Kossuth Lajos Tudományegyetem
Természettudományi Kar

Doktori disszertáció

A gépkiszolgálási problémáról

Irta: Sztrik János

Debrecen, 1980.

Ezuton is szeretném megköszönni Dr.Tomkó József tanszékvezető egyetemi docensnek, témavezetőmnek türelmét és azt a sokoldalu segitségét, amelyet e disszertáció elkészitéséhez nyujtott.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A gyakorlatban gyakran felmerül a gépkiszolgálási probléma, melyet a következőképpen fogalmazhatunk meg.

Tekintsünk n számu gépet, melyek müködésére r szerelő felügyel. A gépek egymástól függetlenül, folyamatosan termelnek, de előfordulhat hogy valamilyen hiba következtében leállnak és mindaddig nem üzemelnek amig a hibát el nem háritják. A szerelők a meghibásodott gépeket egymástól függetlenül, bizonyos elv szerint javitják meg. Ha a meghibásodás pillanatában van szabad szerelő akkor a javitás feltétlenül elkezdődik.

A gépkiszolgálás matematikai modellje gyakran előfordul a számológép /rendszer/ek matematikai leirásában.

A modern számitógép egyik fontos jellemzője, hogy mig a központi feldolgozó egység /angolul - Centrál Processor Unit - röviden CPU/ valamely job számolási periódusát végzi, a perifériás egységeken más programok kiszolgálása folyhat, igy egyidejüleg több job lehet aktiv állapotban. Az ilyen gépeket multiprogramozásu számitógépeknek nevezzük.

Köztudott, hogy a programok futási ideje alatt elvégzett müveleteket két csoportba oszthatjuk.

Az egyik csoportba tartoznak azok a müveletek, amelyeket a CPU hajt végre, a másikba a perifériás berendezésekkel való kapcsolattartás operációit soroljuk. A CPU által végzett számitásokhoz szükséges időt CPU időnek, a perifériás egységekkel történő müveletekhez szükséges időt Input-Output /I/O/ időnek nevezzük. Legyen az adatátviteli csatornák száma legalább n . Ezek után az említett kapcsolat a következő.

A szerelő szerepét vegye át a CPU, munkagépek helyett beszéljünk job-okról, valamint a gépek müködési idejének ill. javitási szakaszának feleltessük meg az I/O és CPU időket.

A leggyakoribb kiszolgálási elvek:

/i/ FIFO /first in, first out/.

Érkezési sorrend szerinti kiszolgálás.

/ii/ Prioritásos.

Indexeljük a jobokat 1,2,...,n számokkal és legyen a kisebb indexü job a fontosabb. Két alesetet különböztetünk meg.

a/ Abszolut prioritás.

Ha az i indexü job érkezésekor a CPU-t a j sorszámu foglalja le és ha $i < j$ akkor a kiszolgálás megszakad és az i indexü job számolási periódusa kezdődik. A j sorszámu program mindaddig várakozik mig a várakozó jobok között a legkisebb indexü nem lesz. $i > j$ esetén a CPU-t továbbra is a j indexü job foglalja le.

b/ Egyszerü prioritás.

Az uj job érkezésekor a kiszolgálás nem szakad meg, a folyamatban levő kiszolgálás befejeződik és utána a legkisebb indexü várakozó program foglalja le a CPU-t.

/iii/ Ciklikus /time sharing-TS/.

A programok számolási periódusa nem annyi ideig tart amig a program meg nem kapja a követelt számolási időt, hanem minden egyes alkalommal legfeljebb egy előre meghatározott q /kvantum/ ideig. Ha ezen idő alatt nem kapja meg az igényelt időt, akkor a számolási periódus megszakad és a FIFO-elv szerinti következő program foglalja le a CPU-t, és a megszakitott job beáll a várakozási sorba. Ha az adott program q -nál rövidebb idő alatt megkapta a követelt számolási időt, akkor a kiszolgálás befejeződik és ismét a következő job számolási periódusa folytatódik vagy kezdődik.

/iv/ "Processor sharing" /PS - a feldolgozó egység közös idejü használata/.

A jobok számolási periódusainak végrehajtása megszakitás nélkül, de váltakozó intenzitással megy végbe, mégpedig k job esetén $1/k$ intenzitással.

Megjegyzés.

1. A TS modellt durván a következőképpen jellemezhetjük. Ha adott τ időtartam alatt k job igényli a CPU-t,

akkor bármelyik számolási ideje közelitőleg τ/K értékkel halad előre. Ezért $q \to 0$ esetén TS helyettesithető PS -el.

2. Látható, hogy a CPU egyidejüleg nem szolgálhat ki több programot igy a PS fiktiv rendszer, de segitségével jó közelités adható a TS modellre és analitikai vizsgálata is egyszerübb.
3. A PS nem csak a számitógépeknél fordul elő, hanem a következő gyakorlati esetben is ezzel találkozhatunk. Tekintsünk egy gázközpontot, melynek n lakás tartozik a körzetébe.
Ha K lakásban/egyszerre üzemeltetik a gázcsapokat, akkor egyidejüleg folyik a kiszolgálás de váltakozó gáznyomással, igy az égés intenzitása K -tól függően változik.

A gépkiszolgálási probléma esetében feltesszük, hogy mind a müködési, mind pedig a javitási idők egymástól független különböző eloszlásu valószinüségi változók. Legtöbbször az alábbi mennyiségekre vagyunk kiváncsiak:

/i/ a szerelő kihasználtsága,

/ii/ a gépek kihasználtsága,

/iii/ az átlagos aktuális várakozási idő,

/iv/ a müködő gépek várható száma.

A kihasználtságon a következőket értjük.

/i/ Ha $\beta(T)$ jelenti tetszőleges T időtartam esetén a szerelő foglaltsági idejét, akkor kihasználtságán az

$$U_{sz} = \lim_{T \to \infty} M\beta(T)/T$$

határértéket értjük.

/ii/ Ha $\gamma^{(i)}(T)$ jelenti az i indexü gép müködési összidejét tetszőleges T időtartam alatt, akkor az i -dik gép kihasználtságán az

$$U_i = \lim_{T \to \infty} M\gamma^{(i)}(T)/T$$

határértéket értjük.

A témával kapcsolatos főbb irodalom: Takács [1], Kleinrock [2], Cohen [3], Tomkó [6]. Gaver [8].

A dolgozat 4 fejezetre tagolódik.

Az 1. fejezetben FIFO, PS, prioritásos kiszolgálási elvek mellett exponenciális eloszlásu müködési és javitási idejü gépekre határozzuk meg a kérdéses mennyiségeket.

A 2. rész azzal az esettel foglalkozik, amikor a gépek müködési idejének eloszlása különböző paraméterü exponenciális eloszlás, a javitási idők különböző, általános eloszlásu valószinüségi változók és a kiszolgálás FIFO-elv szerint történik.

A 3. fejezetben megmutatjuk, hogy ezen matematikai modell segitségével miképpen kapjuk meg Takács jólismert eredményeit.

Az utolsó szakaszban PS kiszolgálás mellett sorbanállási hálózati modell segitségével adjuk meg a rendszer jellemzőit.

1. Teljes exponenciális eset

Tekintsük a gépkiszolgálási problémát abban az esetben, amikor egy szerelő dolgozik a gépek inhomogének, valamint a müködési és javitási idők különböző paraméterü exponenciális eloszlásuak.

Igy annak valószinüsége, hogy az i indexü gép a $(t, t+\Delta t)$ időintervallumban meghibásodik, feltéve hogy a t időpillanatban dolgozott $\lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$, $1 \leq i \leq n$. Hasonlóan, annak valószinüsége hogy a szerelő az i -dik gép javitását a $(t, t+\Delta t)$ intervallumban befejezi, feltéve hogy a t időpillanatban e gépet javitotta $\mu_i \Delta t + o(\Delta t)$, $1 \leq i \leq n$.

1.1. FIFO kiszolgálás.

Jelölje V_k^n n elem k -ad osztályu ismétlés nélküli variációinak lexikografikusan rendezett halmazát. Vezessük be a következő sztochasztikus folyamatot.

$$\gamma(t) = \left(\nu(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_{\nu(t)}(t) \right),$$

ahol $\nu(t)$ a t időpillanatban álló gépek számát, $\left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_{\nu(t)}(t)\right)$ a hibás gépek felsorolását jelöli meghibásodásuk sorrendjében. Minthogy a javitó, ha szükséges akkor feltételenül javit, ezért $\nu(t)>0$ esetén $\alpha_1(t)$ a t időpontban javitás alatt levő gép indexét jelöli.

Eltekintve $\nu(t)$ -től, az $(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_{\nu(t)}(t))$ vektor fázistere a V_K^n halmazok egyesitése, $1 \leq K \leq n$; $-\nu(t)$ éppen azt mondja meg, hogy ez a vektor a t pillanatban hányadosztályu variációk halmazához tartozik.

A $\{0\}$ jelölje azt az állapotot amikor minden gép müködik.

Könnyü belátni, hogy $\gamma(t)$ aperiódikus, irreducibilis folytonos idejü Markov-lánc $\{0\} + \bigcup_{K=1}^{n} V_K^n$ állapottérrel.

A folyamat t időpontbeli eloszlása legyen

$$P_0(t) = P(\nu(t) = 0),$$

$$P_{i_1, i_2, \dots, i_K}(t) = P(\nu(t) = K, \alpha_1(t) = i_1, \alpha_2(t) = i_2, \dots, \alpha_{\nu(t)}(t) = i_K),$$

$$(i_1, i_2, \dots, i_K) \in V_K^n, \quad K = 1, 2, \dots, n.$$

Köztudott, hogy $\gamma(t)$ minden állapota ergodikus, igy egyértelmüen létezik a következő ergodikus eloszlás, amely egyben a lánc stacionárius eloszlása is. Legyen

$$P_0 = \lim_{t \to \infty} P_0(t),$$

$$P_{i_1, i_2, \dots, i_K} = \lim_{t \to \infty} P_{i_1, i_2, \dots, i_K}(t),$$

$$(i_1, i_2, \dots, i_K) \in V_K^n, \quad K = 1, 2, \dots, n.$$

A $\{P_0, P_{i_1,i_2,\dots,i_K}\}$, $(i_1,\dots,i_K)\in V_K^n$, $1\le K\le n$

eloszlást az alábbi állapotegyenletekből határozhatjuk meg.

$$P_0=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i}\sum_{K=1}^{n}\mu_K P_K,$$

$$P_{i_1,i_2,\dots,i_K}=\frac{1}{\mu_{i_1}+\sum\limits_{j\neq i_1,\dots,i_K}\lambda_j}\left(\lambda_{i_K}P_{i_1,\dots,i_{K-1}}+\sum_{r\neq i_1,\dots,i_K}\mu_r P_{r,i_1,\dots,i_K}\right),$$

$$P_{i_1,\dots,i_n}=\frac{\lambda_{i_n}}{\mu_{i_n}}P_{i_1,\dots,i_{n-1}}.$$

Rendezzük a $P_{i_1,i_2,\dots,i_K}$ valószinüségeket lexikografikusan egy $\underline{Y}^{(K)}$ vektorba. $\underline{Y}^{(n)}$ elemeinek száma $V_{n,K}=\binom{n}{K}K!$. Az egyensulyi egyenleteket a következő alakban irhatjuk fel.

$$\underline{Y}^{(K)}=A_K\underline{Y}^{(K-1)}+B_K\underline{Y}^{(K+1)},$$

. $K=1,2,\dots,n-1$ valamint,

$$\underline{Y}^{(n)}=A_n\underline{Y}^{(n-1)},$$

ahol A_K $V_{n,K}\times V_{n,K-1}$ -es

B_K $V_{n,K} \times V_{n,K+1}$ -es

mátrixok

Ezek után az egyenletet iterativ módon oldhatjuk meg.

