MTA doktori értekezés tézisei

Sztrik János

VÉGES FORRÁSÚ SORBANÁLLÁSI RENDSZEREK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Debreceni Egyetem

Matematikai és Informatikai Intézet

2002

Bevezetés

Jelen dolgozat témaköre a modern alkalmazott valószínűségszámítás egyik legdinamikusabban fejlődő ágához, nevezetesen a sorbanállási elmélethez tartozik. A szakirodalom szerint az első publikált eredmények l9l8-ban születtek, melyek A.K. Erlang dán mérnök-matematikus nevéhez fűződnek [13], aki telefonforgalmi problémákra adott matematikai modelleket. Ezt követően számos gyakorlati feladatot sikerült megoldani sztochasztikus módszerekkel. Az elmélet fejlődéséhez a számítástechnikai, távközlési és kommunikációs rendszerek rohamos térhódítása is nagyban hozzájárult. A gyakorlati problémák modellezéséhez a sztochasztikus folyamatok mind általánosabb osztályait kellett bevezetni. Évente sok új könyv jelenik meg és új folyóiratok indulnak a különböző tudományterületeken felmerülő problémák megoldására. Külön meg kell említenünk az utóbbi időben intenzív fejlődésnek indult hírközlési rendszereket és a számítógép-vezérelt gyártási folyamatokat, amelyek kikényszerítik a matematikai modellek általánosításait. Számos cikk és könyv jelent meg az említett témakörökben, éppen ezért a teljesség igénye nélkül, a kutatói és alkalmazói köztudatban alapirodalomként számontartott műveket említhetjük, mint pl. [3,6,7,9-12,14,19,24,27, 28,33-35,37,41,45-48,50]. Felhívjuk a figyelmet a [10,47] munkákra, ahol bőséges forrás áll az érdeklődők rendelkezésére.

A nemzetközi vérkeringésbe a magyar szakemberek elég hamar bekerültek és ma is számosan tevékenykednek. Ki kell emelnünk időrendi sorrenben Takács Lajos, Tomkó József, Arató Mátyás, Gergely József, Mogyoródi József, Bártfai Pál, Győrfi László, Benczúr András, Lakatos László, Asztalos Domokos, Jereb László, Telek Miklós, Almási Béla munkásságát, akik nagyban hozzájárultak a hazai kutatások nemzetközi elismertségéhez, lásd például [5,16,22,43,44,45,49]. Kezdetben ezek a csoportok csak Budapesten dolgoztak, de Tomkó József és Arató Mátyás vezetésével a debreceni kutatók is számos szép eredményt értek el és a különböző pályázatok segítségével jelenleg is aktív nemzetközi együttműködés folytatnak német, holland, japán, ukrán, angol kollégákkal.

Jelen dolgozatban a kanditátusi fokozat megszerzése óta (1989) megjelent munkáimból gyűjtöttem össze a leglényegesebbeket, ügyelve arra, hogy lehetőleg minden témakör említést nyerjen.

Ennek megfelelően **3 téziscsoportba** szedtem a megoldott problémákat, nevezetesen, *gépkiszolgálási problémák, számítógép és távközlési rendszerek modellezése, bonyolult rendszerek megbízhatósági vizsgálatai.* Az egyes témakörökön belül külön foglalkoztam az *analitikus, numerikus, aszimptotikus és sztochasztikus szimulációs* megoldási módszerekkel. Az alábbiakban röviden ismertetjük az alapproblémákat, a konkrét feltevéseket a megfelelő fejezetekben adjuk meg.

Gépkiszolgálási problémák

Tegyük fel, hogy egymástól függetlenül n db gép dolgozik, majd bizonyos idő után meghibásodnak. A javítást egy vagy több szerelő végzi valamely elv alapján, általában érkezési sorrend vagy bizonyos prioritások megadása szerint. A hibamentes működési és javítási idők valószínűségi változók, a matematikai kezelhetőség miatt általában függetlenek. Célunk, hogy megadjuk az egyensúlyi rendszerjellemzőket, úgymint, *gépkihasználtságok, a szerelő hatékonysága, a meghibásodott gépek átlagos száma, a gépek hibás állapotban való tartózkodásának átlagos ideje* stb.

Nyilvánvalóan a matematikai modellek bonyolultsága attól függ, hogy milyen eloszlást tételezünk fel az említett valószínűségi változókról, a gépek különbözőek vagy sem, egy vagy több szerelő dolgozik ill. milyen javítási elvet követünk. A probléma fontosságát jól szemléltetik a korai publikációk. A teljesség igénye nélkül megadunk néhány érdekesebb munkát, lásd [4,25,36,43,45]. Külön szeretném felhívni a figyelemet a [39] cikkre, ahol bőséges nyugati irodalom van felsorolva, sajnos mellőzve az ú.n. keleti irodalmat.

Számítógép és távközlési rendszerek modellezése

Tegyük fel, hogy n db terminál egymástól függetlenül bizonyos idő után igényeket generál a CPU felé, majd tétlen marad amíg választ nem kap tőle. A CPU a jobokat bizonyos elv szerint szolgálja ki, amely általában FIFO, PS, Polling ill. különböző prioritásos elv. Célunk, hogy megadjuk a rendszer egyensúlyi jellemzőit, úgymint, *CPU kihasználtság, a CPU átlagos foglaltsági periódushossza, terminál kihasználtságok, a jobok átlagos válasz ideje stb.* A matematikai modell bonyolultsága attól függ, hogy a terminálok valószínűségi szempontból homogének-e vagy sem, milyen elv szerint szolgálja ki őket a CPU, a generálási valamint a kiszolgálási idők milyen eloszlást követnek, a terminálok ill. a CPU meghibásodhatnak-e vagy sem.

Hasonló modellekkel találkozhatunk a több-processzorú egy-buszos rendszerek esetén is, ahol a terminálok szerepét a processzorok, CPU helyét pedig a busz veszi át. Természetesen számos probléma modellezhető a hírközlési és számítógépes hálózatok területén is, pl. szerver-kliens rendszerek, stb.

Javasolt irodalom: [1,2,5,7,10-12,23,24,35,26,27,33,40,49,50].

Bonyolult rendszerek megbízhatósági vizsgálatai

Tegyük fel, hogy egymástól függetlenül n db elem működik, majd bizonyos idő után meghibásodnak. A javítást egy vagy több szerelő végzi valamely elv alapján, általában érkezési sorrend vagy bizonyos prioritások megadása szerint. A hibamentes működési és javítási idők valószínűségi változók, a matematikai kezelhetőség miatt általában függetlenek. Célunk, hogy megadjuk a *rendszer hibamentes működési idejének az eloszlását.* Matematikailag ez nem más, mint a konstruált sztochasztikus folyamatnak az állapot tér bizonyos részhalmazában való tartózkodási idejének az eloszlása. Nyilvánvalóan a matematikai modellek bonyolultsága attól függ, hogy milyen eloszlást tételezünk fel az említett valószínűségi változókról, a gépek különbözőek vagy sem, egy vagy több szerelő dolgozik ill. milyen javítási elvet követünk. A problémák megoldásában nagy szerepet kaptak az orosz ill. ukrán matematikusok által kifejlesztett aszimptotikus módszerek, melyek jól alkalmazhatók figyelembe véve, hogy az elemek átlagos működési ideje általában sokkal nagyobb, mint az átlagos javítási idejük. Erre a tényre a fent említett modellekben *gyors kiszolgálású* rendszerek terminológiával hivatkoznak. Feltétlenül meg kell említenünk Gnedenko, Solovjev, Koroljuk, Turbin, Kovalenko, Anisimov, Buszlenko, Kalasnikov munkásságát. Idetartozó legfontosabb irodalom: [3,6,8,17-21,29-32,38,42].

Mint látható, a fenti modellek közös jellemzője, hogy az igények egy véges forrásból származnak és a kiszolgálás után oda is térnek vissza. A forrás újabb igényt nem generál addig, amíg az előző vissza nem tér oda. Az ilyen típusú sorbanállási rendszereket **véges-forrású rendszereknek** nevezzük, és innen ered a dolgozat címe is. A téma fontosságát nagyon jól tükrözi az a tény, hogy a szakirodalomban alapműnek számító Takagi [46] könyv 2. kötetében található 4. fejezet 200 oldalon tárgyalja ezen problémakört.

Az új tudományos eredmények rövid ismertetése

Jelen dolgozat 3 fejezetből (téziscsoportból) áll, melyekben az előbb felsorolt problémacsoportok kifejtést nyernek. Munkámhoz 8 **darab publikációt** csatoltam, ahol a felvetett problémák történeti áttekintése megtalálható, ezért ezektől a megfelelő alfejezeteknél eltekintettem. Ezen összefoglalóban törekedtem arra, hogy a sorbanállási rendszerek vizsgálatában használt módszerek mindegyike említést nyerjen. Ennek megfelelően gyűjtöttem össze a cikkeket, de a publikációs listából látható, hogy az utóbbi években a numerikus és az aszimptotikus módszerek nagyobb hangsúlyt kaptak, mivel a rendszerek is bonyolultabbak. Törekedtem arra, hogy kevésbé bonyolult modellekben bemutassam az alkalmazott módszer lényegét és a komplexebb rendszerekre megadjam a megfelelő hivatkozást.

Gépkiszolgálási problémák

- *Megmutattam, hogy tetszőleges eloszlású működési időket és exponenciális eloszlású javítási időket feltételezve, véletlen kiszolgálási elvet alkalmazva a stacionárius valószínűségek szorzat-alakban írhatók fel, melyek csak a működési idők átlagától függnek.*

A gépkiszolgálási probléma olyan modelljével foglalkoztam amikor a gépeket prioritásos és közönséges csoportokba soroljuk. Minden egység működési és javítási ideje exponenciális eloszlású rá jellemző intenzitásokkal, vagyis heterogének. A meghibásodásokat egyetlen szerelő hárítja el a csoporton belül érkezési sorrendben, de a prioritásos gépeknek a javítása megszakításos prioritást élvez a közönségesekkel szemben. Célunk, hogy megadjuk a szokásos egyensúlyi rendszerjellemzőket, ú.m. a szerelő és a gépek kihasználtsága, átlagos várakozási, hibás állapotban való tartózkodási idők, a szerelő átlagos foglaltsági periódushossza, a hibás gépek átlagos száma, átlagos sorhossz, stb. Továbbá alkalmas célfüggfény felállításával eldöntsük, hogy melyik gépcsoportnak adjunk prioritást.

