DIGITÁLIS TECHNIKA

Dr. Oniga István

Számrendszerek

- A leggyakrabban használt számrendszerek:

	alapszám	számjegyek
• Tízes (decimális)	B = 10	0, 1, …8, 9
• Kettes (bináris)	B = 2	0, 1
• Nyolcas (oktális)	B = 8	0, 1,…6, 7
• Tizenhatos (hexadecimális)	B = 16	0, 1, …. 9, A, B, C, D, E, F

- A műszaki gyakorlatban leggyakrabban a ***decimális, bináris, és a hexadecimális*** számrendszereket használják.

Számrendszerek

Számok felírása a különböző számrendszerekben

Valamely N szám az R alapú (radixú) számrendszerben definíciószerűen

$$N_R = \pm \sum_{k=-h}^{n-1} A_k \cdot R^k$$

alakban adható meg. Itt

$$N_{egész} = A_{n-1}R^{n-1} + \ldots + A_1 R + A_0$$

az egész rész, és

$$N_{tört} = A_{-1}R^{-1} + \ldots + A_{-h+1}R^{-h+1} + A_{-h}R^{-h}$$

tört rész. Az N szám Az R alapú számrendszerben a következő alakban adható meg:

$$N_R = A_{n-1} \ldots A_1 A_0 , A_{-1} \ldots A_{-h-1} A_{-h} (R)$$

Számrendszerek

Pl. egy tízes számrendszerbeli számjegy, jelentése:

- $N = 6543_{10} = 6 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 6000+500+40+3 = 6543$
- $N = 65{,}43_{10} = 6 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} = 60+5+0{,}4+0{,}03 = 65{,}43$

Pl. egy kettes számrendszerbeli számjegy, jelentése:

- $10101101_2 = 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$
- $1011{,}1001_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4}$

Számrendszerek

Decimális	Bináris	Oktális	Hexadecimális
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	a
11	1011	13	b
12	1100	14	c
13	1101	15	d
14	1110	16	e
15	1111	17	f
16	10000	20	10

Bináris kódok, digitális kódolás

- **Az információ a digitális technikában a leggyakrabban bináris kódban van ábrázolva**
- Az információ elemi egysége a bit, **Bi**nary Digi**t.** Jele **b** (kis b betű)
- A bit egy darab kettes számrendszerbeli számjegyet jelent, értéke 0 vagy 1 lehet,
- **Kétféle lehetséges állapot:**
- Pl.
  - van, vagy nincs,
  - igen, vagy nem,
  - igaz, vagy hamis.
- 1 bitnél kisebb mennyiségű információ nincs.

……..	2^3	2^2	2^1	2^0	,	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	……..
	8	4	2	1		1/2	1/4	1/8	
Legnagyobb helyértékü					bináris vessző				Legkisebb helyértékü

Átszámítás decimális számrendszerbe

Bináris számok átszámítása decimálisra:

$N = 110001_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \;\; = 32+16+1 = 49$

$N = 100{,}011_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} = 4+0{,}25+0{,}125= 4{,}375$

Oktális számok átszámítása decimálisra:

$N = 24{,}68 = 2 \text{ x } (8^1) + 4 \text{ x } (8^0) + 6 \text{ x } (8^{-1}) = 2 \text{ x } 8 + 4 \text{ x } 1 + 6 \text{ x } 0{,}125 = 20{,}7510$

Hexadecimális számok átszámítása decimálisra:

$2AF_{16} = 2 \text{ x } (16^2) + 10 \text{ x } (16^1) + 15 \text{ x } (16^0) = 2 \text{ x } 256 + 10 \text{ x } 16 + 15 \text{ x } 1 = 687_{10}$

Házi feladat :

$110101{,}011_{(2)}=?_{(10)}$ $\qquad$ $101010{,}011_{(2)}=?_{(10)}$

$1CD{,}A2_{(16)\,)}=?_{(10)}$ $\qquad$ $467{,}57_{(8)}=?_{(10)}$

Átszámítás decimális számból más számrendszerbe

1. Az egészrész konvertálása

Az egész számok átszámítása sorozatos osztással érhető el amíg az osztás eredménye 0 nem lesz. A kiolvasás iránya: az utolsó maradéktól visszafele történik

A decimális egész-rész konvertálása binárisra

Példa: $84=?_{(2)}$

84	:2
42	0
21	0
10	1
5	0
2	1
1	0
0	1

A kiolvasás iránya

$\boxed{\text{Tehát : } 84=1010100_{(2)}}$

Átszámítás decimális számból más számrendszerbe (2)

A decimális egészrész konvertálása oktálisra

Példa: $177=?_{(8)}$

177/8	= 22+ maradék **1**	(Legkisebb helyértékű számjegy)
22/ 8	= 2 + maradék 6	
2 / 8	= 0 + maradék **2**	(Legnagyobb helyértékű számjegy)

A kiolvasás iránya

$\boxed{\text{Tehát : } 177_{10}=261_{(8)}}$

A decimális egészrész konvertálása hexadecimálisra

Példa: $378=?_{(16)}$

378/16	= 23+ maradék **10**	**A** (Legkisebb helyértékű számjegy)
23/ 16	= 1 + maradék 7	**7**
1 / 16	= 0 + maradék **1**	***1*** (Legnagyobb helyértékű számjegy)

A kiolvasás iránya

$\boxed{\text{Tehát : } 378_{10}=17A_{(16)}}$

Átszámítás decimális számból más számrendszerbe (3)

2. A törtrész konvertálása :

A törtrészt addig szorozzuk (2-vel), amíg a szorzás eredménye (1),0 nem lesz. A szorzást mindig csak a tört-résszel folytatjuk.