Legyen

$$F_n = A_n .$$

Igy

$$\underline{Y}^{(n)} = F_n \underline{Y}^{(n-1)}$$

miatt

$$\underline{Y}^{(n-1)} = A_{n-1} \underline{Y}^{(n-2)} + B_{n-1} F_n \underline{Y}^{(n-1)} .$$

Rendezve

$$\underline{Y}^{(n-1)} = F_{n-1} \underline{Y}^{(n-2)} ,$$

ahol

$$F_{n-1} = (1 - B_{n-1} F_n)^{-1} A_{n-1} .$$

Hasonlóan

$$\underline{Y}^{(n-K)} = F_{n-K} \underline{Y}^{(n-K-1)} ,$$

ahol

$$F_{n-K} = (1 - B_{n-K} F_{n-K+1})^{-1} A_{n-K} ,$$
$$2 \leq K \leq n-1 .$$

Végül

$$\underline{Y}^{(1)} = F_1 P_0 .$$

Tetszőleges P_0^* -ból inditva az iterációt sorra kiszámithatjuk a $P_{i_1, i_2, \dots, i_K}$ valószinüségeket, $1 \leq K \leq n$,

$$(i_1, i_2, \dots, i_K) \in V_K^n\,, \quad Y_0 = P_0$$ majd az

$$\sum_{r=0}^{n} \underline{Y}^{(r)} = 1$$ feltétellel normálva kapjuk az

eloszlást.

Kihasználtsági vizsgálatok

/i/ Szerelő kihasználtsága.

Látható, hogy az idő folyamán a szerelő tevékenységét szabad és foglaltsági periódusok jellemzik, nevezzük őket együttesen ciklusnak.

Köztudott, hogy stacionárius esetben ezek a ciklusok függetlenek és azonos eloszlásuak.

Felujitási elméleti megfontolások miatt

$$P_0 = \frac{1/\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{1/\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + M\delta} \quad \dots ,$$

ahol $M\delta$ a szerelő átlagos foglaltsági periódushosszát jelöli, mig a szabad periódushossz átlagértéke $1/\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Legyen U_{sz} a szerelő hatékonysága, ekkor

$$U_{sz} = 1 - P_0 = \frac{M\vartheta}{1/\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + M\vartheta}\,.$$

Ebből

$$M\vartheta = (1-P_0)/P_0 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,.$$

/ii/ Gépkihasználtság.

Az i -dik gép tevékenységét egy ciklusban müködési, várakozási és javitási periódusokra bonthatjuk. Ismeretes, hogy stacionárius esetben ezek a ciklusok azonos eloszlásu, de nem független valószinüségi változók.

Jelentse H_i halmaz azt az eseményt, hogy az i indexü gép rossz. Legyen

$$Z_{H_i}(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \gamma(t) \in H_i \\ 0 & \text{máskor.} \end{cases}$$

Legyen $P^{(i)}$ annak stacionárius valószinüsége, hogy az i indexü gép rossz, azaz $P^{(i)} = P_{H_i}$

1. Tétel.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T Z_{H_i}(t)\,dt = P^{(i)} = \frac{W_i + 1/\mu_i}{1/\lambda_i + W_i + 1/\mu_i}\,,$$

ahol $1/\lambda_i$, W_i, $1/\mu_i$ rendre a megfelelő periódusok várható értékei.

A tétel bizonyitására nem térünk ki.

Nyilvánvaló, hogy

$$P^{(i)} = \sum_{\substack{(i_1, i_2, \ldots, i_K) \in V_K^n,\ i \in (i_1, \ldots, i_K) \\ 1 \leq K \leq n}} P_{i_1, \ldots, i_K} .$$

Jelölje U_i az i -dik gép kihasználtságát, ekkor

$$U_i = 1 - P^{(i)} .$$

Az i -dik gép átlagos várakozási idejére a

$$W_i = P^{(i)} / \left[\lambda_i (1 - P^{(i)}) \right] - 1/\mu_i$$

összefüggés adódik.

Jelölje $U_ö$ a gépek összkihasználtságát, ekkor

$$U_ö = \sum_{i=1}^{n} U_i = n - \sum_{i=1}^{n} P^{(i)} .$$

1.2. "Processor sharing" /PS/ kiszolgálás.

Ismeretes, hogy ebben az esetben a meghibásodott gépek javitása egyidejüleg folyik, de váltakozó intenzitással. Tekintsük a következő sztochasztikus folyamatot:

$$\gamma(t) = \left(\nu(t), \alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_{\nu(t)}(t) \right),$$

ahol $\nu(t)$ jelöli a t időpontban álló gépek számát;

$\left(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_{\nu(t)}(t) \right)$ a hibás gépek felsorolása.

A folyamat egy lehetséges állapota

$(K, i_1, \ldots, i_K)$; K gép rossz, s

ezek indexei $(i_1, i_2, \ldots, i_K)$.

Jelölje $\{0\}$ azt az állapotot, amikor a szerelő szabad, azaz amikor minden gép dolgozik.

Jelölje továbbá C_K^n n elem K -ad osztályu ismétlés nélküli kombinációinak lexikografikusan rendezett halmazát.

Látható, hogy $\gamma(t)$ folytonos idejü Markov lánc

$\{0\} + \bigcup_{i=1}^{m} C_i^n$ fázistérrel.

A folyamat t pillanatbeli eloszlására vezessük be a

$$P_0(t) = P(\nu(t) = 0),$$

$$P_{i_1, i_2, \dots, i_K}(t) = P(\nu(t) = K, \alpha_1(t) = i_1, \dots, \alpha_{\nu(t)}(t) = i_K)$$

függvényeket.

Mivel $(\gamma(t), t \geq 0)$ véges állapotterü, irreducibilis és aperiódikus Markov-lánc ezért ergodikus. Igy egyértelmüen léteznek a

$$P_0 = \lim_{t \to \infty} P_0(t),$$

$$P_{i_1, i_2, \dots, i_K} = \lim_{t \to \infty} P_{i_1, i_2, \dots, i_K}(t),$$

$$(i_1, i_2, \dots, i_K) \in C_K^n, \qquad 1 \leq K \leq m,$$

ergodikus valószinüségek, melyekre az alábbi egyenletrendszer irható fel.

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \sum_{j=1}^{n} \mu_j P_j ,$$

$$P_{i_1,\dots,i_k} = \frac{k}{\sum_{j=1}^{k} \mu_{i_j} + k \sum_{j \neq i_1,\dots,i_k} \lambda_j} \Big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} P_{i_1,\dots,i_{j-1},i_{j+1},\dots,i_k}$$

$$+ \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{r=i_{j-1}+1}^{i_j-1} \frac{\mu_r}{k+1} P_{i_1,\dots,i_{j-1},r,i_j,\dots,i_k} \Big),$$

$$i_0 = 0 \quad , \quad i_{n+1} = n+1 \quad , \quad (i_1,\dots,i_k) \in C_k^n \quad , \quad 1 \le k \le n ,$$

$$P_{1,2,\dots,n} = \frac{n}{\sum_{j=1}^{n} \mu_j} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_{1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,n} .$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$P_{i_1,\dots,i_k} = C \cdot k! \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{i_j}}{\mu_{i_j}} ,$$

ahol a C állandót a $P_0 + \sum_{j=1, C_j^n}^{n} P_{i_1,\dots,i_j} = 1$ feltételből határozhatjuk meg.

Legyen P_K annak stacionárius valószinüsége, hogy k db gép áll, ekkor

$$P_K = c \cdot K! \sum_{C_K^n} \prod_{j=1}^{K} \frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ij}} .$$

Kihasználtsági vizsgálatok.

/i/ Szerelő kihasználtsága.

Az előzőekhez hasonlóan

$$U_{SZ} = 1 - P_0 = \frac{M\delta}{1/\sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i + M\delta} .$$

Ebből

$$M\delta = (1-P_0)/P_0 \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i .$$

/ii/ Gépkihasználtság.

Jelölje $P^{(i)}$ annak stacionárius valószinüségét, hogy az i -adik gép nem müködik. Felujitási-elméleti megfontolások miatt

$$P^{(i)} = \tilde{W}_i / (\tilde{W}_i + 1/\lambda_i) ,$$

ahol $\tilde{W}_i$ az i indexü gép átlagos kiszolgálási ideje, $1/\lambda_i$ pedig a müködési idő várható értéke. Másrészt

$$p^{(i)} = \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_K)\in C_K^n,\ i\in(i_1,\dots,i_K)\\ 1\le K\le n}} P_{i_1,\dots,i_K}\,.$$

Igy

$$U_i = 1 - p^{(i)}\,,\qquad \text{valamint}$$

$$\tilde{W}_i = p^{(i)}/[\lambda_i(1-p^{(i)})]\,.$$

Végül

$$U_ö = \sum_{i=1}^{n} U_i = n - \sum_{i=1}^{n} p^{(i)}\,.$$

Megjegyzés. Homogén esetben a FIFO és PS állapotvaló-szinüségek megegyeznek, ezért

$$P_K = \binom{n}{K} K!\,\varrho^K P_0\,,$$

ahol

$$\varrho = \frac{\lambda}{\mu}\,,\qquad P_0 = \left(1 + \sum_{K=1}^{n} P_K\right)^{-1}.$$

Mivel a $p^{(i)}$ mennyiségek minden i -ra megegyeznek, igy

$$p^{(i)} = \sum_{K=1}^{n} \frac{K}{n} P_K = \frac{\tilde{W}}{1/\lambda + \tilde{W}}\,.$$

Ebből

$$\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} K P_K = \frac{\tilde{W}}{1/\lambda + \tilde{W}}$$

reláció következik.

FIFO esetben a baloldal változatlan és $\tilde{W} = W + 1/\mu$ miatt rövid számolás után belátható, hogy

$$W = \frac{1}{\mu} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell P_\ell^{(n-1)} ,$$

ahol $P_\ell^{(n-1)}$ annak stacionárius eloszlása, hogy $n-1$ db gép esetén ℓ db gép áll.

1.3. Prioritásos kiszolgálás.

Tekintsünk két gépet. Nevezzük őket A -nak ill. B -nek.

Tegyük fel, hogy az A -nak abszolut prioritása van a B -vel szemben. Jelölje λ_A, λ_B a gépek müködési szakaszának paramétereit, $F(x)$, $G(x)$ a javitási idők eloszlását.

A szerelő kihasználtságának vizsgálatához mindenekelőtt vegyük észre, hogy a szabad periódusok $\lambda_A + \lambda_B$ paraméterü exponenciális eloszlást követnek.

Továbbá annak valószinüsége, hogy egy szabad periodust az A gép meghibásodása szakit meg $p_A = \lambda_A / (\lambda_A + \lambda_B)$ s ugyanez a valószinüség a B gépre

$$p_B = \lambda_B / (\lambda_A + \lambda_B) .$$

Jelölje $\delta^{(2)}$ a szerelő foglaltsági periódushosszát 2 gép esetén.

Egy ilyen periódus kezdődhet az A gép javitásával, melyet δ_A -val jelölünk, ill. a B javitásával mely-re a δ_B jelölést használjuk.

