear stochastic model for the machine interference // Int. Journal of System Science, 1981, 12, 293-303.
Treatment // J.ACM, 1967- 14, 242-261.

108. **Koenigsberg E.,** Twenty five years of Cyclic Queues and Closed Queueing Networks // J. Opl. Res. Soc., 1982, 33, 605-619.

109. **Kopocinska I.,** The Repairman Problem // Dissertationes Mathematicae, C1, PWN, Warsawa, 1973.

110. **Kronig R.,** On time losses in machinery undergoing interruptions // Physica, 1943, 10, 215-224.

111. **Lauchard G., Latouche G.,** Probability Theory and Computer Science. -London, Academic Press, 1983.

112. **Lehtonen T.,** On the optimal policies of an exponential machine repair problem // Naval Research Log. Quart., 1984, 31, 173-181.

113. **Maritas D.G., Xirokostas D.A.,** The $M/E_k/r$ machine interference model // Eur. J. Oper. Res., 1977, 1, 112-123.

114. **Naor P.,** On Machine Interference // J. Roy. Stat. Soc. Ser. B., 1956, 18, 280-287.

115. **Newell G.F.,** Applications of queueing theory. -London, Chapman and Hall, 1971.

116. **Page E.,** Queueing Theory in OR. -London, Butterworths, 1972.

117. **Palm C.,** The distribution of repairmen in servicing automatic machines // Industrition, Norden, 1947, Vol. 75, 75-80, 90-94, 119-123.

118. **Schassberger R.,** On the equilibrium distribution of a class of finite-state generalized semi-Markov processes // Math. Opl. Res., 1976, 1, 295-306.

119. **Schatte P.,** On the finite population GI/M/1 queue and its application to multiprogrammmed computers // Elektr. Inform. Kybern., 1980, 16, 433-441.

120. **Takacs L.,** On a Stochastic Process Concerning Some Waiting Time Problems // Теория вероятностей и ее применения, 1957, 2, 92-105.

121. **Takacs L.,** Introduction to the Theory of Queues. -London, Oxford University Press, 1962.

122. **Thiruvengadam K.,** Queueing with Breakdowns // Opns. Res., 1963, 11, 62-71.

123. **Thiruvengadam K.,** Machine interference problem with limited server's availability // OPSEARCH, 1965, 2, 65-84.

124. **Tijms H.C.,** Stochastic Modelling and Analysis: A Computational Approach. -Chichester, John Wiley and Sons, 1986.

125. **Tomko J.,** CPU utilization study II. // Alk. Mat. Lapok 1978, 3, 83-96.

126. **Tomko J.,** On sojourn times for semi-Markov processes // 14-th European Meeting of Statisticians, Wroclaw, 1981.

127. Computer Performance Modeling Handbook. -London, Academic Press, 1983, Edited by **Lavenberg S.S.**

128. **Sztrik J.,** On the machine interference problem. -Debrecen: M.S. Thesis, 1980, 70 p. (in Hungarian).

129. **Sztrik J., Tomko J.,** Multiprogramming with heterogeneous jobs // Alk. Mat. Lapok, 1982, 8, 285-296 (in Hungarian).

130. **Sztrik J.,** Probability model for non-homogeneous multiprogramming computer systems // Acta Cybernetica, 1983, 6, 93-101.

131. **Sztrik J.,** On the machine interference // Publ. Math., 1983, 30, 165-175.

132. **Sztrik J.,** A queueing model for multiprogrammed computer system with different I/O times // Acta Cybernetica, 1984, 7, 127-135.

133. **Sztrik J.,** On the finite-source $\vec{G}/M/r$ queue // Eur. Journal of Oper. Res., 1985, 20, 261-268.

134. **Sztrik J.,** A probability model for priority processor shared multiprogrammed computer system // Acta Cybernetica, 1986, 7, 329-340.

135. **Sztrik J.,** On the $n/\vec{G}/M/1$ queue and Erlang's loss formulas // Serdica, 1986, 12, 321-331.

136. **Sztrik J., Posafalvi A.,** On the heterogeneous machine interference with limited server's availability // Eur. Journal of Oper. Res., 1987, 28, 321-328.

137. **Sztrik J.,** On the $(m,n)/\vec{M}/\vec{M}/1$ priority queues and their applications // Problems of Control and Information Theory, 1987, 16, 169-186.

138. **Sztrik J.,** A finite-source queueing model for manufactoring processes // Problems of Control and Information Theory, 1987, 16, 449-457.

139. **Sztrik J.,** On the $\vec{G}$/M/r/FIFO machine interference model with state-dependent speeds // Journal of Operational Research Society, 1988, 39, 201-207.

140. **Sztrik J.,** Some contribution to the machine interference problem with heterogeneous machines // Elek. Inf. Kyb. (EIK), 1988, 24, 137-143.

141. **Anisimov V.V., Sztrik J.,** Asymptotic analysis of some controlled finite-source queueing systems // Acta Cybernetica, 1989, 9,

142. **Sztrik J.,** Asymptotic analysis of a complex renewable system operating in Markovian environments // 18-th European Meeting of Statisticians, August 22-26, 1988, Berlin, GDR.

143. **Стрик Я.,** Предельное поведение управляемой восстанавливаемой системы $\vec{M}$/M/r // Теория вероятностей и математическая статистика, Киев, 1989, N41, 116-120.

144. **Стрик Я.,** Предельное поведение управляемых марковских систем массового обслуживания с конечным числом источников // Кибернетика