- *Bár az exponencialitások miatt a bevezetett folyamat folytonos idejű Markov-lánc lesz, de ennek állapot tere nagyon nagy számosságú lehet. Ezért a stacionárius valószínűségeket megfelelő vektorokba rendezve az állapotegyenleteket egy rekurzív alakban írtam fel, melynek segítségével a számítások memória igényét nagymértékben csökkentettem*

- *Feltételezve, hogy a gépek meghibásodási és javítasi intenzitásai valamely háttér folyamat állapotaitól is függnek, gyors kiszolgálás esetén bebizonyítottam, hogy az az időtartam amíg a hibás gépek száma egy előre megadott szintet elér aszimptotikusan exponenciális eloszlású lesz.*

Számítógép és távközlési rendszerek modellezése

Olyan meghibásodható terminálrendszert modelleztem, ahol a fellépő valószínűségi változók exponenciális eloszlásúak és egymástól függetlenek. Feltételezzük, hogy a programgenerálás intenzitása minden terminál esetében λ és a kiszolgálási intenzitás μ. A programgenerálással foglalkozó terminálok γ intenzitással hibásodhatnak meg, melyeket r szerelő háríthat el. Hasonlóképpen a CPU sem megbízható, esetében a meghibásodási intenzitás α, a javítási intenzitás pedig β. A CPU meghibásodása blokkolja a terminál műveleteket és javítása prioritást élvez a terminál javításokkal szemben. Mint látható a modell a gyakorlati életben előforduló problémára adhat megoldást és célunk a szokásos rendszerjellemzők meghatározása. Megjegyezzük, hogy a terminálok esetében sztochasztikus homogenenitást tételeztem fel.

A modell érdekessége, hogy legjobb tudomásunk szerint ebben a témakörben az elsők között vesz figyelembe meghibásodható egységeket.

- *Bár az exponencialitások miatt a bevezetett folyamat folytonos idejű Markov-lánc lesz, de ennek állapot tere nagyon nagy számosságú lehet. Ezért a stacionárius valószínűségeket megfelelő vektorokba rendezve az állapotegyenleteket egy rekurzív alakban írhattam fel. A kapott egyenletrendszer megoldását iterációs eljárással határoztam meg, amely nagymértékben csökkentette a program memória igényét.*

P számú processzor exponenciális eloszlású ideig generál igényeket egy közös memória felé, melyet egy közös busz köt össze a processzorokal. A feldolgozási idők exponenciális eloszlást követnek. Feltesszük továbbá, hogy az egész rendszer viselkedését egy véges Markov-lánc állapotai befolyásolják. Ezek után legyen a $p-edik$ processzor igénygenerálási intenzitása $\lambda_p(i,\epsilon)$, a kiszolgálási intenzitása pedig $\mu_p(i)$, feltéve, hogy a kontoláló lánc az i állapotban tartózkodik, $i = 1, 2, \ldots, r, p = 1, 2, \ldots, P$.
Mivel a processzorok sokkal gyorsabban dolgoznak, mint a busz, ezért $\lambda_p(i,\epsilon) = \frac{\lambda_p(i)}{\epsilon} \to \infty$, amint $\epsilon \to 0,\ i = 1, \ldots, r, p = 1, 2, \ldots, P$.

Jelölje Ω_ϵ a busz foglaltsági periódushosszát. Célunk ezen valószínűségi változó eloszlásának a meghatározása. A feltételek miatt nyilvánvaló, hogy Ω_ϵ nagyon hosszú lesz és ezért normalizálnunk kell. A normalizált változó határeloszlásának ismeretében azonban már közelíteni tudjuk az eredeti eloszlást. Erre szolgál a következő állítás:

- *A rendszer kezdeti eloszlásától függetlenül, $\epsilon \to 0$ esetén, az $\epsilon^{P-1}\Omega_\epsilon - k$ gyengén konvergálnak egy exponenciális eloszlású valószínűségi változóhoz, melynek paraméterét egyszerűen kiszámíthatjuk, sőt homogén kiszolgálás esetén konkrétan megadhatjuk. Ezek után a szokásos rendszerjellemzők már meghatározhatók.*

Bonyolult rendszerek megbízhatósági vizsgálatai

- *Elsők között vizsgáltam olyan rendszereket, ahol bár a fellépő valószínűségi változók exponenciális eloszlásúak, de a meghibásodási és javítási intenzitásokat egy háttér folyamat állapotai befolyásolják így bizonyos értelemben az elemek függetlenségét enyhíteni tudtam. Feltételezve, hogy a javításokat a meghibásodásokhoz képest sokkal gyorsabban javítják ki, megmutattam, hogy a rendszer élettartama aszimptotikusan exponenciális eloszlású.*

- *A német-magyar Tét együttműködés keretében olyan szimulációs programcsomagot készítettem, ahol véges-forrású, Markov-vezérelt rendszereket tanulmányozunk, melyeknél a fellépő valószínűségi változók kevert Erlang-eloszlásúak. A rendszerjellemzőkre a Law-Carson eljárás segítségével konfidencia-intervallumot is adtam.*

Összesítve

- *Tudomásom szerint az elsők között vizsgáltam nem-megbízható heterogén terminálrendszereket, valamint véletlen környezetben működő rendszereket, melyekre különböző alkalmazási területeken különböző terminológiával hivatkoznak, pl. Markov-modulált, Markov-vezérelt, változó paraméterű rendszerek, stb.*
- *A problémák vizsgálataihoz új rekurziós numerikus eljárásokat vezettem be és rávilágítottam a modellek újszerűségére, mivel megmutattam, hogyan lehet a megbízhatóságelméletben alkalmazott aszimptotikus módszerekkel vizsgálni bonyolult számítógép– és telekommunikációs rendszereket.*
- *Olyan szimulációs programcsomagot készítettem, ahol véges-forrású, Markov-vezérelt rendszereket tanulmányoztam, melyeknél a fellépő valószínűségi változók eloszlása Erlang-eloszlások keveréke. A rendszerjellemzőkre a Law-Carson eljárás segítségével konfidencia-intervallumot is adtam.*

Meg kell jegyeznünk, hogy a kutatott téma nem minden esetben teszi lehetővé, hogy a matematikában megszokott tétel formában kimondhassuk az eredményt, mivel sok esetben numerikus eljárásokat kellet beprogramoznunk, melyek segítségével a rendszer különböző input paramétereinek a rendszerjellemzőkre gyakorolt hatásátát akartuk vizsgálni.
Hasonló okok miatt a szimulációs programcsomagokat is csak vázlatosan mutathatjuk be. Fel szeretnénk hívni a figyelmet arra, hogy a mai bonyolult rendszerek vizsgálataiban nem elég egyetlen megoldási módszer hiszen a kapott eredményeket ellenőriznünk kell, és ezért szokás az említett módszerek szinte együttes alkalmazása.

Végül köszönetemet szeretném kifejezni volt tanáraimnak, jelenlegi munkatársaimnak és tanítványaimnak akik tanácsaikkal, kérdéseikkel és észrevételeikkel arra ösztönöztek, hogy megtaláljam az összhangot a matematikai precizitás és az alkalmazási szint között.

Hálás vagyok a Kossuth Lajos Tudományegyetem, valamint a jogutód Debreceni Egyetem Matematikai és Informatikai Intézetének, hogy infrastruktúrájával munkámat segítette.

A kutatásokhoz az OTKA-l648/90, T0l4975/95, MKM FKFP-04556/1997, OMFB TéT D-12/97 pályázatok valamint a Széchenyi Professzori Ösztöndíj részleges anyagi támogatást nyújtottak.

1. GÉPKISZOLGÁLÁSI PROBLÉMÁK

Jelen fejezetben a bevezetőben leírt általános modellt specializáljuk azáltal, hogy minden esetben megadjuk a megfelelő eloszlásokat és a kiszolgálási elvet. Az ismertetett rendszerek részletes vizsgálatához csatoljuk a publikált cikket, bővebb információk is ott találhatók. Alfejezetenként tárgyaljuk a különböző megoldási módszereket.

1.1 Analitikus módszer

Tegyük fel, hogy az i-dik gép működési ideje tetszőleges eloszlású, de abszolút folytonos valószínűségi változó $f_i(x)$ sűrűségfüggvénnyel, a javítási idők μ_i paraméterű exponenciális eloszlást követnek. A javítást r db szerelő végzi a következő elv szerint. Minden meghibásodásnál és javítás befejezésnél a kiszolgálások megszakadnak és a meghibásodott gépeket véletlenszerűen kezdik ismét javítani, vagyis SIRO (Service In Random Order) elvet követünk. Természetesen, ha minden szerelő foglalt akkor sorbanállás alakul ki. Feltételezzük továbbá, hogyha k db gép áll, akkor az igényelt működési idők $a(k)$, az igényelt javítási idők pedig $b(k)$ intenzitással növekednek ill. csökkennek, $a(k) > 0$, $k = 1, \ldots, n$, $b(k) > 0$, $k = 0, \ldots, n-1$. Az érintett valószínűségi változók függetlenek egymástól.

Mivel a gépek inhomogének, ezért a rendszer működését leíró matematikai modell egy kissé bonyolult lesz.

Be kell vezetnünk a következő jelöléseket ill. sztochasztikus folyamatot:

$\nu(t)$	:	a t-dik időpillanatban működő gépek száma,
$\alpha_1(t), \ldots, \alpha_{\nu(t)}(t)$	:	indexeik,
$\xi_{\alpha_1(t)}, \ldots, \xi_{\alpha_{\nu(t)}(t)}$	:	a t-dik időpillanatban működő gépek eddig eltelt folyamatos működési idejei, megfelelően.

Könnyű látni, hogy az

$$\underline{X}(t) = \Big[\nu(t); \quad \alpha_1(t), \ldots, \alpha_{\nu(t)}(t); \quad \xi_{\alpha_1(t)}, \ldots, \xi_{\alpha_{\nu(t)}(t)}\Big]$$

szakaszosan lineáris Markov-folyamat, melynek állapotterét az

$$\big\{(k; i_1, \ldots, i_k; x_1, \ldots, x_k), \quad x_i > 0, \quad i = 1, \ldots, k, \quad (i_1, \ldots, i_k) \in C_n^k\big\}$$

események alkotják, vagyis

$$(\nu(t) = k;\ \alpha_1(t) = i_1, \ldots, \alpha_k(t) = i_k;\ \xi_{i_1} \leq x_1, \ldots, \xi_{i_k} \leq x_k;\ x_s > 0,\ s = 1, \ldots, k)$$

$k = 1, \ldots, n$, ahol C_n^k n elem k-ad osztályú kombinációinak halmazát jelöli, kiegészítve a $\{0\}$ állapottal, amikor minden gép hibás. A stacionárius valószínűségekre vezessük be a következő függvényeket:

$$Q_o = \lim_{t\to\infty} P(\nu(t) = 0),$$

$$Q_{i_1,\ldots,i_k}(x_1, \ldots, x_k) = \lim_{t\to\infty} P\left(\nu(t) = k;\ \alpha_S(t) = i_s;\ \xi_{i_s} \leq x_s,\ s = 1, \ldots, k\right).$$

Gnedenko-Kovanenko [19] alapján, ha

$$a(k+1) > 0,\ b(k) > 0,\ k = 0, \ldots, n-1,\ 0 < \mu_i < \infty,\ \frac{1}{\lambda_i} = \int_0^\infty x f_i(x) dx < \infty,$$

$i = 1, \ldots, n$, akkor ezek egyértelműen léteznek.