A decimális törtrész konvertálása binárisra

Példa: 0,3125=?$_{(2)}$

2·	0,3125
0	,625
1	,25
0	,5
1	,0

A kiolvasás iránya

Tehát : 0,3125=0,0101$_{(2)}$

Házi feladat :

97,375$_{(10)}$=?$_{(2)}$

475,8 35 937 510$_{(10)}$=?$_{(2)}$

Hexadecimálisból binárisra- és visszaszámítás

Hex	Tetrád
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001
A	1010
B	1011
C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

Hexadecimálisból úgy kapunk bináris számot, hogy **minden egyes hexadecimális számjegyet a megfelelő tetráddal helyettesítünk.**

$$5A,8_{16} = (0101)\ (1010)\ ,\ (1000)_2 = 1011010,1_2$$

Binárisból úgy kapunk hexadecimális számot, hogy a számjegyeket négyes csoportokba osszuk a kettes vesszőtől kezdve, és ezeket a megfelelő hexadecimális számjegyekkel helyettesítünk

A bal oldali csoportot a bal oldalán, a jobb oldalit pedig a jobb oldalán, nulla hozzáadásával egészítsük ki tetráddá!

$$101\ 1010\ ,11_2 = (0101)\ (1010)\ ,\ (1100)_2 = 5A,C_{16}$$

Oktálisból binárisra- és visszaszámítás

Oktálisból úgy kapunk bináris számot, hogy **minden egyes Oktális számjegyet a megfelelő triáddal helyettesítünk.**

$$53{,}6_8 = (101)\ (011)\ ,\ (110)_2 = 101011{,}11_2$$

Binárisból úgy kapunk oktális számot, hogy a számjegyeket hármas csoportokba osszuk a kettes vesszőtől kezdve, és ezeket a megfelelő oktális számjegyekkel helyettesítünk

A bal oldali csoportot a bal oldalán, a jobb oldalit pedig a jobb oldalán, nulla hozzáadásával egészítsük ki triádda!

$$1110\ {,}1_2 = (\mathbf{00}1)\ (110)\ ,\ (1\mathbf{00})_2 = 16{,}4_8$$

Oktális	Triád
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Házi feladat :

$1101001101{,}01101_2 = ?_8 = ?_{16}$,

$E37{,}1A_{16} = ?_2 = ?_8$

Példa

- Írjuk át a 725,9375 decimális számot bináris számrendszerbe!

  A szám átírása oktális számrendszerbe:

a. az egészrész átírása:

725	:8
90	5
11	2
1	3
0	1

A kiolvasás iránya

b. a törtrész átírása:

8·	0,9375
7	,5000
4	,0000

Oktális alakja : $1325,74_{(8)}$

Ennek átírása bináris számmá a jegyek három bites csoportjaival történik:

$1325,74_{(8)}$=001 011 010 101,111 $100_{(2)}$ = =$1011010101,1111_{(2)}$

BCD aritmetika

BCD = Binary Coded Decimal (binárisan kódolt decimális) – *kódot a számítástechnikában használjuk tízes számrendszerben történő számábrázoláshoz,* illetve számoláshoz

- a szám tárolása számjegyenként történik
- pl. 1956-ot nem úgy tároljuk, hogy a teljes számot átváltjuk kettes számrendszerbe (11110100100)
- hanem külön váltjuk át az egyes számjegyeket, az 1-et, 9-et, az 5-öt és a 6-ot kettes számrendszerbe:

  0001, 1001, 0101, 0110.
- Pakolt BCD kódban a szám két byte-ba kerül:

  00011001 és 01010110

BCD

	8	4	2	1
0	*0*	*0*	*0*	*0*
1	*0*	*0*	*0*	*1*
2	*0*	*0*	*1*	*0*
3	*0*	*0*	*1*	*1*
4	*0*	*1*	*0*	*0*
5	*0*	*1*	*0*	*1*
6	*0*	*1*	*1*	*0*
7	*0*	*1*	*1*	*1*
8	*1*	*0*	*0*	*0*
9	*1*	*0*	*0*	*1*
Nem használt	1	0	1	0
	1	0	1	1
	1	1	0	0
	1	1	0	1
	1	1	1	0
	1	1	1	1

Előjel ábrázolása

– Az előjeles bináris számok is csak 0-ás és 1-es karakterekből állnak.