Legyen

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x), \quad \psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dG(x),$$

$$\beta_A = \int_0^\infty x\, dF(x), \quad \beta_B = \int_0^\infty x\, dG(x).$$

A szerelő átlagos foglaltsági periódushossza:

$$M\delta^{(2)} = p_A M\delta_A + p_B M\delta_B,$$

ahol

$$M\delta_A = \beta_A + \beta_B + \lambda_A \beta_A \beta_B - \beta_B \varphi(\lambda_B)(1 + \lambda_A \beta_A),$$

$$M\delta_B = \beta_B(1 + \lambda_A \beta_A).$$

Ezek után tekintsünk n számu gépet. Jelölje

$\lambda_i, \mu_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ az i -dik gép

müködési, ill. javitási intenzitását. Értelmezzünk prioritást a gépek között.

Legyen tetszőleges i -re $(i = 1, 2, \dots, n)$ az i -dik gépnek abszolut elsőbbsége az i -nél magasabb indexüekkel szemben, tehát az utóbbiak javitása csak akkor folyhat, ha az i -dik és annál kisebb indexü gépek müködnek.

Jelölje $\delta^{(n)}$ a szerelő foglaltsági periódusát n gép prioritásos javitása esetén.

Egy rekurziv összefüggést irhatunk fel az $M\delta^{(n)}$ várható értékre.

Az alapgondolat a következő. Tekintsük az első $i-1$ gépre a szerelő foglaltsági és szabad periódusát egyetlen gép javitási ill. müködési szakaszának. Nevezzük e gépet A -nak.

Ezen gép javitási szakasza nem, de müködési periódusa exponenciális eloszlásu $m_{i-1}=\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j$ paraméterrel.

Az i -dik gépet nevezzük B -nek.

Ennek müködési ill. javitási ideje exponenciális eloszlásu λ_i ill. μ_i intenzitásokkal.

A teljes várható érték tétele alapján

$$M e^{-s\delta_B} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (\varphi(s))^n e^{-sy} \frac{(\lambda_A y)^n}{n!} e^{-\lambda_A y} \, dG(y) =$$

$$= \psi[s + \lambda_A(1-\varphi(s))],$$

$$M e^{-s\delta_A} = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{-\lambda_B x} \, dF(x) + M e^{-s\delta_B} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\infty} e^{-sx}(1-e^{-\lambda_B x}) \, dF(x) =$$

$$= \varphi(s+\lambda_B) + \psi[s+\lambda_A(1-\varphi(s))][\varphi(s) - \varphi(s+\lambda_B)].$$

Ha

$$\varphi_{i-1}(s) = M e^{-s\delta^{(i-1)}} ,$$

$$\varphi(s) = \varphi_{i-1}(s) , \qquad \psi(s) = \frac{\mu_i}{\mu_i + s} ,$$

$$\lambda_A = m_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j , \qquad \lambda_B = \lambda_i ,$$

$$p_A = \frac{m_{i-1}}{m_i} , \qquad p_B = \frac{\lambda_i}{m_i} ,$$

megfeleltetést tekintjük, akkor

$$\varphi_i(s) = p_A M e^{-s\delta_A} + p_B M e^{-s\delta_B} =$$

$$= \frac{m_{i-1}}{m_i} \left\{ \varphi_{i-1}(s+\lambda_i) + \frac{\mu_i [\varphi_{i-1}(s) - \varphi_{i-1}(s+\lambda_i)]}{\mu_i + s + m_{i-1}(1-\varphi_{i-1}(s))} \right\} +$$

$$+ \frac{\lambda_i}{m_i} \frac{\mu_i}{\mu_i + s + m_{i-1}(1-\varphi_{i-1}(s))} .$$

Tudjuk, hogy

$$\varphi_1(s) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} ,$$

igy az $M\delta^{(i)}$ értékeket iterativan sorra megkaphatjuk.
Részletesebb elemzés található Tomkó [6] /1975/ dolgozatában.

Térjünk át az i -dik gép átlagos kiszolgálási idejének vizsgálatára.

Látható, hogy az i indexü gép javitása megszakad, ha i -nél kisebb indexü gép meghibásodik. Ekkor javitási ciklust várakozási ciklus követi.

Továbbra is tekintsük az első $i-1$ gépre a szerelő foglaltsági és szabad periódusát egyetlen gép javitási ill. müködési szakaszának. A foglaltsági idő eloszlása legyen $F_{i-1}(x)$.

Jelölje δ_i az i -dik gép kiszolgálási periódusát és $G_i(x)$ ennek eloszlásfüggvényét. Az i indexü gép meghibásodásának pillanatában a következő esetek állhatnak fenn.

1./ i -nél kisebb indexü gép nincs elromolva. Ekkor

$$M e^{-s\delta_i} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left(\varphi_{i-1}(s)\right)^n e^{-sy} \frac{(m_{i-1}y)^n}{n!} \cdot$$

$$\cdot e^{-m_{i-1}y} \cdot \mu_i e^{-s\mu_i y} dy =$$

$$= \frac{\mu_i}{\mu_i + s + m_{i-1}(1-\varphi_{i-1}(s))} .$$

Ebből

$$M\delta_i = \frac{1}{\mu_i}\left(1 + m_{i-1} M \delta^{(i-1)}\right).$$

2./ Amikor az i -dik gép elromlott, akkor éppen egy magasabb prioritásu gép javitása folyt. Ekkor i -nak várakoznia kell.

Jelentse a ξ_t/ valószinüségi változó az i indexü gép virtuális várakozási idejét a t időpillanatban. Felujitási-elméleti meggondolások miatt

$$P(\xi_t > x) = \int_0^t [1 - F_{i-1}(t-u+x)]\, dH(u) +$$

$$+ 1 - F_{i-1}(t+x)$$

ahol $H(u)$ az $F_{i-1}(x)$ eloszlásfüggvényü rekurrens folyamat felujitási függvénye. A felujitási alaptétel miatt

$$\lim_{t \to \infty} P(\xi_t > x) = \frac{1}{M\,\delta^{(i-1)}} \int_x^\infty [1 - F_{i-1}(u)]\, du .$$

A várakozási periódus várható értéke

$$\int_0^\infty \frac{1}{M\,\delta^{(i-1)}} \int_x^\infty [1 - F_{i-1}(u)]\, du\, dx =$$

$$\int_0^\infty \left[1 - \frac{1}{M\,\delta^{(i-1)}} \int_0^x [1 - F_{i-1}(u)]\, du\right] dx =$$

$$\frac{M^2\,\delta^{(i-1)} + D^2\,\delta^{(i-1)}}{2\,M\,\delta^{(i-1)}} = \frac{\varphi''_{i-1}(0)}{2\,M\,\delta^{(i-1)}} .$$

A teljes várható érték tételét alkalmazva kapjuk, hogy

$$M\,\delta_i = \frac{a_i}{m_i}\,\frac{1}{\mu_i}\left(1 + m_{i-1} M\,\delta^{(i-1)}\right) +$$

$$+ \frac{m_{i-1}}{m_i}\left(\frac{\varphi''_{i-1}(0)}{2\,M\,\delta^{(i-1)}} + \frac{1}{\mu_i}\right),$$

ahol m_i, $\varphi_{i-1}(s)$, $M\,\delta^{(i-1)}$ a korábban bevezetett jelölések, melyekre fennállnak a már ismertetett rekurziv összefüggések.

A $\varphi_i(s)$ Laplace-Stieltjes-transzformáltból elemi számitásokkal nyerhető a

$$\varphi_i''(0) = \frac{1}{m_i \mu_i}\left\{\frac{2 m_i}{\mu_i}\Big[\mu_i + m_{i-1}(1-\varphi_{i-1}(s))\cdot \right.$$

$$\cdot\left(\varphi_{i-1}''(0) + M\,\delta^{(i-1)}\right)\Big] + 2\,\frac{(\mu_i - 1)}{\mu_i}\,\frac{d\varphi_{i-1}(s)}{ds}\bigg|_{s=0} \,.$$

$$\left. + (2-\mu_i)\,\frac{d^2\varphi_{i-1}(s)}{ds^2}\bigg|_{s=0} + \frac{2\lambda_i}{\mu_i}\right\}.$$

reláció.

Mivel

$$\varphi_1(s) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} \quad \text{és} \quad \varphi_1''(0) = \frac{2}{\mu_1^2}\,,$$

igy az $M\,\delta_i$ várható értékek sorra meghatározhatók.

Az i -dik gép hatékonysága az

$$U_i = \frac{1/\lambda_i}{1/\lambda_i + M\,\delta_i}$$

összefüggés segitségével számitható ki.

2. Inhomogén eset általános javitási időkkel

2.1. A probléma kitüzése.

Tekintsük a bevezetésben leirt rendszert abban az esetben, amikor az i indexü gép müködési ideje λ_i paraméterü exponenciális eloszlásu, a javitási idő eloszlása $F_i(x)$, $1 \leq i \leq n$ és a meghibásodott gépeket meghibásodásuk sorrendjében egy szerelő javitja.

2.2. A rendszert leiró Markov-folyamat.

Jelölje tetszőleges $t \geq 0$ esetén

$\nu(t)$ a t időpillanatban álló gépek számát,

$(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_{\nu(t)}(t))$ a hibás gépek indexeit a meghibásodás sorrendjében.

Vezessük be az

$$\underline{Y}(t) = (\nu(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{\nu(t)}(t))$$

véletlen dimenzióju valószinüségi vektorváltozót és tekintsük az $(\underline{Y}(t), t \geq 0)$ sztochasztikus folyamatot. Ha $F_i(x)$, $1 \leq i \leq n$ nem exponenciális akkor $(\underline{Y}(t), t \geq 0)$ nem Markov-folyamat. Egy segédváltozó bevezetésével azonban könnyen azzá tehető.

Jelentse ξ_t a t pillanatban javitás alatt levő gép javitására a t pillanatig ráforditott időt. Legyen

$$\underline{X}(t) = (\nu(t), \alpha_1(t), \ldots, \alpha_{\nu(t)}(t); \xi_t).$$

Könnyü ellenőrizni, hogy az $(\underline{X}(t), t \geq 0)$ Markov-folyamat.

Jelölje V_k^n n elem k -ad osztályu, lexikografikusan rendezett, ismétlés nélküli variációinak halmazát.

Ha $\nu(t) > 0$ akkor a folyamat egy lehetséges állapota a időpillanatban

$$(\nu(t) = k, \alpha_1(t) = i_1, \ldots, \alpha_{\nu(t)}(t) = i_k; \xi_t = x).$$

Ezt az állapotot röviden $(i_1, \ldots, i_k; x)$ -szel fogjuk jelölni. Ebben az állapotban pontosan akkor van a folyamat, ha k db gép rossz, ezek indexei a meghibásodás sorrendjében $(i_1, \ldots, i_k)$ és a javitás alatt levő i_1 indexü gép javitása már x ideje tart.

Jelölje $\{0\}$ azt az állapotot, amikor minden gép müködik.

Igy az $(\underline{X}(t), t \geq 0)$ Markov-folyamat fázistere az

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} V_k^n\right) \times \mathbb{R}_+ + \{0\}$$

halmaz, melyet röviden $\mathcal{X}$ -el fogunk jelölni.

Keressük meg a folyamat Δt időtartam alatti azon átmeneteit, melyek valószinüségeinek nagyságrendje $o(\Delta t)$ -nál nagyobbak.