A szokásos módon az ú.n. a normált-sűrűségfüggvényekre felírhatjuk a megfelelő integro-differenciál egyenletrendszert és a kezdeti feltételeket, melyekből ezek az ismeretlenek meghatározhatók. Legyenek továbbá

$$Q(i_1, ..., i_k) = \lim_{x_i \to \infty,\ i=1,\ldots,k} Q_{i_1,\ldots,i_k}(x_1, \ldots, x_k)$$
$$(i_1, ..., i_k) \in C_n^k,\ k = 1, \ldots, n,$$
$$\hat{Q}_k = \lim_{t \to \infty} P(\nu(t) = k),\ k = 0, \ldots, n.$$

A fő eredményünk az, hogy a stacionárius valószínűségek szorzat-alakúak és csak a várható értékektől függnek. Nevezetesen, kimondhatjuk az alábbi állítást

1.1. Tétel. (Sztrik [J13]) *A fenti valószínűségekre igazak a következő összefüggések:*

$$Q(i_1, \ldots, i_k) = \frac{(n-k)!}{r! r^{n-r-k}} \frac{a(k+1) \ldots a(n+k)}{b(k) \ldots b(n+k-1)} \frac{1}{\prod_{s \neq i_1, \ldots, i_k} \mu_s} \frac{1}{\prod_{j=1}^k \lambda_{i_j}} c,$$
$$k = 1, \ldots, n-r,$$
$$Q(i_1, \ldots, i_k) = \frac{a(k+1) \ldots a(n+k)}{b(k) \ldots b(n+k-1)} \frac{1}{\prod_{s \neq i_1, \ldots, i_k} \mu_s} \frac{1}{\prod_{j=1}^k \lambda_{i_j}} c,$$
$$k = n-r, \ldots, n.$$

Mivel

$$\hat{Q}_n = Q(1, \ldots, n), \quad c = \lambda_1 \ldots \lambda_n \hat{Q}_n, \quad \hat{Q}_0 = Q_0,$$
$$\hat{Q}_k = \sum_{(i_1, \ldots, i_k) \in c_n^k} Q(i_1, \ldots, i_k),$$

az egész rendszer a $\hat{Q}_n$ mennyiségtől függ, melyet a szokásos normalizáló feltételből határozhatunk meg.

A rendszer részletes leírása a csatolt Sztrik [J13] cikkben található, ahol további következményeket is megadunk.

A kapott eredmények a Kleinrock [27], Stecke, Aronson [39], Takagi [46] munkákban található modellek általánosításai, ahol vagy homogén vagy azonos intenzitással bíró rendszereket vizsgálnak.

1.2 Numerikus módszer

Tegyük fel, hogy a gépeket két csoportba sorolhatjuk, m gép a prioritásos n pedig a közönséges fajtához tartozik. Minden gép esetén a működési és javítási idők exponenciális eloszlásúak a rájuk jellemző paraméterekkel. A javításokat egy szerelő végzi abszolút elsőbbséget adva a prioritásos csoportba tartozóknak, de mindkét csoporton belül FIFO elvet alkalmaz. A fellépő valószínűségi változók függetlenségét feltételezve szeretnénk meghatározni a szokásos rendszerjellemzőket és különböző költségek megadásása esetén eldönteni, hogy melyik gépcsoportnak adjunk prioritást. Ehhez vezessük be a következő jelöléseket:

$\kappa(t)$	:	a t-dik időpillanatban meghibásodott prioritásos gépek száma,
$\alpha_1(t), \ldots, \alpha_{\kappa(t)}(t)$	:	indexeik a meghibásodás sorrendjében,
$\nu(t)$	:	a t-dik időpillanatban meghibásodott közönséges gépek száma,
$\beta_1(t), \ldots, \beta_{\nu(t)}(t)$	:	indexeik a meghibásodás sorrendjében.

Mivel a fellépő valószínűségi változók exponenciális eloszlásúak az

$$\underline{X}(t) = \big\{\kappa(t); \alpha_1(t), \ldots, \alpha_{\kappa(t)}(t) : \nu(t); \beta_1(t), \ldots, \beta_{\nu(t)}(t)\big\}$$

véges állapotterű, folytonos idejű Markov-lánc, melynek állapotait a

$$\big\{(k; i_1, \ldots, i_k : s; j_1, \ldots, j_s),\ k = 0, \ldots, m,\ s = 0, \ldots, n,\ (i_1, \ldots, i_k) \in V_m^k,$$
$$(j_1, \ldots, j_s) \in V_n^s,\ i_0 = 0,\ j_0 = 0\big\},$$

események alkotják, ahol V_k^r k elem r-ed osztályú variációinak lexikografikusan rendezett halmazát jelöli. A létező stacionárius eloszlásra vezessük be az alábbi jelölést

$$p(0:0) = \lim_{t\to\infty} P(\nu(t) = 0 :\ \kappa(t) = 0),$$
$$p(0 : k_1, \ldots, j_s) = \lim_{t\to\infty} P(\nu(t) = 0 : \kappa(t) = s; \beta_1(t) = j_1, \ldots, \beta_s(t) = j_s),$$
$$p(i_1, \ldots, i_k : 0) = \lim_{t\to\infty} P(\nu(t) = k; \alpha_1(t) = i_1, \ldots, \alpha_k(t) = i_k : \kappa(t) = 0),$$
$$p(i_1, \ldots, i_k : j_1, \ldots, j_s) =$$
$$= \lim_{t\to\infty} P\big(\nu(t) = k; \alpha_1(t) = i_1, \ldots, \alpha_k(t) = i_k : \kappa(t) = s; \beta_1(t) = j_1, \ldots, \beta_s(t) = j_s\big)$$
$$(j_1, \ldots, j_s) \in V_n^s,\ (i_1, \ldots, i_k) \in V_m^k, \quad k = 1, \ldots, m,\ s = 1, \ldots, n.$$

A szokásos módon felírhatjuk az egyensúlyi egyenleteket, amelyek a normalizáló feltétellel együtt elvben egyértelműen megoldhatók. Mint jól ismert, ha a klasszikus, lineáris egyenletrendszer megoldó módszereket alkalmazzuk az ismeretlenek nagy száma miatt memória problémák léphetnek fel. Éppen ezért célunk egy rekurziós eljárás keresése, amellyel az említett probléma kiküszöbölhető. Jelölje $\|V_k^r\|$ az V_k^r halmaz számosságát és legyen $\underline{Z}^{(k,s)}$

az alábbi módon képzett $\|V_m^k\|.\ \|V_s^n\|$ dimenziójú vektor

$$z^{(0,0)} = p(0:0), \quad \underline{Z}^{(k,s)} = \begin{pmatrix} p(1,\dots,k:1,\dots,s) \\ \vdots \\ p(1,\dots,k:j_1,\dots,j_s) \\ \vdots \\ p(i_1,\dots,i_k:j_1,\dots,j_s) \\ \vdots \\ p(m,\dots,m-k+1:n,\dots,n-s+1) \end{pmatrix},$$

$$0 \le k \le m,\ 0 \le s \le n.$$

Nem nehéz belátni, hogy ezek segíségével az egyensúlyi egyenletek az alábbi szerkezetűek:

$$\begin{aligned}
&\underline{Z}^{(0,s)} = A_{0,s}\underline{Z}^{(1,s)} + B_{0,s}\underline{Z}^{(0,s+1)} + C_{0,s}\underline{Z}^{(0,s-1)},\ 0 \le s \le n,\\
&\underline{Z}^{(k,0)} = D_{k,0}\underline{Z}^{(k-1,0)} + A_{k,0}\underline{Z}^{(k+1,0)},\ 1 \le k \le m,\\
&\underline{Z}^{(k,s)} = A_{k,s}\underline{Z}^{(k+1,s)} + D_{k,s}\underline{Z}^{(k-1,s)} + C_{k,s}\underline{Z}^{(k,s-1)},\ 1 \le k \le m,\ 1 \le s \le n,
\end{aligned}$$

ahol definíció szerint $B_{0,n} = 0,\ C_{0,0} = 0,\ A_{m,s} = 0$ matrixok $s = 0,\dots,n$, és az érintett mátrixok elemei is könnyen meghatározhatók. Először a $\underline{Z}^{(k,0)}$ vektorokat határozzuk meg. Igaz a következő állítás

1.2. Tétel. (Sztrik [J1])

Az említett vektorok rekurzíven megadhatók az alábbi módon

$$\underline{Z}^{(k,0)} = G_{k,0}\underline{Z}^{(k-1,0)}, \quad k = 1,\dots,m,$$

ahol

$$G_{m,0} = D_{m,0},\ G_{k,0} = (E - A_{k,0}G_{k+1,0})^{-1}D_{k,0}.$$

A folytatáshoz szükségünk van az alábbi módon képzett $\underline{Z}_s$ vektorra

$$\underline{Z}_s = \begin{pmatrix} \underline{Z}^{(0,s)} \\ \vdots \\ \underline{Z}^{(k,s)} \\ \vdots \\ \underline{Z}^{(m,s)} \end{pmatrix}, \quad s = 1,\dots,n.$$

Ezek segítségével az egész egyensúlyi rendszer az alábbi alakot ölti

$$\underline{Z}_s = A_s\underline{Z}_s + B_s\underline{Z}_{s+1} + D_s\underline{Z}_{s-1}, \quad 0 \le s \le n,$$

ahol definíció szerint $C_0 = 0,\ B_0 = 0$ mátrixok. Nem nehéz meggyőződni arról, hogy az érintett $A_s,\ B_s,\ C_s$ mátrixok az alábbi szalag-szerkezetűek

$$A_s = \begin{pmatrix} 0 & A_{0,s} & 0 & \cdots & 0 \\ C_{1,s} & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & A_{m-1,s} \\ 0 & \cdots & 0 & C_{m,s} & 0 \end{pmatrix}, \quad s = 0, \ldots, n,$$

$$B_s = \begin{pmatrix} B_{0,s} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s = 0, \ldots, n-1,$$

$$C_s = \begin{pmatrix} D_{0,s} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & D_{m,s} \end{pmatrix}, \quad s = 1, \ldots, n.$$

Ezek után ezen egyenletek megoldására is az előzőekhez hasonló iteratív eljárás adható meg, nevezetesen igaz a következő állítás

1.3. Tétel. (Sztrik [J1])

$$\underline{Z}_s = F_s \underline{Z}_{s-1},\ s = 1, \ldots, n,$$

ahol

$$F_n = (E - A_n)^{-1} D_n, \quad F_s = (E - A_s - B_s F_{s+1})^{-1} D_s, \quad s = 1, \ldots, n-1.$$

Mivel az egész rendszer a $p(0:0)$ mennyiségtől függ, ezért az eljárást egy tetszőleges $p(0:0)$-ból indítva a

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{s=0}^{m} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)} \sum (j_1, \ldots, j_s) p(i_1, \ldots, i_k : j_1, \ldots, j_s) = 1$$

normalizáló feltételt figyelembe véve a stacionárius valószínűségek könnyen megadhatók.

A csatolt Sztrik [J1] cikkben számos futási eredmény és optimalizálási probléma került tárgyalásra. Hasonló rendszert vizsgál a Sztrik [J6] dolgozat is.

A vizsgált rendszer pl. a Stecke, Aronson [39] dolgozatban tárgyalt homogén modell általánosítása.

1.3 Aszimptotikus módszer

Ebben a részben feltételezzük, hogy a gépek homogének, a fellépő valószínűségi változók egymástól függetlenek és exponenciális eloszlásúak, a javításokat egyetlen szerelő végzi. Az egész rendszer azonban egy véletlen környezetekben működik oly módon, hogy az $(1,\ldots,r)$ állapotterű $(\xi(t),\ t\geq 0)$ Markov-lánc állapota befolyásolja a meghibásodási ill. javítási intenzitásokat. Vagyis, ha a környezet az i állapotban van, akkor gépek meghibásodási intenzitása $\lambda(i)$, a javítási intenzitása pedig $\mu(i,\epsilon)$ lesz. Gyors kiszolgálást feltételezve $\mu(i,\epsilon)=\frac{\mu(i)}{\epsilon}\to\infty$, amint $\epsilon\to 0$.

Jelölje $(\Pi_k,\ k=1,\ldots,r)$ a kontroláló $(\xi(t),\ t\geq 0)$ Markov-lánc stacionárius eloszlását, $Y_\epsilon(t)$ a t-edik pillanatban meghibásodott gépek számát és legyen

$$\Omega_\epsilon(m)=\inf\{t:\ t>0,\ Y_\epsilon(t)=m+1|Y_\epsilon(0)\leq m\},$$

vagyis az a pillanat amikor először lesz a hibás gépek száma $(m+1)$, feltéve, hogy kezdetben számuk nem nagyobb, mint m, $m=1,\ldots,n-1$. Mivel gyors kiszolgálásról van szó $\Omega_\epsilon(m)$ a végtelenhez tart, így normalizálnunk kell. Az alábbi tétel megmutatja ezt a faktort és egyben megadja az így nyert valószínűségi változó határeloszlását is.

1.4. Tétel. (Sztrik [J29]) *A normált $\epsilon^m\Omega_\epsilon(m)$ valószínűségi változók a rendszer kezdeti állapotától függetlenül, $\epsilon\to 0$ esetén, gyengén konvergálnak egy exponenciális eloszlású valószínűségi változóhoz, melynek paramétere*

$$\Lambda=(m+1)!\binom{n}{m+1}\sum_{i=1}^{r}\pi_i\frac{\lambda(i)^{m+1}}{\mu(i)^m}.$$

Vagyis

$$P(\Omega_\epsilon(m)>t)=P(\epsilon^m\Omega_\epsilon(m)>\epsilon^m t)\approx\exp(-\epsilon^m\Lambda t)$$

azaz, $\Omega_\epsilon(m)$ aszimptotikusan $\epsilon^m\Lambda$ parameterű exponenciális eloszlást követ

$$\epsilon^m(m+1)!\binom{n}{m+1}\sum_{i=1}^{r}\pi_i\frac{\lambda(i)^{m+1}}{\mu(i)^m}=(m+1)!\binom{n}{m+1}\sum_{i=1}^{r}\pi_i\frac{\lambda(i)^{m+1}}{(\frac{\mu(i)}{\epsilon})^m}$$

paraméterrel.

Jelen modell részletes tárgyalása a csatolt Sztrik [J29] cikkben található, ahol számos összehasonlító numerikus eredményt is közlünk.

Hasonló problémákat vizsgálnak a Sztrik [J19,J20,J27,J32,J33] dolgozatok is, azzal a különbséggel, hogy pl. a gépek inhomogének, több véletlen környezetet tételezünk fel vagy szerelőbrigád hárítja el a meghibásodásokat. Minden esetben az aszimptotikus exponencialitást tudjuk bizonyítani, de természetesen ennek paraméterében szerepet kapnak a különböző feltevésekben fellépő paraméterek. A vizsgált rendszereknél numerikus példákkal szemléltetjük a közelítés használhatóságát.

A fejezethez tartozó további publikáció még a Sztrik [J25] cikk is.

Tételünk a Gaver, Jacobs, Latouche [15] dolgozatban található eredményeket általánosítja, ahol bár a gépek véletlen környezetben dolgoznak, de homogének és a rendszer hibamentes működési idejének csak az átlagát határozzák meg a szerzők.

2. SZÁMÍTÓGÉP ÉS TÁVKÖZLÉSI RENDSZEREK MODELLEZÉSE

Az előző fejezethez hasonlóan itt is a bevezetőben megadott általános modellt specializáljuk és a különböző megoldási módszereket alfejezetenként tárgyaljuk.

2.1 Numerikus módszer

Jelen részben egy olyan meghibásodható terminálrendszert modellezünk, ahol a fellépő valószínűségi változók exponenciális eloszlásúak és egymástól függetlenek. Feltételezzük, hogy a programgenerálás intenzitása minden terminál esetében λ és a kiszolgálási intenzitás μ. A programgenerálással foglalkozó terminálok γ intenzitással hibásodhatnak meg, melyeket r szerelő háríthat el. Hasonlóképpen a CPU sem megbízható, esetében a meghibásodási intenzitás α, a javítási intenzitás pedig β. A CPU meghibásodása blokkolja a terminál műveleteket és javítása prioritást élvez a terminál javításokkal szemben. Mint látható a modell a gyakorlati életben előforduló problémára adhat megoldást és célunk a szokásos rendszerjellemzők meghatározása. Megjegyezzük, hogy a terminálok esetében sztochasztikus homogenenitást tételezünk fel.

A modell érdekessége, hogy legjobb tudomásunk szerint ebben a témakörben az elsők között vesz figyelembe meghibásodható egységeket.

A szokásos módon be kell vezetnünk néhány jelölést és meg kell adnunk a működést leíró sztochasztikus folyamatot, amely az exponencialitások miatt Markov-lánc lesz.

Tehát legyen

$$\begin{aligned} X(t) &= \begin{cases} 1, & \text{ha a t-edik időpillanatban a CPU rossz,} \\ 0, & \text{ha jó,} \end{cases} \\ Y(t) &= \text{a t-edik időpillanatban a CPU-nál tartózkodó jobok száma,} \\ Z(t) &= \text{a t-edik időpillanatban a meghibásodott terminálok száma.} \end{aligned}$$

Az említettek miatt

$$M(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$$

3-dimenziós, véges Markov-lánc lesz, melynek állapottere

$$\big((i,k,s),\ 0 \le i \le 1,\ 0 \le k \le n,\ 0 \le s \le n-k\big).$$

Az egyértelműen létező stacionárius valószínűségeket jelölje

$$p(i,k,s) = \lim_{t\to\infty} P(X(t)=i,\ Y(t)=k,\ Z(t)=s).$$

A szokásos módon a $p(i,k,s)$-re vonatkozó stacionárius állapotegyenletek

$$(\alpha + n\lambda + n\gamma)p(0,0,0) = \beta p(1,0,0) + \tau p(0,0,1) + \mu p(0,1,0),$$

$$(\alpha + (n-s)\lambda + s\tau + (n-s)\gamma)p(0,0,s) = \beta p(1,0,s) + (n-s+1)\gamma p(0,0,s-1)$$
$$+ (s+1)\tau p(0,0,s+1) + \mu p(0,1,s), \quad 1 \le s \le r-1,$$

$$(\alpha + (n-s)\lambda + r\tau + (n-s)\gamma)p(0,0,s) = \beta p(1,0,s) + (n-s+1)\gamma p(0,0,s-1)$$
$$+ r\tau p(0,0,s+1) + \mu p(0,1,s), \quad r \le s \le n-1,$$

$$(\alpha + r\tau)p(0,0,n) = \beta p(1,0,n) + \gamma p(0,0,n-1),$$

$$(\alpha + \mu + (n-k)\lambda + (n-k)\gamma)p(0,k,0) = \beta p(1,k,0) + \tau p(0,k,1)$$
$$+ (n-k+1)\lambda p(0,k-1,0) + \mu p(0,k+1,0), \quad 1 \le k \le n-1,$$

$$(\alpha + \mu)p(0,n,0) = \beta p(1,n,0) + \lambda p(0,n-1,0),$$

$$(\alpha + \mu + (n-k-s)\lambda + r\tau + (n-k-s)\gamma)p(0,k,s) = \beta p(1,k,s) + \mu p(0,k+1,s)$$
$$+ (m-k-s+1)\gamma p(0,k,s-1) + r\tau p(0,k,s+1) + (n-k-s+1)\lambda p(0,k-1,s),$$
$$1 \le k \le n-r,\ r \le s \le n-k,$$

$$(\alpha + \mu + (n-k-s)\lambda + (n-k-s)\gamma + s\tau)p(0,k,s) = \beta p(1,k,s) + \mu p(0,k+1,s)$$
$$+ (n-k-s+1)\gamma p(0,k,s-1) + (s+1)\tau p(0,k,s+1)$$
$$+ (n-k-s+1)\lambda p(0,k-1,s),$$
$$n-r+1 \le k \le n-1,\ 1 \le s \le n-k,$$

$$(\beta + (r-1)\tau)p(1,k,s) = \alpha p(0,k,s) + (r-1)\tau p(1,k,s+1),$$
$$0 \le k \le n-r+1,\ r-1 \le s \le n-k,$$

$$(\beta + s\tau)p(1,k,s) = \alpha p(0,k,s) + (s+1)\tau p(1,k,s+1),$$
$$n-r+2 \le k \le n-1,\ 0 \le s \le r-2,$$

$$\beta p(1,n,0) = \alpha p(0,n,0).$$

Elvben ez az egyenletrendszer minden további nélkül megoldható, de a nagyszámú ismeretlen miatt az alapmátrix nagy memória igényű. Éppen ezért egy iterációs eljárást alkalmazunk, hogy ezt a problémát kiküszöböljük. Ehhez vezessük be a következő vektorokat:

$$\underline{Y}^{(k)} = (p(0,k,0), \dots, p(0,k,n-k))^T,\ \underline{Z}^{(k)} = (p(1,k,0), \dots, p(1,k,n-k))^T.$$