Az $(i_1,\dots,i_K;x) \to (i_1,\dots,i_K;x+\Delta t)$

átmenet valószinüsége

$$\Big(1-\sum_{j\neq i_1,\dots,i_K}\lambda_j\Delta t\Big)\frac{1-F_{i_1}(x+\Delta t)}{1-F_{i_1}(x)}+o(\Delta t).$$

Az

$$(i_1,\dots,i_K;x) \to (i_1,\dots,i_K,i_{K+1};x+\Delta t)$$

állapotváltozás valószinüsége

$$\lambda_{i_{K+1}}\Delta t\,\frac{1-F_{i_1}(x+\Delta t)}{1-F_{i_1}(x)}+o(\Delta t).$$

Végül annak valószinüsége, hogy a folyamat az $(i_1,\dots,i_K;x)$ állapotból az $(i_2,\dots,i_K;0)$ állapotba megy át

$$\frac{F_{i_1}(x+\Delta t)-F_{i_1}(x)}{1-F_{i_1}(x)}+o(\Delta t).$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\Lambda_{i_1,\dots,i_K}=\sum_{j\neq i_1,\dots,i_K}\lambda_j,$$

$$\Lambda=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j,$$

$$S_{i_1,\dots,i_K}=\sum_{j=1}^{K}\lambda_{i_j},$$

$$\beta_i=\int_0^\infty x\,dF_i(x),$$

$$\phi(s;j)=\int_0^{\infty} e^{-sx}\,dF_j(x),$$

$$\Pi_{\ell}^{(i_1,\dots,i_K)}=\prod_{r=\ell+2}^{K}\lambda_{i_r}\Big/\prod_{q=\ell+2}^{K} S_{i_{\ell+1},\dots,i_q}\,,$$

$$1\leqslant \ell\leqslant K\quad,\ 1\leqslant K\leqslant n\,.$$

A folyamat t pillanatbeli eloszlására vezessük be az alábbi jelöléseket.

$$P_0(t)=P\big(\nu(t)=0\big),$$

$$P_{i_1,\dots,i_K}(x,t)=P\big(\nu(t)=K,\ \alpha_1(t)=i_1,\dots,\alpha_{\nu(t)}(t)=i_K;\ \xi_t\leqslant x\big),$$

$$(i_1,\dots,i_K)\in V_K^n\quad,\qquad (K=1,2,\dots,n)\,.$$

2. Tétel. Ha $\beta_i<\infty$, $(1\leqslant i\leqslant n)$ akkor az $\big(\underline{X}(t)\ ,\ t\geqslant 0\big)$ Markov-folyamatnak $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\forall\ (i_1,\dots,i_K)\in V_K^n$, $k=1,2,\dots,n$ -ra egyértelmüen létezik a

$$P_0=\lim_{t\to\infty}P_0(t)\,,$$

$$P_{i_1,\dots,i_K}(x)=\lim_{t\to\infty}P_{i_1,\dots,i_K}(x,t)$$

ergodikus eloszlása, és $P(\mathfrak{X})=1$,

azaz

$$P_0+\sum_{\substack{V_K^n\\ 1\le K\le n}}\lim_{X\to\infty} P_{i_1,\dots,i_K}(X)=1.$$

Bizonyitás. Az $(\underline{X}(t),\ t\geq 0)$ szakaszosan lineáris folyamat, s az állitás következik az ilyen folyamatokra vonatkozó Gnedenko-Kovalenko [7] könyvének 211. oldalán található tételből.

Feladatunk ezután az, hogy eljárást adjunk a

$$(P_0, P_{i_1,\dots,i_K}),\ (i_1,\dots,i_K)\in V_K^n,\ (1\le K\le n)$$

ergodikus valószinüségek meghatározására. Ehhez mindenekelőtt megmutatjuk, hogy az ergodikus

$$P_{i_1,\dots,i_K}(X),\ (i_1,\dots,i_K)\in V_K^n,\quad K=1,2,\dots,n$$

függvények az $F_i(X)$ eloszlás-függvények közös folytonossági pontjaiban differenciálhatók.

Majd bevezetjük az un. normált

$$p^*_{i_1,i_2,\dots,i_K}(X)=\frac{\frac{d}{dX}P_{i_1,\dots,i_K}(X)}{1-F_{i_1}(X)}$$

függvényeket.

Ezek a függvények csak majdnem mindenütt értelmezettek, de amit látni fogjuk az értelmezési tartományukon egyenletesen folytonosak, igy minden $X\geq 0$ -ra értelmezetté tehetők.

Ezután levezetünk egy integro-differenciál egyenletrendszert a $p^*_{i_1,\dots,i_K}(x)$ normált sürüségfüggvényekre, melyek megoldásán keresztül kapjuk az ergodikus valószinüségek kiszámitási algoritmusát. Mindenekelőtt előrebocsátunk egy lemmát.

Jelölje $V^{i_1,\dots,i_K}_{i_1,\dots,i_r}(\tau)$ annak valószinüségét, hogy egy tetszőleges pillanatban az $(i_1,\dots,i_r)$ indexü gépek állnak és ettől számitott τ időtartam alatt az $(i_{r+1},\dots,i_K)$ indexü gépek a felsorolt sorrendben meghibásodnak.

Lemma.

$$V^{i_1,\dots,i_K}_{i_1,\dots,i_r}(\tau) = \int\limits_{0<z_1<\dots<z_{K-r}<\tau} e^{-\Lambda_{i_1,\dots,i_K}\tau} \cdot$$

$$\lambda_{i_{r+1}} e^{-\lambda_{i_{r+1}} z_1} \cdots \lambda_{i_K} e^{-\lambda_{i_K} z_{K-r}} \, dz_1 \cdots dz_{K-r} .$$

Bizonyitás. Azon esemény sürüségfüggvénye, hogy a z_1 pillanatban az i_{r+1} indexü gép z_2 pillanatban az $i_{r+2}, \dots, z_{K-r}$ pillanatban az i_K indexü gép romlik el

$$f(z_1,\dots,z_{K-r}) = \lambda_{r+1} e^{-\lambda_{r+1} z_1} \cdots \lambda_{i_K} e^{-\lambda_{i_K} z_{K-r}}$$

/

Igy a keresett valószinüség

$$V_{i_1,\dots,i_r}^{i_1,\dots,i_K}(\tau) = e^{-\Lambda_{i_1,\dots,i_K}\tau} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{0<z_1<\dots<z_{K-r}<\tau} f(z_1,\dots,z_{K-r})\, dz_1 \dots dz_{K-r},$$

mely láthatóan exponenciális függvények lineáris kombinációja.

Megjegyzés.

Homogén paraméterek esetén

$$V_{i_1,\dots,i_r}^{i_1,\dots,i_K}(\tau) = \frac{1}{(K-r)!}\left(1-e^{-\lambda\tau}\right)^{K-r} e^{-(n-K)\lambda\tau} .$$

3. Tétel. A $P_{i_1,\dots,i_K}(x)$ ergodikus eloszlásnak $\forall (i_1,\dots,i_K) \in V_K^n$, $1 \leq K \leq n$ és majdnem minden $x \in \mathbb{R}_+$ -ra létezik $p_{i_1,\dots,i_K}(x)$ sürüségfüggvénye. Továbbá a normált sürüségfüggvények

$$p^*_{i_1,\dots,i_K}(x) = \frac{p_{i_1,\dots,i_K}(x)}{1-F_{i_1}(x)}$$

x -szerint differenciálhatóak.

Bizonyitás. Legyen az $\underline{X}(t)$ folyamat egy tetszőleges t időpontban az $(i_1,\dots,i_K;\, x)$ állapotban. Ez csak akkor történhet meg, ha valamely $t-x<u<t$

pontban javitásbefejeződés játszódik le, mely után az i_1-es gép javitására kerül sor. E javitásnak legalább $t-u$ ideig kell tartania, továbbá az u pillanatban hibás i_1 indexü gépen felül várakozó $(i_2, \dots, i_r)$ $(1 \leq r \leq K)$ hibás gépekhez a $t-u$ idő alatt az $(i_{r+1}, \dots, i_K)$ indexü gépeknek meghibásodásuk következtében a felsorolás sorrendjében csatlakozniuk kell.

A könnyebb érthetőség szempontjából vegyük észre, hogy az $(\underline{X}(t), t \geq 0)$ Markov-folyamat regenerációs tipusu. A regenerációs ciklusokat többféleképpen értelmezhetjük. Tekintsük például azokat a javitásbefejeződési pillanatokat, melyek után az i_1-es gép javitására kerül sor ugy, hogy rajta kivül még az $(i_2, \dots, i_r)$ indexü gépek is hibásak. Egy ilyen pillanatra még ugy is hivatkozhatunk, mint az $(i_1, \dots, i_r; 0)$ állapot sorozatos elérési pillanatai. Szükségünk lesz az $(i_1, \dots, i_r; 0)$ állapot elérési pillanatai alkotta felujitási folyamat felujitásifüggvényére. Ha a $t=0$ pillanatbeli állapot $(j_1, \dots, j_s; z)$ különbözik az $(i_1, \dots, i_r; 0)$-tól akkor a szóbanforgó felujitási folyamat u.n. késleltetett felujitási folyamat lesz.

A $(j_1, \dots, j_s; z)$ kezdeti állapotnak és az $(i_1, \dots, i_r; 0)$ állapot sorozatos elérési pillanatainak megfelelő késleltetett felujitási folyamat felujitásifüggvényére a

$H^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s, z}(t)$ jelölést vezetjük be.

Az $(\underline{X}(t),\ t \geq 0)$ folyamat kezdeti eloszlását jellemezze az

$$\left(R_0, R_{j_1,\dots,j_s}(z);\ z \geq 0,\ (j_1,\dots,j_s) \in V_s^n,\ 1 \leq s \leq n\right)$$

függvényrendszer.

A mondottakból a teljes valószinüség tétele alapján nyerjük, hogy

$$P_{i_1,\dots,i_K}(x,t) = \left(\sum_{V_s^n} \sum_{s=1}^{n} \int_0^t d R_{j_1,\dots,j_s}(z) + R_0\right)$$

$$\sum_{r=1}^{K} \int_{t-x}^{t} V_{i_1,\dots,i_r}^{i_1,\dots,i_K}(t-u)\left[1 - F_{i_1}(t-u)\right] d H_{j_1,\dots,j_s,z}^{i_1,\dots,i_r}(u).$$

Innen a központi felujitási tételt alkalmazva kapjuk

$$P_{i_1,\dots,i_K}(x) = \lim_{t\to\infty} P_{i_1,\dots,i_K}(x,t) =$$

$$= \sum_{r=1}^{K} \frac{1}{m_{i_1,\dots,i_r}} \int_0^x \left[1 - F_{i_1}(u)\right] V_{i_1,\dots,i_r}^{i_1,\dots,i_K}(u)\, du,$$

ahol $m_{i_1,\dots,i_r}$ az $(i_1, i_2,\dots, i_r; 0)$ állapotba való első visszatérési idő várható értéke, mivel a folyamat ergodikus ez véges.

Mivel a $V_{i_1,\dots,i_r}^{i_1,\dots,i_K}(\tau)$ függvény exponenciális függvények lineáris kombinációja igy $P_{i_1,\dots,i_K}(x)$ minden olyan pontban differenciálható ahol $F_{i_1}(x)$ folytonos. Igy a $p_{i_1,\dots,i_K}(x)$ sürüségfüggvény majdnem mindenütt meghatározott és

$$p_{i_1,\dots,i_K}(x)=\sum_{r=1}^{K}\frac{1}{m_{i_1,\dots,i_r}}\left[1-F_{i_1}(x)\right]V_{i_1,\dots,i_r}^{i_1,\dots,i_K}(x).$$

A normált sürüségfüggvényeket bevezetve

$$p^*_{i_1,\dots,i_K}(x)/=\sum_{r=1}^{K}\frac{1}{m_{i_1,\dots,i_r}}V_{i_1,\dots,i_r}^{i_1,\dots,i_K}(x)$$

melyek minden x -ben differenciálhatóak.

Megjegyzés.