Nem nehéz belátni, hogy ezek segítségével a fenti egyenleteket alkalmasan választott mátrixokkal az alábbi alakban írhatjuk fel

$$\begin{aligned}
\underline{Y}^{(0)} &= B_0 \underline{Y}^{(0)} + C_0 \underline{Y}^{(1)} + D_0 \underline{Z}^{(0)},\\
\underline{Y}^{(k)} &= A_k \underline{Y}^{(k-1)} + B_k \underline{Y}^{(k)} + C_k \underline{Y}^{(k+1)} + D_k \underline{Z}^{(k)},\ 1 \le k \le n-1,\\
\underline{Y}^{(n)} &= A_n \underline{Y}^{(n-1)} + D_n \underline{Z}^{(n)},\\
\underline{Z}^{(k)} &= F_k \underline{Y}^{(k)} + H_k \underline{Z}^{(k)},\ 0 \le k \le n-1,\\
\underline{Z}^{(n)} &= F_n \underline{Y}^{(n)}.
\end{aligned}$$

2.1. Tétel (Sztrik [J9]) *A fenti egyenletrendszer megoldását az alábbi iterációs eljárással határozhatjuk meg*

$$\underline{Y}^{(k)} = L_k\, \underline{Y}^{(k-1)}, \quad 1 \le k \le n, \quad \underline{Z}^{(k)} = R_k\, \underline{Y}^{(k)}, \quad 0, \le k \le n,$$

ahol

$$\begin{gathered}
R_n = F_n,\ R_k = (E - H_k)^{-1} F_k, \quad 0 \le k \le n,\\
L_n = (E - D_n R_n)^{-1} A_n,\ L_k = (E - B_k - C_k L_{k+1} - D_k R_k)^{-1} A_k,\ 1 \le k \le n-1.
\end{gathered}$$

A kiindulási $\underline{Y}^{(0)}$ *vektort az*

$$(E - B_0 - D_0 R_0 - C_0 L_1)\, \underline{Y}^{(0)} = \underline{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszerből adhatjuk meg egy multiplikatív konstans erejéig, melyet a

$$\sum_{i=0}^{1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-k} p(i,k,s) = 1$$

normalizáló feltételből nyerhetjük.

Modellünk pl. a Kleinrock [27], Lavenberg [33], Nelson [35] munkákban található ú.n. megbízható terminál-rendszerek általánosításai.

A részletes tárgyalás a csatolt Sztrik [J9] cikkben található, melyben számos numerikus esettanulmányt is elemzünk. Hasonló problémát modellez a Sztrik [J8] cikk is.

Ezen jelenséget vizsgálja inhomogén terminálrendszerek esetére a Sztrik [J26] cikk, ahol a kiszolgálásnál különböző elveket tekinthetünk, pl. FCFS (First Come First Served) vagy PPS (Priority Processor Sharing), melynek speciális esete a hagyományos PS (Processor Sharing). Ezen rendszert vizsgálja Polling kiszolgálási elv mellett a Sztrik [J35] cikk is.

A terminálok heterogenitása miatt, valamint az alkalmazott elvtől függően a leíró Markov-lánc állapottere sokkal nagyobb számosságú lesz és a közölt iterációs eljárásnak még nagyobb jelentősége lesz. Megfelelő vektorok bevezetése mellett az algoritmus lényege ugyanaz, mint homogén esetben ezért az ismertetéstől eltekintünk.

Érdekes megvizsgálni, hogy a különböző a kiszolgálási elveknek milyen hatása lesz pld. a rendszer összkihasználtságára, a jobok átlagos válaszolási idejére stb. Erre ad választ több numerikus példán keresztül a Sztrik [J34,J36,J38] cikk, melyben összehasonlításokat találunk a meghibásodható és nem-meghibásodható rendszerek működési jellemzőire is. Numerikus példán keresztül megmutatjuk, hogy homogén forrás esetén meghibásodható termináloknál a kiszolgáló egység kihasználtsága függ a kiszolgálási elvtől, ellentétben a megbízható esettel. Az általunk alkalmazott iterációs eljárás stabilitását és pontosságát ellenőriztük az erlangeni egyetemen kifejlesztett programcsomag segítségével, lásd Sztrik [C9], és örömmel tapasztaltuk, hogy az általunk vizsgált esetekben a kapott eredmények megegyeztek.

2.2 Aszimptotikus módszer

2.2.1 Több-processzorú egy-buszos rendszerek

Az utóbbi időben a bonyolult számítástechnikai, telekommunikációs, valamint gyártási rendszerek modellezésében a konstruált sztochasztikus folyamat állapotainak nagy száma miatt egyre nagyobb szerepet játszanak az ún. *költségkímélő módszerek,* melyek segítségével a kívánt rendszerjellemzőkre különböző közelítéseket adhatunk meg.

Az alábbiakban egy több-processzorú egy-buszos rendszer modellezésénél mutatjuk meg, hogyan alkalmazható egy, a megbízhatóságelméletben alkalmazott aszimptotikus módszer a szokásos jellemzők meghatározására.

A történeti hűség miatt az első, egy egyszerűbb modellen keresztül szemléltetjük ezt a technikát.

Tekintsük a bevezetésben vázolt alapmodellt a következő feltételekkel.
n számú processzor exponenciális eloszlású ideig generál igényeket egy közös memória felé, melyet egy közös busz köt össze a processzorokal. A feldolgozási idők exponenciális eloszlást követnek. Feltesszük továbbá, hogy az egész rendszer viselkedését egy véges Markov-lánc állapotai befolyásolják. Ezek után legyenek a processzorok igénygenerálási intenzitásai $\lambda(i,\epsilon)$, a kiszolgálási intenzitások pedig $\mu(i)$, feltéve, hogy a lánc az i állapotban tartózkodik, $i = 1, 2, \ldots, r$. Mivel a processzorok sokkal gyorsabban dolgoznak, mint a busz, ezért $\lambda(i,\epsilon) = \frac{\lambda(i)}{\epsilon} \to \infty$, amint $\epsilon \to 0,\ i = 1, \ldots, r$.

Jelölje Ω_ϵ a busz foglaltsági periódushosszát és $(\pi_k,\ k = 1, \ldots, r)$ a kontroláló Markov-lánc stacionárius eloszlását. A feltételek miatt nyilvánvaló, hogy Ω_ϵ nagyon hosszú lesz és ezért normalizálnunk kell. Erre szolgál a következő állítás

2.2. Tétel (Sztrik [J30]) *A rendszer kezdeti eloszlásától függetlenül, $\epsilon \to 0$ esetén, az $\epsilon^{n-1}\Omega_\epsilon - k$ gyengén konvergálnak egy exponenciális eloszlású valószínűségi változóhoz, melynek paramétere*

$$\Lambda = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=1}^{r} \pi_i \frac{\mu(i)^n}{\lambda(i)^{n-1}}.$$

Következésképpen

$$P(\Omega_\epsilon > t) = P(\epsilon^{n-1}\Omega_\epsilon > \epsilon^{n-1}t) \approx \exp(-\epsilon^{n-1}\Lambda t),$$

vagyis, Ω_ϵ aszimptotikusan exponenciális eloszlású az alábbi paraméterrel

$$\epsilon^{n-1}\Lambda = \epsilon^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{r}\pi_i\frac{\mu(i)^n}{\lambda(i)^{n-1}} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{r}\pi_i\frac{\mu(i)^n}{(\frac{\lambda(i)}{\epsilon})^{n-1}}.$$

Ezek után megmutatjuk, hogyan tudjuk meghatározni a szokásos rendszerjellemzőket.

(i) Kihasználtságok

Jelölje U ill. U_p a busz össz- ill. a p-edik processzorra vonatkozó kihasználtságát. Nyilvánvalóan $U_p = \frac{U}{n}$ és ismert felújításelméleti összefüggések alapján egyszerű számítások után nem nehéz belátni, hogy

$$U = \frac{n!}{n! + \left(\sum\limits_{i=1}^{r}\pi_i\mu(i)\left(\frac{\mu(i)}{\frac{\lambda(i)}{\epsilon}}\right)^{n-1}\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{r}\pi_i\frac{1}{\frac{\lambda(i)}{\epsilon}}\right)}.$$

(ii) A processzorok áteresztőképessége

Jelölje γ_p az említett mennyiséget a p-edik processzorra vonatkozóan, ami nyilvánvalóan homogén esetben mindegyikre ugyanaz. Jól ismert, hogy

$$U_p = \gamma_p b_p,$$

ahol b_p a p-edik processzor átlagos kiszolgálási ideje. Ebből jelen esetben az alábbi összefüggést nyerjük

$$\gamma_p = \frac{U_p}{\sum\limits_{i=1}^{r}\pi_i\frac{1}{\mu(i)}}.$$

(iii) Átlagos válaszolási és várakozási idők

Jelölje T_p ill. W_p a p-edik processzortól származó igényekre vonatkozó fenti jellemzőket. Mivel

$$\gamma_p = \frac{1}{T_p + \sum\limits_{i=1}^{r}\pi_i\frac{1}{\frac{\lambda(i)}{\epsilon}}},$$

így

$$T_p = \frac{1}{\gamma_p} - \sum_{i=1}^{r}\pi_i\frac{1}{\frac{\lambda(i)}{\epsilon}},$$

valamint

$$W_p = T_p - \sum_{i=1}^{r}\pi_i\frac{1}{\mu(i)}.$$

(iv) A busznál tartózkodó igények átlagos száma

Jelölje $Q^{(p)}$ annak stacionárius valószínűségét, hogy a p-edik processzor igénygenerálási állapotban van. Jól ismert összefüggések alapján

$$Q^{(p)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} \pi_i \frac{1}{\frac{\lambda(i)}{\epsilon}}}{T_p + \sum\limits_{i=1}^{r} \pi_i \frac{1}{\frac{\lambda(i)}{\epsilon}}} = \gamma_p \sum_{i=1}^{r} \pi_i \frac{1}{\frac{\lambda(i)}{\epsilon}}.$$

Igy az említett jellemzőre a

$$\sum_{p=1}^{n} 1 - Q^{(p)} = n - \frac{U}{\sum\limits_{i=1}^{r} \pi_i \frac{1}{\lambda(i)}} \sum_{i=1}^{r} \pi_i \frac{1}{\frac{\lambda(i)}{\epsilon}}$$

formulát kapjuk.

A közölt eredmények a csatolt Sztrik [J30] cikkből valók, ahol további összehasonlító numerikus eredményeket is találhatunk.

Modellünk az Ajmone Marsan, Balbao, Conte [1], Ishigaki, Takagi, Takahashi, Hasewaga [26]-ban közölt rendszerek általánosításai, ahol a véletlen környezet nem befolyásolja a működést.

A fentebb bemutatott alapmodellnek számos általánosítási lehetősége van attól függően, hogy a processzorok homogének vagy heterogének, közös véletlen környezetben működnek vagy sajátban stb. Ennek megfelelően számos további cikk született, nevezetesen Sztrik [J16,J18,J24,C2,C4,C6]. Minden esetben a busz foglaltsági periódushosszára az aszimptotikus exponencialitást tudjuk bizonyítani, de természetesen ennek paraméterében szerepet kapnak a különböző feltevésekben fellépő paraméterek. A vizsgált rendszereknél numerikus példákkal szemléltetjük a közelítés használhatóságát.

2.2.2 Telekommunikációs rendszerek

Jelen alfejezetben egy hasonló véges-forrású rendszert vizsgálunk azzal a különbséggel, hogy az n számú igényforrás mindegyikének saját generálási és kiszolgálási intenzitása van. Tegyük fel, hogy a források egy közös véletlen környezetben dolgoznak, melynek változásait egy $(1, \ldots, r_1)$ állapotterű $\xi_1(t),\ t \geq 0)$ Markov-lánc ír le. Az igényeket egyetlen egység szolgálja ki érkezési sorrendben, de a feldolgozási intenzitásokat egy, az előzőtől független, $(1, \ldots, r_2)$ állapotterű $(\xi_2(t),\ t \geq 0)$ Markov-lánc, ill. az igényét már elküldött források száma befolyásolja.

Ezek alapján jelölje $\lambda_p(i_1, \epsilon) = \frac{\lambda_p(i_1)}{\epsilon}$, ill. $\mu_p(i_2, s)$ az említett generálási ill. kiszolgálási intenzitásokat, Ω_ϵ a kiszolgáló foglaltsági periódushosszát, $\pi_0(i_1, i_2 : 0; k_1, \ldots, k_n)$ annak stacionárius valószínűségét, hogy $\xi_1(t)$ az i_1, $\xi_2(t)$ i_2 állapotban tartózkodik, minden igény a kiszolgáló egységnél található ahová $(k_1, \ldots, k_n)$ sorrendben érkeztek. Hasonló esemény stacionárius valószínűségét jelöli $\pi_1(i_{1,2} \colon 1; k_2, \ldots, k_n)$ azzal a különbséggel, hogy a k_1 indexű forrás igénygenerálás alatt áll.

Igaz az alábbi állítás

2.3. Tétel (Sztrik [J28]) *A rendszer kezdeti eloszlásától függetlenül, $\epsilon \to 0$ esetén az $\epsilon^{n-1}\Omega_\epsilon - k$ gyengén konvergálnak egy exponenciális eloszlású valószínűségi változóhoz, melynek paramétere*

$$\Lambda = \sum_{i_1=1}^{r_1} \sum_{i_2=1}^{r_2} \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in V_n^n} \pi_0(i_1, i_2 : 1; k_2, \ldots, k_n) \frac{\mu_{k_2}(i_2, 1)}{\lambda_{k_1}(i_1)}$$
$$\times \frac{\mu_{k_3}(i_2, 2)}{\lambda_{k_1}(i_1) + \lambda_{k_2}(i_1)} \times \cdots \times \frac{\mu_{k_{m+1}}(i_2, m)}{\lambda_{k_1}(i_1) + \cdots + \lambda_{k_m}(i_1)} \frac{1}{D},$$

ahol

$$D = \sum_{j_1=1}^{r_1} \sum_{j_2=1}^{r_2} \sum_{i_1=1}^{r_1} \sum_{i_2=1}^{r_2} \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in V_n^n} \pi_0(i_1, i_2 : 0; k_1, \ldots, k_n)$$
$$\times \frac{a_{i_1 j_1} + b_{i_2 j_2}}{\left(a_{i_1 i_1} + b_{i_2 i_2} + \mu_{k_1}(i_2, 0)\right)^2},$$

és $a_{i_1 i_1}$, $b_{i_2 i_2}$ a megfelelő Markov-láncok infinitezimális mátrixának fődiagonális-beli elemeit jelöli.

Ennek segítségével az előzőekben ismertetett módon a foglaltsági periódushossz paraméterére közelítést adhatunk.

A részletes modell a csatolt Sztrik [J28] cikkben található.

Hasonló problémákkal foglalkoznak a Sztrik [J15,J17,J31,C7,J37,J39,J40] dolgozatok is azzal a különbséggel, hogy az igények saját környezetben generálódnak vagy sem, ill. hogy egyetlen kiszolgáló van vagy több. Minden esetben a kiszolgáló egység foglaltsági periódushosszára az aszimptotikus exponencialitást tudjuk bizonyítani, de természetesen ennek paraméterében szerepet kapnak a különböző feltevésekben fellépő paraméterek. A vizsgált rendszereknél numerikus példákkal szemléltetjük a közelítés használhatóságát.

Eredményeink pl. a Daigle [12], Haverkort [23], Harrison, Patel [24] munkákban található modellek általánosításai, ahol a véletlen környezet nem játszik szerepet.

2.3 Sztochasztikus szimulációs módszer

Köztudott, hogy a szochasztikus szimuláció az egyik leggyakoribb vizsgálati módszer a maga előnyeivel és hátrányaival. Véleményem szerint a szimulációt csak akkor szabad alkalmazni, ha már más módszer nem áll rendelkezésünkre. Ezt azzal indoklom, hogy a véletlen számok generálásánál a függetlenség nem teljesen valósul meg és az egyensúlyi állapot elérése is sok időt vehet igénybe. Nem beszélve még a kapott mennyiségekre adható konfidencia-intervallumok szerkesztéséről. Éppen ezért kutatásaimban kevesebb hangsúlyt fektettem erre a témára. Természetesen vannak esetek, amikor alkalmaztam. Ilyen például a 2.2.1 fejezetben ismertetett problémakör, amikor a numerikus számolásoknak korlátot szab a memória kapacitása. Mivel a jelenlegi hardver-konfigurációval csak 5-6 terminálra tudtuk megadni a jellemzőket elkészítettük a szimulációs programcsomagot is. A tesztelésre a numerikus eredményeket használtuk. Nyilvánvalóan a másik indíték az volt, hogy necsak exponenciális eloszlások esetén tudjuk modellezni a rendszert. Több, a gyakorlatban felmerülő, de még generálható eloszlást felhasználva vizsgáltuk a teljesítményjellemzőkre vonatkozó különböző hatásokat, lásd a Sztrik [C5] cikket.

A fejezethez tartozó további publikációk Sztrik [C1,C3] dolgozatok is, melyekben a modern telekommunikációs rendszerekre jellemző változó intenzitású érkezési és kiszolgálási folyamatokkal rendelkező rendszerek esetében vizsgáltuk az igényvesztés valószínűségét. Mivel ezekben a cikkekben is tételként nehezen megfogalmazható következtetések szerepelnek ezek kimondásától eltekintünk.

3. BONYOLULT RENDSZEREK MEGBÍZHATÓSÁGI VIZSGÁLATAI

3.1 Aszimptotikus módszer

A bevezetésen már utaltunk rá, hogy a szovjet matematikusok nagyon hatékony módszereket dolgoztak ki a fenti problémakörre. Az alábbiakban egy viszonylag bonyolult rendszeren szeretném bemutatni az aszimptotikus viszgálatok előnyét.

Tekintsük a bevezetésben megadott modellt a következő feltevésekkel. A n számú felújítható elem mindegyike egy véletlen környezetben funkcionál. A p-edik környezetet az $(1,\dots,r_p)$ állapoterű $(\xi_p(t),\ t\geq 0)$ Markov-lánc vezérli. Ha $\xi_p(t)$ az i_p állapotban tartózkodik és már s elem meghibásodott, melyeknek indexei $k_1,\dots,k_s,\ s=0,\dots,n-1$, akkor a p-edik egység a $(t,t+h)$ időintervallumban $\lambda_p(i_p:k_1,\dots,k_s)h+o(h)$ valószínűséggel hibásodik meg, $p\in\{1,...,n\}\setminus\{k_1,\dots,k_s\}$. A javításokat egy R tagú szerelő brigád végzi érkezési sorrend alapján. A javítók tevékenységét egy $(1,\dots,r_{n+1})$ állapotterű $(\xi_{n+1}(t),\ t\geq 0)$ Markov-lánc állapotai is befolyásolják. Tegyük fel, hogyha $\xi_{n+1}(t)$ az i_{n+1} állapotban tartózkodik, a $k_1,\dots,k_s$ indexű elemek már meghibásodtak, $s=1,\dots,n$, akkor a p-edik elemet a $(t,t+h)$ időintervalumban $\mu_p(i_{n+1}:k_1,\dots,k_s;\epsilon)h+o(h)$ valószínűséggel javítják ki, ahol $p\in\{k'_1,\dots,k'_{\min(s,R)}\}$, valamint $\{k'_1,\dots,k'_{\min(s,R)}\}$ a kiszolgálás alatt lévő elemek indexei.

További feltevéseink, hogy a fellépő összes valószínűségi változó és a véletlen környezetek egymástól függetlenek.

Gyors kiszolgálás esetén szeretnénk meghatározni a rendszer hibamentes működési idejének az eloszlását. Vagyis legyen

$$\mu_p(i_{n+1}:k_1,\dots,k_s;\epsilon)=\frac{\mu_p(i_{n+1}:k_1,\dots,k_s)}{\epsilon}\ \text{és}\ \epsilon\to 0.$$

Jelölje $Y_\epsilon(t)$ a t-edik időpillanatban hibás elemek számát és legyen

$$\Omega_\epsilon=\inf\{t:\ t>0,\ Y_\epsilon(t)=m+1|Y_\epsilon(0)\leq m\},$$

vagyis az az időtartam amíg a hibás elemek száma először lesz $m+1$, $m=1,\dots,n-1$, azaz $\Omega_\epsilon(m)$ adja meg a hibamentes működés időtartamát.