Elvileg két esetet kellene megkülönböztetnünk x és t viszonyától függően. Mivel $t\to\infty$ ezért elegendő a $t>x$ relációt tekinteni.

4; Tétel. Az $(\underline{X}(t),t\geqslant 0)$ folyamat stacionárius eloszlása megoldása a

$$\Lambda P_0=\sum_{i=1}^{n}\int_0^\infty p^*_i(x)\,dF_i(x),$$

$$\frac{dp^*_i(x)}{dx}+\Lambda_{i_1}p^*_{i_1}(x)=0,$$

$$\frac{d\overset{*}{p}_{i_1,i_2}(x)}{dx}+\Lambda_{i_1,i_2}\overset{*}{p}_{i_1,i_2}(x)=\lambda_{i_2}\overset{*}{p}_{i_1}(x),$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\,p_{i_1,\dots,i_K}(x)}{dx}+\Lambda_{i_1,\dots,i_K}\overset{*}{p}_{i_1,\dots,i_K}(x)=\lambda_{i_K}\overset{*}{p}_{i_1,\dots,i_{K-1}}(x),$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\overset{*}{p}_{i_1,\dots,i_n}(x)}{dx}=\lambda_{i_n}\overset{*}{p}_{i_1,\dots,i_{n-1}}(x),$$

differenciál-egyenletrendszernek, és kielégiti a

$$p_{i_1}(0)=\lambda_{i_1}P_0+\sum_{j\neq i_1}\int_0^\infty \overset{*}{p}_{j,i_1}(x)\,dF_j(x),$$

$$p_{i_1,i_2}(0)=\sum_{j\neq i_1,i_2}\int_0^\infty \overset{*}{p}_{j,i_1,i_2}(x)\,dF_j(x),$$

$$\vdots$$

$$p_{i_1,\dots,i_K}(0)=\sum_{j\neq i_1,\dots,i_K}\int_0^\infty \overset{*}{p}_{j,i_1,\dots,i_K}(x)\,dF_j(x),$$

$$\vdots$$

$$p_{i_1,\dots,i_n}(0)=0$$

peremfeltételeket.

<u>Bizonyitás</u>. A teljes valószinüség tételét és a Chapman-Kolmogorov egyenleteket felhasználva az átmenet-

valószinüségeket figyelembevéve a

sürüségfüggvényekre a következő relációkat irhatjuk fel:

$$P_0 = P_0(1-\Lambda\Delta x) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\infty} \frac{p_j(x)\Delta x}{1-F_j(x)}\, dF_j(x) + \theta(\Delta x),$$

$$p_{i_1}(x) = p_{i_1}(x-\Delta x)(1-\Lambda_{i_1}\Delta x)\frac{1-F_{i_1}(x)}{1-F_{i_1}(x-\Delta x)} + \theta(\Delta x),$$

$$p_{i_1,i_2}(x) = p_{i_1,i_2}(x-\Delta x)(1-\Lambda_{i_1,i_2}\Delta x)\frac{1-F_{i_1}(x)}{1-F_{i_1}(x-\Delta x)} +$$

$$+ \lambda_{i_2}\Delta x\, p_{i_1}(x-\Delta x)\frac{1-F_{i_1}(x)}{1-F_{i_1}(x-\Delta x)} + \theta(\Delta x),$$

$\vdots$

$$p_{i_1,\dots,i_K}(x) = p_{i_1,\dots,i_K}(x-\Delta x)(1-\Lambda_{i_1,\dots,i_K}\Delta x)\cdot$$

$$\frac{1-F_{i_1}(x)}{1-F_{i_1}(x-\Delta x)} + \lambda_{i_K}\Delta x\, p_{i_1,\dots,i_{K-1}}(x-\Delta x)\cdot$$

$$\cdot\frac{1-F_{i_1}(x)}{1-F_{i_1}(x-\Delta x)} + \theta(\Delta x),$$

$\vdots$

$$p_{i_1,\dots,i_n}(x) = \lambda_{i_n}\Delta x\, p_{i_1,\dots,i_{n-1}}(x-\Delta x)\frac{1-F_{i_1}(x)}{1-F_{i_1}(x-\Delta x)} + \theta(\Delta x) +$$

$$+ p_{i_1,\dots,i_n}(x-\Delta x)\frac{1-F_{i_1}(x)}{1-F_{i_1}(x-\Delta x)}\,.$$

Innen a

$$p^*_{i_1,\dots,i_K}(x) = \frac{p_{i_1,\dots,i_K}(x)}{1-F_{i_1}(x)}$$

normált sürüségfüggvényeket bevezetve, a $\Delta x \to 0$ határátmenetet elvégezve, a $p^*_{i_1,\dots,i_K}(x)$ differenciálhatóságát kihasználva kapjuk a tétel első részének állitását. A második rész bizonyitása a teljes valószinüség tételéből adódik.

Nem nehéz belátni, hogy az egyenletrendszer megoldása

$$p^*_{i_1,\dots,i_K}(x) = \sum_{\ell=1}^{K} (-1)^{K-\ell}\, c_{i_1,\dots,i_\ell}\, \Pi_\ell^{(i_1,\dots,i_K)}\, e^{-\Lambda_{i_1,\dots,i_\ell} x}$$

$$1 \leq K \leq n,$$

u.i. először a $p^*_i(x)$ -t határozzuk meg, majd ezek segitségével és a Lagrange-féle konstans variálás módszerével kapjuk $p^*_{i_1,i_2}(x)$ -t. A további bizonyitás teljes indukcióval történik.

Láthatjuk, hogy az egyenletrendszer a $c_{i_1,\dots,i_K}$ $K=1,2,\dots,n$ konstansok esetéig van meghatározva. Ezeket a konstansokat a peremfeltételekből határozhatjuk meg. A $c_{i_1,\dots,i_K}$ -ra explicit kifejezést nem tudunk adni, de egy iterativ eljárással számitógépen sorra kiszámithatjuk őket.

Vezessük be a

$$\underline{c}_K = \begin{bmatrix} c_{1,2,\ldots,K} \\ \vdots \\ c_{i_1,\ldots,i_K} \\ \vdots \\ c_{n,n-1,\ldots,n-K+1} \end{bmatrix},$$

$V_{n,K}$ dimenziós vektort, melynek $c_{i_1,\ldots,i_K}$ komponensei a V_K^n halmaz rendezése szerint következnek,

$$1 \leq K \leq n.$$

Vegyük észre, hogy a $p_{i_1,\ldots,i_n}(0)=0$ egyenletet felirhatjuk a

$$\underline{c}_n = A_{n-1}^{(n)} \underline{c}_{n-1} + \ldots + A_1^{(n)} \underline{c}_1$$

alakban, ahol az $A_K^{(n)}$ $V_{n,n} \times V_{n,K}$ tipusu mátrix.

A K -dik peremfeltétel $2 \leq K \leq n-1$ -re

$$\sum_{\ell=1}^{K} (-1)^{K-\ell} c_{i_1,\ldots,i_\ell} \, \Pi_\ell^{(i_1,\ldots,i_K)} =$$

$$= \sum_{j \neq i_1,\ldots,i_K} \sum_{\ell=0}^{K} (-1)^{K-\ell} c_{j,i_1,\ldots,i_\ell} \, \Pi_{\ell+1}^{(j,i_1,\ldots,i_K)} \int_0^\infty e^{-\Lambda_{j,i_1,\ldots,i_\ell} x} \, dF_j(x).$$

Ezt a Laplace-Stieltjes-transzformált segitségével

$$\sum_{\ell=1}^{K} (-1)^{K-\ell} c_{i_1,\ldots,i_\ell} \, \Pi_{\ell}^{(i_1,\ldots,i_K)} =$$

$$=\sum_{j\neq i_1, i_2, \dots, i_K} \sum_{\ell=0}^{K} (-1)^{K-\ell} C_{j, i_1, \dots, i_\ell} \prod_{\ell+1}^{(j, i_1, \dots, i_K)} \phi(\Lambda_{j, i_1, \dots, i_\ell}; j)$$

alakra hozhatjuk.

A K -dik peremfeltétel mátrixos alakban a

$$\underline{c}_K = A_{K+1}^{(K)} \underline{c}_{K+1} + \dots + A_1^{(K)} \underline{c}_1$$

kapcsolatot fejezi ki.

Ezek után a számolási algoritmus a következő:

$$\underline{c}_n = \sum_{j=1}^{n-1} A_j^{(n)} \underline{c}_j ,$$

$$c_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} B_j^{(n-1)} \underline{c}_j ,$$

ahol legyen

$$B_j^{(n-1)} = \left(1 - A_n^{(n-1)} A_{n-1}^{(n)} - A_{n-1}^{(n-1)}\right)^{-1} \cdot \left(A_n^{(n-1)} A_j^{(n)} + A_j^{(n-1)}\right)$$

$$1 \leq j \leq n-2.$$

$$\underline{c}_K = \sum_{j=1}^{K-1} B_j^{(K)} \underline{c}_j ,$$

ahol legyen

$$B_j^{(K)} = \left(I - A_{K+1}^{(K)} B_K^{(K+1)} - A_K^{(K)} \right)^{-1}$$

$$\left(A_{K+1}^{(K)} B_j^{(K+1)} + A_j^{(K)} \right),$$

$$2 \leq K \leq n-1 \quad , \quad 1 \leq j \leq K-1 .$$

Végül eljutunk a

$$\underline{c}_2 = B_1^{(2)} \underline{c}_1$$

egyenlethez.

Az utolsó egyenletünk

$$\underline{c}_1 = A_2^{(1)} \underline{c}_2 + A_1^{(1)} \underline{c}_1 + P_0 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

alaku.

Az előző relációt felhasználva ezt

$$\left(I - A_2^{(1)} B_1^{(2)} \right) \underline{c}_1 = P_0 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

alakban irhatjuk fel.

Igy

$$\underline{c}_1 = \left(I - A_2^{(1)} B_1^{(2)} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} P_0 .$$

Tetszőleges P_0 -ból inditva az iterációt sorra meghatározhatjuk a $c_{i_1,\dots,i_K}$, $(i_1,\dots,i_K) \in V_K^n$, $1 \leq K \leq n$, konstansokat majd ezekből a $p^*_{i_1,\dots,i_K}(x)$ függvényeket. Látható, hogy a megoldások a P_0 -tól függnek, melyet alkalmasan választva kapjuk az ergodikus eloszlást.

Legyen $P_{i_1,\dots,i_K}$ annak stacionárius valószinüsége, hogy az $(i_1,\dots,i_K)$ indexü gépek állnak.

Világos, hogy

$$P_{i_1,\dots,i_K}=\int_0^\infty p_{i_1,\dots,i_K}(x)\,dx,$$

vagyis

$$P_{i_1,\dots,i_K}=\int_0^\infty p^*_{i_1,\dots,i_K}(x)\left[1-F_{i_1}(x)\right]dx.$$

Jelölje P_K annak stacionárius valószinüségét, hogy K db gép áll.

Fennáll a

$$P_K=\sum_{V_K^n} P_{i_1,\dots,i_K}$$

reláció.

A P_0 értékét a

$$P_0+\sum_{K=1}^{n} P_K=1$$

normáló feltételből határozhatjuk meg.

2.3. Kihasználtsági vizsgálatok.

/i/ Szerelő kihasználtságra.

Az előzőekhez hasonlóan

$$U_{SZ}=1-P_0,$$

valamint az átlagos foglaltsági periódushossz

$$M\mathcal{J}=(1-P_0)/(\Lambda P_0)$$

/ii/ Gépkihasználtság.

Legyen $p^{(i)}$ annak stacionárius valószinüsége, hogy az i indexü gép áll. Jelölje egyensulyi helyzetben $\widetilde{W}_i$ az i indexü gép várakozási $+$ javitási idejének átlagértékét.