Jelölje továbbá $(\pi^{(p)}_{i_p},\ i_p=1,\dots,r_p),\ p=1,\dots,n+1$ a megfelelő Markov-láncok stacionárius eloszlását. Mivel gyors kiszolgálásról van szó, ezért láthatóan a rendszer meghibásodása ritka esemény lesz, azaz bekövetkezésének valószínűsége nagyon kicsi. Vagyis $\Omega_\epsilon(m)$ nagyon nagy lesz, így normalizálnunk kell, hogy megkaphassuk a határeloszlást. Kimondhatjuk az alábbi állítást

3.1. Tétel. (Sztrik [J21]) *A rendszer kezdeti állapotától függetlenül, $\epsilon\to 0$ esetén, $\epsilon^m\Omega_\epsilon(m)$ − k gyengén kovergálnak egy exponenciális eloszlású valószínűségi változóhoz, melynek paramétere*

$$\Lambda=\sum_{i_1=1}^{r_1}\cdots\sum_{i_{n+1}=1}^{r_{n+1}}\ \sum_{(k_1,\dots,k_{m+1})\in V_n^{m+1}}\left(\prod_{p=1}^{n+1}\pi^{(p)}_{i_p}\right)\frac{\prod\limits_{s=0}^{m}\lambda_{k_s+1}(i_k:k_1,\dots,k_s)}{\prod\limits_{s=1}^{m}\ \sum\limits_{q=1}^{\min(s,R)}\mu_{k_q}(i_{n+1}:k_1,\dots,k_s)}$$

Következésképpen $\Omega_\epsilon(m)$ eloszlását az alábbiak szerint közelíthetjük

$$p(\Omega_\epsilon(m) > t) = P(\epsilon^m \Omega(\epsilon(m) > \epsilon^m t) \approx \exp(-\epsilon^m \Lambda t),$$

azaz $\Omega_\epsilon(m)$ maga is exponenciális eloszlást követ, melynek paramétere $\epsilon^m \Lambda$.

Jelen modell a csatolt Sztrik [J21] cikkben található részletesen.

Hogy ehhez az elég bonyolult rendszerhez eljuthassunk és megismerjük a rendszer struktúráját természetesen számos modellt tanulmányoztunk, erre vonatkozó dolgozatok Sztrik [J2-J5,J7,J10-J12,J14,J22,J23]). Mindegyiknél konkrétan fel kellett írnunk a bevezetett Markov-lánc átmenetvalószínűségeit, megmutatnunk, hogy ezek előnyös struktúrájúak, és meg kellett határoznunk a határeloszlásként kapott exponenciális eloszlás paraméterét.

A vizsgált modellek olyan rendszerek általánosításai, ahol a meghibásodási és javítási intenzitások nem változnak. Ilyen irányú eredmények találhatók pl. az Anisimov [3], Gertsbakh [17,18], Gnedenko [20,21], Rukhin, Hsieh [38] munkákban.

Meg kell jegyeznünk, hogy az elsők között vizsgáltam olyan rendszereket, ahol a meghibásodási és javítási intezitásokat egy háttér folyamat állapotai befolyásolnak így bizonyos értelemben az elemek függetlenségét enyhíteni tudjuk. Ezekre a munkáimra számos hivatkozást kaptam vezető ukrán matematikusoktól, pl. I.N. Kovalenko, V.V. Anisimov.

3.2 Sztochasztikus szimulációs módszer

A német-magyar Tét együttműködés keretében olyan szimulációs programcsomagot készítettünk, ahol véges-forrású, Markov-vezérelt rendszereket tanulmányozunk, melyeknél a fellépő valószínűségi változók kevert Erlang-eloszlásúak. A rendszerjellemzőkre a Law-Carson eljárás segítségével konfidencia-intervallumot is adunk. Ilyen szoftver létezéséről nem tudunk, bár végtelen forrásra a telekommunikációs rendszerek modellezése miatt természetesen több nagyon hatékony ú.n. " tool " található, lásd pl. Haverkort [23].

Jelen programcsomag ismertetése a csatolt Sztrik [C8] cikkben található.

Az elért eredmények alkalmazása

Véleményem szerint mind elméleti mind pedig gyakorlati érdekességek is felmerülnek. A rendszerek Markov-moduláltsága lehetőséget ad a gyakorlati problémák élethűbb modellezésére de ezáltal nő a leíró Markov-lánc állapotainak száma. Ezen hátrány kezelésére rekurciós formulákat adtam meg, illetve gyors kiszolgálásnál exponenciális eloszlással való közelítést alkalmaztam. A szimulációs programcsomag nem-markovi bonyolult rendszerek vizsgálatát teszi lehetővé, amelyek nagyon jól alkalmazhatók mind a megbízhatóságelméletben mind pedig a távközlési rendszerek hatékonysági vizsgálataiban. Az eredmények közvetve vagy közvetlenül a közeli jövőben felhasználásra kerülhetnek.

Irodalomjegyzék

[1] Ajmone Marsan M., Balbao G., Conte G. *Performance Modeling of Multiprocessor Systems*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1986.

[2] Allen, Arnold O. *Probability, statistics, and queueing theory with computer science applications*, New York: Academic Press, 1978.

[3] Анисимов В.В., Закусило О.К., Донченко В.С. *Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем.* Киев, Выша школа, 1987.

[4] Ashcroft H. The productivity of several machines under the care of one operator, *J. Roy. Stat. Soc., Ser. B. 12(1950) 145-151.*

[5] Asztalos D. Optimal control of finite source priority queues with computer system applications, *Comp. Maths. Appl. 6(1980) 425-431.*

[6] Боровков А.А. *Асимптотические методы в теории массового обслуживания,* Москва, Наука, 1980.

[7] Bruneel H., Kim B.G. *Discrete-time models for communication systems including ATM,* Kluwer Academic Publisher, Boston, 1993.

[8] Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н. *Лекции по теориям сложных систем,* Москва, Сов. радио, 1973.

[9] Cooper R.B. *Introduction to queueing theory,* North Holland, New York, 1981.

[10] Dshalalow J.(editor) *Advances in queueing: Theory, methods, and open problems,* Boca Raton, FL: CRC Press, 1995.

[11] Dshalalow J.(editor) *Frontiers in queueing: models and applications in science and engineering,* Boca Raton, Fla.: CRC Press, 1996.

[12] Daigle J.N. *Queueing Theory for Telecommunications,* Addison-Wesley, New York, 1992.

[13] Erlang A.K. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges, *Post Office Electrical Engineering Journal 10(1918) 189-197.*

[14] Falin, Guennadi I. *Retrial queues,* Chapman & Hall, New York, 1997.

[15] Gaver D.P., Jacobs P.A., Latouche G. Finite birth-and-death models in randomly changing environments, *Advances in Applied Probability 16(1984) 715-731.*

[16] Gergely J. Tomkó J. A számológépek szerepe a tömegkiszolgálás-elmélet alkalmazásaiban, *MTA. III. Osztály Közleményei 2l(1972) 227-240.*

[17] Gertsbakh I.B. Asymptotic methods in reliability theory; A review, *Advances in Applied Probability 16(1984) 157-175.*

[18] Gertsbakh, Il'a Boruhovic *Statistical reliability theory,* M. Dekker, New York, 1989

[19] Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. *Введение в теорию массового обслуживания,* Москва, Наука, 1966, 1987.

[20] Гнеденко Б.В. (Под ред.) *Вопросы математической теории надежности,* Москва, Радио и связь, 1983, 376 с.

[21] Gnedenko, Boris Vladimirovic *Mathematical methods of reliability theory* Academic Press, New York, 1969

[22] Győrfi László *Tömegkiszolgálás informatikai rendszerekben,* Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1996.

[23] Haverkort, Boudewijn R. *Performance of computer communication systems: a model-based approach,* J. Wiley, Chichester, 1998.

[24] Harrison P.G., Patel N.M. *Performance Modelling of Communication Networks and Computer Architectures,* Addison-Wesley, New York, 1993.

[25] Хинчин А.Я. О среднем времени простоя станков, *Математический Сборник 40(1933) 604-615.*

[26] Ishigaki M., Takagi H., Takahashi y., Hasewaga T.(1990) Throughput and Fairness Analysis of Prioritized Multiprocessor Bus Arbitration Protocols, *Research Report RT 0051 08-17-90, IBM Research, Tokyo Research Laboratory.*

[27] Kleinrock L. *Queueing Systems, Vol. II.,Computer Applications,* Wiley-Interscience, New york, 1976.

[28] Kleinrock L. *Sorbanállás-kiszolgálás: Bevezetés a tömegkiszolgálási rendszerek elméletébe,* Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

[29] Королюк В.С. Об асимптотическом поведении времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний, *Украин. Математ. Журнал, 1969, T.21,* No 6, *c.842-845.*

[30] Королюк В.С., Турбин А.Ф. *Полумарковские процессы и их применения,* Киев, Наукова думка, 1976.

[31] Kovalenko, Igor' Nikolaevic Rare events in queueing systems, *Queueing Systems 16(1994) 1-49*

[32] Kozlov, Boris Anatol'evic *Reliability handbook* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1970.

[33] Lavenberg S.S.(Editor) *Computer Performance Modeling Handbook,* Academic Press, New York, 1983.

[34] Law A.M., Kelton W.D.) *Simulation modelling and analysis,* Mc Graw-Hill, New York, 1982.

[35] Nelson, Randolph *Probability, stochastic processes, and queueing theory: The mathematics of computer performance modeling,* Springer-Verlag, New York, 1995

[36] Palm C. The distribution of repairmen in servicing automatic machines, *Industrition, Norden, 75-1947, 75-80, 90-94, 119-123.*

[37] Papadopoulos H.T., Heavey C., Browne J. *Queueing Theory in Manufacturing Systems Analysis and Design,* Chapman and Hall, London, 1993.

[38] Rukhin A.L., Hsieh H.K. Survey of Soviet Works on Reliability Theory, *Statistical Science 2(1987) 484-503.*

[39] Stecke K.E., Aronson J.E. Review of operator-machine interference models, *International Journal of Production Research 23(1985) 129-151.*

[40] Stern T.E., Elwalid A.I. Analysis of Separable Markov-modulated Rate Models for Information-handling Systems, *Advances in Applied Probability 23(1991) 105-139.*

[41] Stewart W.J. *Numerical Solution of Markov Chains,* Marcel-Dekker, New York, 1991.

[42] Соловьев А.Д. *Резервирование с быстрым восстановлением,* Изв. АН СССР, Сер. Техн. Кибернетика, 1970, No 1, с.56-71.

[43] Takács L. On a Stochastic Process Concerning Some Waiting Time Problems Теория вероятностей и ее применения 2(1957) 92-105.

[44] Takács L. A telefon-forgalom elméletének néhány valószínűségszámítási kérdéséről, *MTA. III. Osztály Közleményei 8(1958) 151-210.*

[45] Takács L. *Introduction to the Theory of Queues,* Oxford University Press, London, Oxford 1962.

[46] Takagi H. *Queueing Analysis, A Foundation of Performance Evaluation,* Vol. I-III, North Holland, Amsterdam, 1991, 1993, 1993.

[47] Takagi H., Boguslavsky L.B. A supplementary Bibliography of Books on Queueing Analysis and Performance Evaluation, *Queueing Systems 8(1993) 313-322.*

[48] Tijms H.C. *Stochastic Modelling and Analysis; A Computational Approach,* John Wiley and Sons, Chichester, 1986.

[49] Tomkó J. CPU utilization study II, *Alk. Mat. Lapok 3(1978) 83-96.*

[50] Woodward M.E. *Communication and computer networks: Modeling with discrete-time queues,* IEEE Computer Society Press, Los Alamos, 1994.

Sztrik János dolgozatai

Nemzetközi szakfolyóirat cikkek

[J1] A. PÓSAFALVI, J. SZTRIK. A numerical approach to the repairman problem with two different types of machines, *Journal of Oper. Res. Soc.* 40 (1989) 797-803

[J2] V.V. ANISIMOV, J. SZTRIK. Asymptotic analysis of some controlled finite-source queueing systems, *Acta Cybernetica* 9 (1989) 27-39

[J3] V.V. ANISIMOV, J. SZTRIK. Asymptotic analysis of some complex renewable systems operating in random environments, *European Journ. Oper. Res.* 41 (1989) 162-168

[J4] J. SZTRIK. Asymptotic reliability analysis of some complex systems with repair operating in random environment, *Journal of Infor. Proc. Cybern.* 25 (1989) 37-43

[J5] J. SZTRIK. Asymptotic analysis of a complex renewable system operating in Markovian environments, *Publicationes Mathematicae* 36 (1989) 275-281

[J6] A. PÓSAFALVI, J. SZTRIK. On the heterogeneous machine interference with priority and ordinary machines, *European Journ. Oper. Res.* 41 (1989) 54-63

[J7] V.V. ANISIMOV, J. SZTRIK. Reliability analysis of a complex renewable system operating in Markovian environments, *Journal of Infor. Proc. Cybern.* 25 (1989) 573-580

[J8] J. SZTRIK, T. GÁL. A queueing model for a terminal system subject to breakdowns, *Computers and Maths. Applications* 19 (1990) 143-147

[J9] J. SZTRIK, T. GÁL. A recursive solution of a queueing model for a multi-terminal system subject to breakdowns, *Performance Evaluation* 11 (1990) 1-7

[J10] V.V. ANISIMOV, J. SZTRIK. Asymptotic analysis of a complex renewable system with fast service, *Cybernetics* No.3 (1990) 119-121 (in Russian)

[J11] J. SZTRIK, A.I. CHERNYAK. Asymptotic behaviour of a complex renewable standby system with fast repair, *Problems of Cont. Inform. Theory* 20 (1990) 37-44

[J12] J. SZTRIK. Limit behaviour of a controlled renewable system of type M/M/r, *Theory of Probab. Math. Statist.* 41 (1990) 137-141

[J13] J. SZTRIK. On the G/M/r/SIRO machine interference model with state-dependent speeds, *Serdica* 16 (1990) 210-216

[J14] J. SZTRIK. Asymptotic analysis of complex standby systems with fast repair, *Theory of Probab. Math. Statist.* 44 (1991) 132-135, (in Russian)

[J15] J. Sztrik. Asymptotic analysis of a heterogeneous finite-source communication system with ..., *Bulletins for Applied Mathematics* 744/91 (1991) 103-135

[J16] J. Sztrik, D. Kouvatsos. Asymptotic analysis of a heterogeneous multiprocessor system in a randomly changing environment, *IEEE Trans. Soft. Eng.* 17 (1991) 1069-1075

[J17] J. Sztrik, L. Lukashuk. Modelling of a communication system evolving in a random environment, *Acta Cybernetica* 10 (1991) 85-91

[J18] J. Sztrik. Modelling of heterogeneous multiprocessor systems with randomly changing parameters, *Acta Cybernetica* 10 (1991) 71-84

[J19] J. Sztrik, B.D. Bunday. An asymptotic approach to the multiple machine interference problem with Markovian environments, *Publicationes Mathematicae* 41 (1992) 325-339

[J20] J. Sztrik, B.D. Bunday. An asymptotic approach to the machine interference problem with Markovian environments, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sec. Comp.* 13 (1992) 135-148

[J21] J. Sztrik. Asymptotic analysis of a heterogeneous renewable complex system with random environments, *Microelectronics and Reliability* 32 (1992) 975-986

[J22] J. Sztrik. Asymptotic analysis of the reliability of a complex standby system with fast repair, *Theory of Probab. and its Appl.* 37 (1992) 132-135

[J23] J. Sztrik, L.I. Lukashuk. Asymptotic analysis of a multiple server queueing system operating in a Markovian environment, *Computational and Applied Mathematics* 76 (1992) 91-98 (in Russian)

[J24] J. Sztrik. Modelling of a single bus multiprocessor system operating in Markovian environments, *Computers and Maths. Applications* 23 (1992) 57-67

[J25] B.D. Bunday, J. Sztrik. The maintenance of bi-directionally patrolled machines, *I.M.A. Journ. Maths. Appl. in Business* 3 (1992) 377-386

[J26] B. Almási, J. Sztrik. A queueing model for a non-homogeneous terminal system subject to breakdowns, *Computers and Maths. Applications* 25 (1993) 105-111

[J27] J. Sztrik, B.D. Bunday. Asymptotic analysis of the heterogeneous machine interference problem with random environments *Applied Mathematical Modelling* 17 (1993) 105-110

[J28] J. Sztrik. Asymptotic analysis of a heterogeneous finite-source communication system operating in random environments, *Publicationes Mathematicae* 42 (1993) 225-238

[J29] J. Sztrik, B.D. Bunday. Machine interference problem with a random environment, *European Journ. Oper. Res.* 65 (1993) 259-269

[J30] J. Sztrik. Modelling of a multiprocessor system in a randomly changing environment, *Performance Evaluation* 17 (1993) 1-11

[J31] J. Sztrik, R. Rigó. On a closed communication system with fast sources and operating in Markovian environments, *J. Inform. Process. Cybernet. EIK* 29 (1993) 241-246

[J32] J. Sztrik. Limit results for switchable Markov queueing systems with a finite number of sources, *Kibernetika i Sistemnyi Analiz* 189 (1994) 79-84, (in Russian)

[J33] L. Lukashuk, J. Sztrik. Asymptotic analysis of the behaviour of a multichannel queueing system functioning in a Markov medium, *Journal of Mathematical Sciences* 75 (1995) 1852-1856

[J34] B. Almási, J. Sztrik. The effects of service disciplines on the performance of a non-reliable terminal system, *Theory of Probab. and its Appl.* 42 (1997) 374-375

[J35] B. Almási, J. Sztrik. A Queueing Model for a Non-Reliable Multi-Terminal System with Polling Scheduling, *Journal of Mathematical Sciences 92* (1998) 3974-3981

[J36] B. Almási, J. Sztrik. The effects of service disciplines on the operation of a non-reliable terminal system, *Journal of Mathematical Sciences 92* (1998) 3982-3989

[J37] J. Sztrik. Reliability analysis of complex communication systems, *Theory of Probab. and its Appl. 44* (1999) 193-194

[J38] B. Almási, J. Sztrik. Optimization Problems on the Performance of a Non-reliable Terminal System, *Computers and Mathematics with Applications 38* (1999) 13-21

[J39] J. Sztrik. Asymptotic Analysis of Complex Markov-Modulated Computer and Communication Systems, *Theory of Stochastic Processes 5(21), N3-4* (1999) 221-230

[J40] J. Sztrik. Reliability analysis of complex communication systems, *Journal of Mathematical Sciences 99* (2000) 1476-1484

Nemzetközi konferenciakiadványokban megjelent cikkek

[C1] B.D. Bunday, J. Sztrik. A heterogeneous SCAN service polling model with single-message buffer, *Proc. IFIP WG 7.3,* Kyoto, Japan (1991) 99-111

[C2] J. Sztrik, D. Kouvatsos. Performance Modelling of a Heterogeneous Multiprocessor System in a Randomly Changing Environments, *Proceedings of Performance'93* (1993) 390-394

[C3] J. Sztrik. Bounds on the Effects of Correlation in a MMPP/MMPP/1/N Queue, *Proceedings of Second Workshop on Performance Modelling and Evaluation of ATM Networks,* Chapman and Halls, London (1995) 261-281

[C4] J. Sztrik. Queueing model for a heterogeneous multiprocessor system with randomly changing parameters *Proceedings of the Second Ukrainian-Hungarian Conference on New Trends in Probability and Statistics 1992, TBiMC, Kiev* (1995) 279-291

[C5] B. Almási, J. Sztrik. Performance Simulation of a Non-Reliable Terminal System, *Proceedings of Modelling and Simulation, ESM96, Budapest, Hungary* (1996) 784-787

[C6] J. Sztrik. Asymptotic Analysis of Markov-Modulated Multiprocessor Systems, *Proceedings of 13th United Kingdom Workshop on Performance Engineering of Computer and Telecommunication Systems, Ilkley, England* (1997) 7/1-10

[C7] J. Sztrik. Asymptotic Analysis of a Finite-Source ATM System, *Proceedings of 5th IFIP Workshop on Performance Modelling and Evaluation of ATM Networks, lkley, UK* (1997) 85/1-12

[C8] J. Sztrik, O. Möller. A Tool for Simulation of Markov-Modulated Finite-Source Queueing Systems, *Proceedings of Messung Modellirung und Berwertung (MMB'99), Trier, Germany* (1999) 109-114

[C9] B. Almási, G. Bolch, J. Sztrik. Modeling Terminal Systems by using MOSEL, *Proceedings of 11th European Simulation Symposium, Erlangen, Germany* (1999) 625-629