Tekintsük ismét az $(\underline{Y}(t),\ t\geq 0)$ folyamatot, melynek fázistere $\bigcup\limits_{k=1}^{n} V_k^n+\{0\}$.

Jelentse H_i azt az eseményt, hogy az i indexü gép rossz.

Vezessük be a

$$Z_{H_i}(t)=\begin{cases}1 & \text{ha } \underline{Y}(t)\in H_i,\\ 0 & \text{máskor,}\end{cases}$$

függvényt.

5. Tétel.

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T Z_{H_i}(t)\,dt=p^{(i)}=\frac{\widetilde{W}_i}{1/\lambda_i+\widetilde{W}_i}.$$

A tétel a fél-Markov folyamatok valamely részhalmazban való bolyongási idejének várható értékére vonatkozó reláció speciális esete. A reláció bizonyitása Tomkó J. egy későbbi dolgozatában fog szerepelni.

Igy az i indexü gép kihasználtsága

$$U_i = 1 - p^{(i)} = \frac{1/\lambda_i}{1/\lambda_i + \beta_i + W_i} .$$

A $p^{(i)}$ valószinüséget könnyen kiszámithatjuk a

$$P_{i_1,\dots,i_k} , (i_1,\dots,i_k) \in V_k^n , \quad 1 \leq k \leq n$$

eloszlásból u.i.

$$p^{(i)} = \sum_{V_k^n, \, 1 \leq k \leq n, \, i \in (i_1,\dots,i_k)} P_{i_1,\dots,i_k} .$$

Ha $p^{(i)}$ ismeretes, akkor az i indexü gép átlagos aktuális várakozási ideje

$$W_i = p^{(i)} / [\lambda_i (1 - p^{(i)})] - \beta_i .$$

A gépek össztermelékenysége

$$U_0 = \sum_{i=1}^{n} U_i = n - \sum_{i=1}^{n} p^{(i)} .$$

3. A homogén Takács-modell, s az eredmények összehasonlitása

3.1. A Takács-modell.

Tekintsünk n számu gépet, melyekre egy szerelő felügyel. Tegyük fel, hogy a gépek müködési ideje λ paraméterü exponenciális eloszlásu, és s gépek egymástól függetlenül termelnek ill. hibásodnak meg. A szerelő az elromlott gépeket leállásuk sorrendjében javitja, és ha van álló gép, akkor feltétlenül javit.

Feltesszük továbbá, hogy az egyes javitási idők egymástól független pozitiv valószinüségi változók azonos $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel.

Legyen

$$\beta = \int_0^\infty x \, dF(x), \qquad \sigma^2 = \int_0^\infty (x-\beta)^2 \, dF(x),$$

$$\phi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \, dF(x).$$

Jelölje $\eta(t)$ valószinüségi változó a t időpontban müködő gépek számát.

Ha $\eta(t)=K$, $(K=0,1,2,\ldots,n)$ akkor azt mondjuk, hogy a rendszer E_K állapotban van.

Jelölje rendre $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ azokat az időpontokat, midőn a szerelő befejez egy javitást és legyen $\eta(\tau_n - 0) = \eta_n$.

Legyen továbbá

$$\lim_{t\to\infty} P(\eta(t)=k)=Q_k^* \quad , \quad (k=0,1,\dots,n),$$

$$\lim_{n\to\infty} P(\eta_n=k)=Q_k \quad , \quad (k=0,1,\dots,n-1)$$

6. Tétel. Ha $\beta<\infty$, akkor az $\eta(0)$ valószinüségi változó kezdeti eloszlásától függetlenül létezik a $\{Q_k^*\}$ határeloszlás éspedig fennáll

$$Q_k^* = \sum_{r=k}^{n} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} B_r^* ,$$

ahol

$$B_0^*=1 , \qquad B_r^* = \frac{n\, C_{r-1}}{r} \sum_{j=r-1}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{1}{C_j} \Big/$$

$$\left(1+n\lambda\beta \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{1}{C_j}\right),$$

$$C_0=1, \qquad C_j=\prod_{i=1}^{j} \frac{\phi(i\lambda)}{1-\phi(i\lambda)} .$$

Bizonyitás. Lásd Takács [5] vagy Takács [1] 189-204 oldalán.

7. Tétel. A $\{Q_k^*\}$ és $\{Q_k\}$ határeloszlások között a következő kapcsolat áll fenn

$$Q_k^* = nQ_{k-1}/[k(n\lambda\beta + Q_{n-1})],$$

$$k=1,2,\dots,n,$$

$$Q_0^* = 1 - n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}Q_{k-1}/(n\lambda\beta + Q_{n-1}).$$

Bizonyitás. Lásd Takács [1]-t ill. [5]-t.

8. Tétel. Stacionárius esetben a szerelő kihasználtságát jelölje U_{sz}. Ekkor

$$U_{sz} = n\lambda\beta\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{1}{C_j}\Big/\left(1 + n\lambda\beta\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{1}{C_j}\right).$$

Bizonyitás. Lásd Takács [5]-ben.

9. Tétel. Jelölje U egy gép kihasználtságát stacionárius esetben. Ekkor

$$U = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{1}{C_j}\Big/\left(1 + n\lambda\beta\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{1}{C_j}\right).$$

Bizonyitás. Lásd Takács [5]-ben.

10. Tétel. Jelölje W egy meghibásodott gép átlagos várakozási idejét stacionárius esetben. Ekkor

$$W = (n-1)\beta - \frac{1}{\lambda}(1 - Q_{n-1}),$$

ahol

$$Q_{n-1} = 1\Big/\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{1}{C_j}.$$

Bizonyitás. Megtalálható Takács [1]-ben.

11. Tétel. Jelölje V stacionárius esetben a virtuális várakozási idő várható értékét. Ha az $F(x)$ véges szórásu, akkor

$$V=\frac{n\lambda\beta}{n\lambda\beta+Q_{n-1}}\left(\frac{\sigma^2+\beta^2}{2\beta}+(n-1)\beta-\frac{1-Q_{n-1}}{\lambda}\right).$$

Bizonyitás. Lásd Takács [1] 199-202 oldalán.

3.2. Az eredmények összehasonlitása.

Tekintsük a 2. fejezetben leirt problémát abban az esetben, amikor

$$\lambda_i=\lambda \quad \text{és} \quad F_i(x)=F(x), \quad i=1,2,\dots,n.$$

Jelentse:

$\nu(t)$ a t időpontban álló gépek számát,

ξ_t a javitás alatt levő gép t időpontig eltelt javitási idejét.

Vezessük be az

$$\underline{X}(t)=(\nu(t),\xi_t)$$

sztochasztikus folyamatot.

Könnyen látható, hogy $(\underline{X}(t),t\geq 0)$ Markov-folyamat

$$\mathcal{X}=\{0\}+\{1,2,\dots,n\}\times\mathbb{R}_+$$

fázistérrel.

A folyamat t időpontbeli eloszlása legyen

$$P_0(t)=P(\nu(t)=0),$$

$$P_k(x,t) = P(\nu(t)=k,\ \xi_t \leq x).$$

A folyamat ergodikus eloszlását jelölje

$$P_0 = \lim_{t\to\infty} P_0(t),$$

$$P_k(x) = \lim_{t\to\infty} P_k(x,t).$$

A 2. fejezetben kimondott tételekből következik, hogy a $p_k(x)$ stacionárius sürüségfüggvény megoldása a

$$\frac{d\,p_1^*(x)}{dx} + (n-1)\lambda p_1^*(x) = 0,$$

$$\frac{d\,p_2^*(x)}{dx} + (n-2)\lambda p_2^*(x) = (n-1)\lambda p_1^*(x),$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\,p_k^*(x)}{dx} + (n-k)\lambda p_k^*(x) = (n-k+1)\lambda p_{k-1}^*(x),$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\,p_n^*(x)}{dx} = \lambda p_{n-1}^*(x),$$

differenciál-egyenletrendszernek, és kielégiti az

$$n\lambda P_0 = \int_0^\infty p_1^*(x)\,dF(x),$$

$$p_1(0) = n\lambda P_0 + \int_0^{\infty} p_2^*(x)\,dF(x),$$
$$\vdots$$
$$p_k(0) = \int_0^{\infty} p_{k+1}^*(x)\,dF(x),$$
$$\vdots$$
$$p_n(0) = 0$$

peremfeltételeket.

12. Tétel. A differenciál-egyenletrendszer megoldása

$$p_k^*(x) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{n-j}{n-k} K_j\, e^{-(n-j)\lambda x},$$
$$1 \leq k \leq n,$$

ahol K_j-k a peremfeltételekből meghatározandó állandók.

Bizonyitás. A differenciálegyenleteket megoldva teljes indukciót alkalmazva a tétel állitása egyszerüen adódik.

13. Tétel. A K_j együtthatókra igaz a következő explicit összefüggés

$$K_j = \frac{\lambda(n-j)}{1-\varphi_{n-j}} \left[H_{n-j} - \binom{n}{j}\right] P_0,$$
$$1 \leq j \leq n-1,$$
$$K_n = \frac{1}{\beta}\left[H_0 - \binom{n}{n}\right] P_0,$$

ahol

$$H_0 = 1 + n\lambda\beta \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} \frac{1}{C_l},$$

$$H_r = \frac{n C_{r-1}}{r} \sum_{\ell=r-1}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \frac{1}{C_\ell}, \qquad 1 \leq r \leq n,$$

$$C_0 = 1, \qquad C_\ell = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{\phi_i}{1-\phi_i}; \quad \phi_i = \phi(i\lambda).$$

Bizonyitás. A peremfeltételből látható, hogy

$$K_1 = n\lambda P_0/\phi_{n-1} = \frac{\lambda(n-1)}{1-\phi_{n-1}} \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{\phi_{n-1}} - 1\right) P_0.$$

Nem nehéz belátni, hogy

$$\frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{\phi_{n-1}} - 1\right) = H_{n-1} - \binom{n}{1}.$$

Igy

$$K_1 = \frac{\lambda(n-1)}{1-\phi_{n-1}}\left[H_{n-1} - \binom{n}{1}\right] P_0.$$

Továbbá

$$K_2 \phi_{n-2} = K_1\left(1 + (n-2)\phi_{n-1}\right),$$

amiből

$$K_2 = \frac{n\lambda}{\phi_{n-1}\phi_{n-2}}\left(1 + (n-2)\phi_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{\lambda(n-2)}{1-\phi_{n-2}} \frac{n}{n-2} \frac{1-\phi_{n-2}}{\phi_{n-1}\phi_{n-2}}\left(1 + (n-2)\phi_{n-1}\right) P_0.$$

Rövid számolás után belátható, hogy

$$\frac{n}{n-2}\,\frac{1-\phi_{n-2}}{\phi_{n-1}\phi_{n-2}}\left(1+(n-2)\phi_{n-1}\right)=H_{n-2}-\binom{n}{2},$$

igy

$$K_2=\frac{\lambda(n-2)}{1-\phi_{n-2}}\left[H_{n-2}-\binom{n}{2}\right]P_0 .$$

A $K_j\ ,\ (j=2,\dots,n-1)$ együtthatókra a peremfeltételeket figyelembevéve a

$$K_{k+1}=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}K_j\binom{n-j}{n-k}\left[\frac{k-j+1}{n-k}+\phi_{n-j}\right]\Big/\phi_{n-k+1}\ ,\qquad k=2,\dots,n-2$$

összefüggést kapjuk.

Ebből kiindulva a

$$H_j-\binom{n}{j}=\frac{1-\phi_j}{\phi_j}\,\frac{j+1}{j}\,H_{j+1}$$

relációt szemelőtt tartva, teljes indukciót alkalmazva hosszabb elemi számitással igazolhatjuk a

$$K_j=\frac{\lambda(n-j)}{1-\phi_{n-j}}\left[H_{n-j}-\binom{n}{j}\right]P_0$$

kapcsolatot $j=3,\dots,n-1$ -re.

Végül az utolsó peremfeltételekből

$$K_n=\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-1-j}K_j .$$

A K_j együtthatókra a már ismert /összegü/ képletet alkalmazva, hosszabb elemi számitással nyerjük, hogy

$$K_n = \frac{1}{\beta}\left[H_0 - \binom{n}{n}\right]P_0 .$$

Jelölje P_K annak stacionárius valószinüségét, hogy K db gép áll.

Nyilvánvaló, hogy

$$P_K = \int_0^{\infty} p_K^*(x)\left(1-F(x)\right)dx, \quad 1 \leq K \leq n.$$

14. Tétel. A $\{P_K\}$ stacionárius eloszlásra

$$P_K = \sum_{j=1}^{K} (-1)^{K-j}\binom{n-j}{n-K}\left[B_{n-j}^* - \binom{n}{j}B_n^*\right],$$

$$1 \leq K \leq n-1,$$

$$P_n = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j}\left[B_{n-j}^* - \binom{n}{j}B_n^*\right] + \lambda\beta B_1^*,$$

valamint

$$P_0 = H_0^{-1} = \left(1 + n\lambda\beta\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{1}{C_j}\right)^{-1}$$

reláció áll fenn.

Továbbá

$$P_K = Q_{n-K}^*, \quad (K=0,1,\dots,n).$$

Bizonyitás. Mivel

$$p_K^*(x) = \sum_{j=1}^{K} (-1)^{K-j} \binom{n-j}{n-K} \frac{\lambda(n-j)}{1-\phi_{n-j}} \left[H_{n-j} - \binom{n}{j} \right]$$

$$e^{-(n-j)\lambda x} P_0 ,$$

ezért

$$P_K = \sum_{j=1}^{K} (-1)^{K-j} \binom{n-j}{n-K} \left[H_{n-j} - \binom{n}{j} \right] P_0 , \qquad 1 \leq K \leq n-1 .$$

Másrészt

$$P_n = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} \left[H_{n-j} - \binom{n}{j} \right] P_0 + (H_0 - 1) P_0 .$$

$$P_0 + \sum_{K=1}^{n} P_K = 1 \qquad \text{miatt}$$

$$P_0^{-1} = 1 + n\lambda\beta \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{1}{C_j} = H_0 .$$

Vegyük észre, hogy

$$P_0 = B_n^* = Q_n^* ,$$

$$B_r^* = H_r \cdot P_0 .$$

Igy

$$P_K = \sum_{j=1}^{K} (-1)^{K-j} \binom{n-j}{n-K} \left[B_{n-j}^* - \binom{n}{j} B_n^* \right] ,$$

$$1 \leq K \leq n-1 ,$$

$$P_n = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} \left[B_{n-j}^* - \binom{n}{j} B_n^* \right] + \lambda\beta B_1^* .$$

Legyen $1 \leq K \leq n$.

Takács eredményei alapján

$$Q_{n-K}^* = \sum_{r=n-K}^{n} (-1)^{r-n+K} \binom{r}{n-K} B_r^* = \sum_{j=0}^{K} (-1)^{K-j} \binom{n-j}{n-K} B_{n-j}^* =$$

$$= \sum_{j=1}^{K} (-1)^{K-j} \binom{n-j}{n-K} B_{n-j}^* + (-1)^K B_n^* \binom{n}{n-K} .$$

A P_K alakját figyelembevéve elegendő azt bizonyitani, hogy

$$-\sum_{j=1}^{K} (-1)^{K-j} \binom{n-j}{n-K} \binom{n}{j} B_n^* = (-1)^K \binom{n}{K} B_n^* .$$

Ebből

$$\sum_{j=0}^{K} (-1)^{K-j} \binom{n-j}{n-K} \binom{n}{j} = 0 .$$

Ez viszont igaz, mert

$$\sum_{j=0}^{K} (-1)^{K-j} \binom{n-j}{n-K} \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{K} (-1)^{K-j} \binom{K}{j} \binom{n}{K} = 0,$$

mivel

$$\sum_{j=0}^{K} (-1)^{K-j} \binom{K}{j} = 0 .$$

Könnyen látható, hogy

$$P_0 = Q_n^* .$$

Végül bebizonyitjuk, hogy

$$P_n = Q_0^* .$$

Takács szerint

$$Q_0^* = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j B_j^* .$$

Másrészt

$$P_n = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} \left[B_{n-j}^* - \binom{n}{j} B_n^* \right] + \lambda\beta B_1^* .$$

Nyilván elegendő azt bizonyitani, hogy

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j H_j = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} \left[H_{n-j} - \binom{n}{j} \right] + H_0 - 1 .$$

A baloldalt alakitva

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j H_j = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j H_j + H_0 + (-1)^n .$$

Igy az egyenlőség a

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} + 1 + (-1)^n = 0$$

relációra redukálódott.

Ezt tovább alakitva

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} = 0,$$

ami nyilván igaz.

3.3. Kihasználtsági vizsgálatok.

/i/ A szerelő kihasználtsága.

Köztudott, hogy stacionárius esetben a szerelő kihasználtságát az $1-P_0$ mennyiség adja.

Igy

$$U_{sz} = n\lambda\beta\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{1}{c_j}\Big/\left(1+n\lambda\beta\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{1}{c_j}\right).$$

Másrészt felujitási tételek miatt

$$1-P_0 = \frac{M\delta}{M\delta+1/n\lambda}$$

ahol $M\delta$ a szerelő átlagos foglaltsági periódushossza, $1/n\lambda$ pedig az átlagos szabad peródushossz.

Ebből következik, hogy

$$M\delta = \beta\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{1}{c_j} = \beta H_1/n.$$

/ii/ A gépek kihasználtsága.

Jelölje $P^{(i)}$ annak stacionárius valószinüségét, hogy az i indexü gép nem dolgozik. Ekkor

$$P^{(i)} = \sum_{K=1}^{n}\binom{n-1}{K-1}\binom{n}{K}^{-1}P_K = \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n}KP_K =$$

$$= \frac{1}{n}\left(n-B_1^*\right) = 1-\frac{1}{n}B_1^*.$$

Az i indexü gép kihasználtsága

$$U_i = 1 - p^{(i)} = \frac{1}{n} B_1^* .$$

B_1^* alakját figyelembevéve

$$U_i = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{1}{C_j} \Big/ \left(1 + n\lambda\beta \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{1}{C_j}\right).$$

A gépek összkihasználtságra

$$U_ö = \sum_{i=1}^{n} U_i = B_1^*$$

mivel a gépek homogének.

15. Tétel. Jelölje W stacionárius esetben egy elromlott gép átlagos várakozási idejét. Ekkor

$$W = (n-1)\beta + \frac{1}{\lambda}\left(1 - Q_{n-1}\right).$$

Bizonyitás. Az előző fejezetben kimondott felujitási tételhez hasonlóan ebben az esetben is igaz a

$$p^{(i)} = \frac{W_i + \beta}{1/\lambda + W_i + \beta}$$

reláció.

$$p^{(i)} = 1 - \frac{1}{n} B_1^*$$

valamint

$$Q_{n-1} = 1 \Big/ \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{1}{C_j}$$

miatt

$$W_i = (n-1)\beta - \frac{1}{\lambda}\left(1 - Q_{n-1}\right).$$

Mivel a gépek homogének igy

$W_i = W$ minden i -re, $i=1,2,\dots,n$.

Vegyük észre, hogy ha az $(\underline{X}(t), t \geq 0)$ Markov-folyamatban csak azokat az időpontokat tekintjük amikor a szerelő éppen befejez egy javitást, akkor ezek a pillanatok egy $F(x)$ alapfüggvényü felujitási folyamatot határoznak meg.

Jelölje $\gamma(t)$ a t időpontbeli virtuális várakozási időt, azaz azt az időt, amennyit egy gépnek kellene várakoznia ha a t pillanatban meghibásodna.

Jelölje továbbá $\chi(t)$ a t időponttól a szerelés alatt levő gép javitásának befejezéséhez szükséges időt.

Legyen $\chi(t)=0$ ha a t pillanatban nincs javitás.

A $(\nu(t), \chi(t), t \geq 0)$ szintén Markov-folyamat, melyre

$$\gamma(t) = \chi(t) + \sum_{i=1}^{\nu(t)-1} \chi_i ,$$

ahol $\chi_1, \chi_2, \dots$ azonos eloszlású független valószinüségi változók $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel, továbbá függetlenek $\nu(t)$ -től és $\chi(t)$ -től.

<u>16. Tétel</u>. Jelölje V stacionárius esetben a virtuális várakozási idő várható értékét. Ha $\sigma^2 < \infty$, akkor

$$V = \frac{n\lambda\beta}{n\lambda\beta + Q_{n-1}} \left(\frac{\sigma^2+\beta^2}{2\beta} + (n-1)\beta - \frac{1-Q_{n-1}}{\lambda} \right).$$

<u>Bizonyitás</u>: Könnyen látható, hogy

$$P(\chi(t)\leq x/\nu(t)\geq 1)=\int_{t}^{t+x}[1-F(t+x-u)]\,dH(u),$$

ahol $H(u)$ az $F(x)$ alapfüggvényü felujitási folyamat felujitási-függvénye. A központi felujitási tétel miatt $\beta<\infty$ esetén

$$\lim_{t\to\infty} P(\chi(t)\leq x/\nu(t)\geq 1)=\frac{1}{\beta}\int_{0}^{x}[1-F(u)]\,du.$$

Igy stacionárius esetben minden t -re

$$M(\chi(t)/\nu(t)\geq 1)=\frac{\sigma^2+\beta^2}{2\beta}.$$

Ebből

$$M\chi(t)=\frac{\sigma^2+\beta^2}{2\beta}\sum_{j=1}^{n}P_j.$$

Továbbá

$$M\gamma(t)=\sum_{j=1}^{n}P_j\left(\frac{\sigma^2+\beta^2}{2\beta}+(j-1)\beta\right).$$

Mivel

$$\sum_{j=1}^{n}P_j=1-P_0=\frac{n\lambda\beta}{n\lambda\beta+Q_{n-1}},$$

$$\sum_{j=1}^{n}jP_j=n-B_1^{*}.$$

Igy

$$M\gamma(t) = \frac{n\lambda\beta}{n\lambda\beta + Q_{n-1}}\left(\frac{\sigma^2+\beta^2}{2\beta} - \beta\right) +$$

$$+ \frac{n\lambda\beta}{n\lambda\beta + Q_{n-1}}\left(\frac{Q_{n-1}-1}{\lambda} + n\beta\right).$$

Rendezve

$$V = M\gamma(t) = \frac{n\lambda\beta}{n\lambda\beta + Q_{n-1}}\left(\frac{\sigma^2+\beta^2}{2\beta} + (n-1)\beta - \frac{1-Q_{n-1}}{\lambda}\right).$$

Látható, hogy a felsorolt eredmények rendre megegyeznek a Takács-féle modell megfelelő képleteivel.

Megjegyzés. Takács [5] cikkében és Bharucha-Reid [9] könyvének 418. oldalán az átlagos aktuális várakozási idő hibás. Később ezt Takács [1] összefoglaló müvében korrigálta.

4. Általános müködési és javitási idők PS kiszolgálás esetén

4.1. A gépkiszolgálás, mint sorbanállási hálózat

Vegyük észre, hogy a gépkiszolgálási probléma egy olyan zárt sorbanállási hálózatnak tekinthető, amelyben 2 állomás szolgálja ki a rendszerben levő n számu igényt.

Jelölje:

1 a müködő gépek állomását,

2 a meghibásodott gépek állomását,

$f^{(j)}(i)$, $(j=1,2)$, $i=1,2,\dots,n$ a j -dik állomás kiszolgálási intenzitását i igény jelenléte esetén.

Legyen
$$\phi^{(j)}(k)=\Big[\prod_{i=1}^{n} f^{(j)}(i)\Big]^{-1}.$$

Igy
$$\phi^{(1)}(\cdot)=1 \quad , \quad \phi^{(2)}(k)=k!\,.$$

Jelölje:

$\nu(t)$ a t időpontban álló gépek számát

$(\alpha_1(t),\dots,\alpha_{\nu(t)}(t))$ a hibás gépek indexeit.

A $(\xi_{\alpha_1(t)},\dots,\xi_{\alpha_{\nu(t)}(t)})$ valószinüségi változó jelentse a hibás gépeknek a javitáshoz szükséges munkamennyiségből a t ideig megkapott részét.

Jelölje továbbá az $(\eta_t^{(1)},\eta_t^{(2)},\dots,\eta_t^{(n-\nu(t))})$ véletlen komponensü vektor a lexikografikusan rendezett müködő gépeknek a t pillanatig eltelt folyamatos termelési idejét.

Ezek után vezessük be a következő sztochasztikus folyamatot

$$\underline{X}(t)=\left(\nu(t),\alpha_1(t),\dots,\alpha_{\nu(t)}(t);\xi_{\alpha_1(t)},\dots,\xi_{\alpha_{\nu(t)}(t)};\eta_t^{(1)},\dots,\eta_t^{(n-\nu(t))}\right).$$

Azt az állapotot, hogy a t pillanatban az $(i_1,\dots,i_K)$ indexü gépek állnak, s a javitáshoz szükséges munkamennyiségből $(x_{i_1},\dots,x_{i_K})$ részt már megkaptak, valamint a müködő gépek $(y_1,\dots,y_{n-K})$ ideje folyamatosan termelnek jelöljük

$$(i_1,\dots,i_K;\, x_{i_1},\dots,x_{i_K};\, y_1,\dots,y_{n-K}).$$

Legyen C_K^n, $(K=1,\dots,n)$ n elem K-ad osztályu lexikografikusan rendezett kombinációinak halmaza. Jelölje $\{0\}$ azt az állapotot, amikor minden gép termel.

Látható, hogy az $(\underline{X}(t),\, t\geq 0)$ Markov-folyamat

$$\left(\{0\}+\bigcup_{K=1}^{n} C_K^n\right)\times \mathbb{R}_+^n$$ fázistérrel.

Jelölje az -dik gép müködési idejének eloszlásfüggvényét $G_i(x)$ javitási idejének eloszlásfüggvénye legyen $F_i(x)$, $(i=1,2,\dots,n)$, a megfelelő várható értékek legyenek

$$\beta_i^{(1)}=\int_0^\infty x\, dG_i(x), \qquad \beta_i^{(2)}=\int_0^\infty x\, dF_i(x).$$

Az $(\underline{X}(t), t \geq 0)$ folyamat t pillanatbeli eloszlására vezessük be a

$$P_{i_1,\dots,i_K}(x_{i_1},\dots,x_{i_K}; y_1,\dots,y_{n-K}; t) =$$

$$= P\big(\nu(t)=K,\ \alpha_1(t)=i_1,\dots,\alpha_{\nu(t)}(t)=i_K;$$

$$\xi_{i_1} \leq x_{i_1},\dots,\xi_{i_K} \leq x_{i_K};\ \eta_t^{(1)} \leq y_1,\dots,\eta_t^{(n-K)} \leq y_{n-K}\big)$$

függvényeket.

17. Tétel. Ha az $(\underline{X}(t), t \geq 0)$ folyamatban szereplő $\beta_i^{(1)}, \beta_i^{(2)}, (i=1,\dots,n)$ várható értékek végesek, és az $G_i(x)$, $F_i(x)$ eloszlásuknak létezik sürüségfüggvényük, akkor a folyamatnak egyértelmüen létezik stacionárius sürüsége.

Továbbá, ha $P_{i_1,\dots,i_K}$ jelöli annak stacionárius eloszlását, hogy az $(i_1,\dots,i_K)$ indexü gépek állnak, akkor

$$P_{i_1,\dots,i_K} = P_0\, K! \prod_{\ell=1}^{K} \beta_{i_\ell}^{(2)} \prod_{j \neq i_1,\dots,i_K} \beta_j^{(1)},$$

$$P_0^{-1} = 1 + \sum_{K=1}^{n} \sum_{C_K^n} P_{i_1,\dots,i_K}.$$

Bizonyitás. Cohen [4] dolgozatában a megfelelő számitásokat elvégezve adódik az állitás.

Megjegyzés. Teljes exponenciális rendszer esetén

$$\beta_i^{(1)} = \frac{1}{\lambda_i}, \quad \beta_i^{(2)} = \frac{1}{\mu_i}, \quad i = 1,2,\dots,n;$$

igy

$$P_{i_1,\dots,i_K} = P_0 K! \prod_{\ell=1}^{K} \frac{1}{\mu_{i_\ell}} \prod_{j \neq i_1,\dots,i_K} \frac{1}{\lambda_j}.$$

Vegyük észre, hogy

$$P_{i_1,\dots,i_K} = P_0 K! \prod_{\ell=1}^{K} \frac{\lambda_{i_\ell}}{\mu_{i_\ell}} \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i}.$$

Bevezetve a

$$\Pi = \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{-1}$$

jelölést

$$P_{i_1,\dots,i_K} = P_0 K! \, \Pi \prod_{\ell=1}^{K} \frac{\lambda_{i_\ell}}{\mu_{i_\ell}}.$$

A normálást elvégezve a $P_{i_1,\dots,i_K}$ eloszlás megegyezik a 2.2. fejezet megfelelő eloszlásával.

4.2. Kihasználtsági vizsgálatok.

/i/ A szerelő kihasználtsága.

A szerelő szabad periódushosszát az

$$\eta = \min(\xi_1,\dots,\xi_n)$$

valószinüségi változó adja, ahol a ξ_i, $(i=1,2,\dots,n)$ az i indexü gép müködési idejét jelöli.

Az η eloszlása

$$P(\eta < x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left(1 - G_i(x)\right).$$

Mint ahogy az előző fejezetben láttuk a szerelő kihasználtsága stacionárius esetben

$$U_{sz} = 1 - P_0 = \frac{M\delta}{M\delta + M\eta},$$

ahol $M\delta$ a szerelő átlagos foglaltsági periódushosszát jelöli/

Mivel $\beta_i^{(1)} < \infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

ezért $M\eta < \infty$.

Látható, hogy a szerelő kihasználtsága a stacionárius eloszlás segitségével meghatározható, de az átlagos foglaltsági periódushossz kiszámitása már nehézségekbe ütközik, mivel $M\eta$ -t nem könnyü megadni.

Ha $G_i(x) = 1 - e^{-\lambda_i x}$ akkor

$$P(\eta < x) = 1 - e^{-\Lambda x}, \quad \text{igy}$$

$$M\eta = 1/\Lambda.$$

/ii/ Gépkihasználtság.

Jelölje $p^{(i)}$ annak stacionárius eloszlását, hogy az i indexü gép áll, s jelentse $\tilde{W}_i$ az átlagos várakozási időt /álló időt/.

Világos, hogy

$$p^{(i)} = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_k) \in C_k^n,\ i \in (i_1,\ldots,i_k) \\ 1 \leq k \leq n}} P_{i_1,\ldots,i_k}$$

Az i -dik gép kihasználtsága

$$U_i = 1 - p^{(i)}.$$

Másrészt felujitási elméleti megfontolások miatt stacionárius esetben

$$p^{(i)} = \frac{\widetilde{W}_i}{\widetilde{W}_i + \beta_i^{(1)}},$$

melyből

$$\widetilde{W}_i = p^{(i)} \beta_i^{(1)} / (1 - p^{(i)}) .$$

A gépek összkihasználtsága

$$U_0 = \sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i^{(1)}}{\beta_i^{(1)} + \widetilde{W}_i} .$$

Irodalomjegyzék

[1] Takács, L.: Introduction to the Theory of Queues, New York, Oxford University Press, 1962.

[2] Kleinrock, L.: Sorbanállás-kiszolgálás, Müszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[3] Cohen, J.W.: The single server queue, Wiley Interscience, 1969.

[4] Cohen, J.W.: The multiple phase service network with generalised processor sharing, Acta Informatica, 12 /1979/, 245-284.

[5] Takács, L.: Bizonyos várakozási idő problémáról, MTA III. Oszt. Közl., 7 /1957/, 183-197.

[6] Tomkó, J.: Számológépek mközponti egységének kihasználtságáról, Alk. Mat. Lapok, 1 /1975/, 319-331; 3 /1977/, 83-96.

[7] Гнеденко, Б.В. - Коваленко, И.Н.: Лекции по теории Массового обслуживания, Киев, 1963.

[8] Gaver, D.P.: Probability models for multiprogramming computer systems, J. ACM, 3 /1967/, 423-438.

[9] Bharucha-Reid, A.T.: Elements of the theory of Markov processes and their applications, McGraw-Hill Book Company, INC, 1960.

Summary

The Thesis, titled as "On machine interference, deals with a special queueing problem, which has considerable practical importance. The roots of it date back even to Hincsin, who raised the question first in the thirties. Then it was investigated by several famous mathematicians such as Palm, Naor, Fry, Kronig, Feller, Benson and Cox. The problem can be formulated as follows.

Let us consider a set of n machines which work continuously and independently. However, at any time a machine may break down and needs service by one of r repairmen.

Each time a machine stops, an operative has to do a certain amount of work in order to put it in a running state. The repairs are independent of each other and carried out according to certain service discipline. The most common disciplines are first in, first out abbreviated as FIFO, priority, time-sharing or processor-sharing.

Both running and repair times are independent, positive random variables with given distribution functions.

It should be mentioned that the mathematical model of machine interference often occurs in probabilistic description of multiprogramming computer systems.

The single repairman corresponds to the Central Processor Unit /CPU/, repair time to CPU time and running time to I/O time, respectively.

The dissertation consists of 4 chapters.

In Chapter 1 the machine i is assumed to have exponentially distributed running time with parameter λ_i and the distribution function of repair time is also exponential with intersity μ_i.

In steady-state utilization, mean occupation time of the operative, efficiency and mean waiting time of a machine are discussed under FIFO, processor-sharing and priority service disciplines.

In Chapter 2 the machine i is supposed to have exponentially distributed running time with intensity λ_i and the service time is arbitrary distributed random variable with distribution function $F_i(x)$. A single operative repairs the stopped machines in the order of their breakdowns.

The stationary probability of that the machines $(i_1, \dots, i_k)$ are not working and broke down in this order can be obtained by the help of a system of integro-differential equations and the boundary conditons concerning to it. This can be solved by an iterative method.

It is also investigated how to calculate operative and machine utilizations.

Section 3 deals with its special case when the machines are homogeneous. Explicit formulas corresponding to the well-known Takács results are derived with the aid of our method. The Hincsin-formula and utilizations are given as well.

In the last Chapter the machine interference is considered as queueing network with generalized processor-sharing and the characteristics mentioned in previous parts can be found, too.