–A műszaki gyakorlatban ***0 a pozitív, az 1 a negatív szám előjegy –e***

–Az előjeles bináris számok, számábrázolás módjai közül legismertebbek:

a) előjeles ***abszolútértékes,***

b) előjeles ***komplemens -es***

a) „Előjelnagyság” ábrázolása = Az első biten az előjelet, a többin az abszolútértéket ábrázoljuk

Pl.: $+85_{10}=01010101_2$ $-85_{10}=11010101_2$

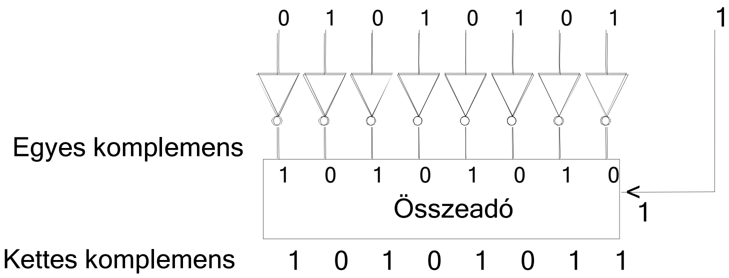
b)Egyes komplemens ábrázolás = Az első biten az előjelet, a többin az abszolútérték 1-es komplemensét ábrázoljuk

Pl.: $+85_{10}=01010101_2$ $-85_{10}=10101010_2$

–Kettes komplemens ábrázolás =

Egyes komplemens plussz egy

Pl.: $+85_{10}=01010101_2$ $-85_{10}=10101011_2$



Kettes komplemens ábrázolása

Kettes számrendszerben a legkisebb helyi érték felöl indulva lemásoljuk a számjegyeket az első 1-es értékig (azt is), a többi jegy helyet bitenként invertáltjuk.

Pl. legyen egy 8 bites számunk : $01111010_2 = +122_{10}$

A kettes komplemense : 10000110 = -122

Kettes komplemensebe ábrázolt szám decimális értéke:

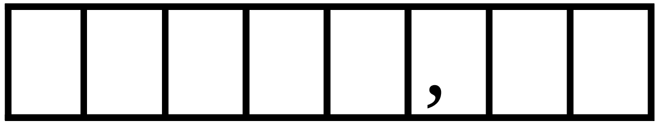
Oszlop helyértéke:	–128	64	32	16	8	4	2	1.	
	1	0	0	0	0	1	1	0	
	–128					+4	+2		= –122

Bináris számok ábrázolása

Nagyságrend ábrázolása

–Fixpontos számábrázolás

A tizedesvessző rögzített helyen (rendszerint az első értékes jegy előtt) van



– Lebegőpontos számábrázolás IEEE-754 sz. szabványnak megfelelően - 4 bájtban (32 bit) történik

32 bit		
S	Exponent (E)	Mantissza.(F)
1 bit	8 bit	23 bit

Előjel

Hatvány kitevő

A szám normalizált értéke

– Egy 32 bites lebegőpontos számábrázolás egy 129 bites bináris ábrázolást helyettesithet

Lebegőpontos számábrázolás

A kitevő 8 bites 127-el eltolva, ez lehetővé teszi, hogy negatív kitevőjű értéket is meg lehet adni +128 és – 127 értékek közt.

A szám 24 biten fejezhető ki, de ebből ténylegesen csak 23-at, a tört-vesszőt követő részt tartalmazza

Pl. : $1011010010001 = 1{,}011010010001 \times 2^{12}$

$E = 12+127=139 = 10001011$ Mantissza : ,011010010001

S	E	F
0	10001011	01101001000100000000000

Egy lebegőpontos formájú szám értékének a számítása

$$N = (-1)^S(1+F)(2^{E-127})$$

Pl. :

1	10010001	10001110001000000000000

$N = (-1)^1(1{,}10001110001)(2^{145-127}) = (-1)^1(1{,}10001110001)(2^{18}) = -1100011100010000000 = -407.680_{10}$

HIBAFELISMERŐ ÉS HIBAJAVÍTÓ KÓDOK

Legegyszerűbb hibafelismerési eljárás:

paritásbit átvitele

- páros paritás
- páratlan paritás

Páros paritás		Páratlan paritás	
P	BCD	P	BCD
0	0000	1	0000
1	0001	0	0001
1	0010	0	0010
0	0011	1	0011
1	0100	0	0100
0	0101	1	0101
0	0110	1	0110
1	0111	0	0111
1	0100	0	0100
0	1001	1	1001

A paritás képzés hátrányai:

– Nem tudjuk kijavítani a hibát, ha detektáljuk is

– Ha egyszerre több bit hibásodik meg, nem biztos, hogy a paritásellenőrzés felfedezi, mert lehet, hogy egyszerre két (vagy páros számú) bit is megváltoztatja értékét.

- Hibajavító kódok:
  - Hamminng kód
  - Red Solomon kód

Alfanumerikus információ kódolása

- ASCII kód (American Code for Information Interchange) szabvány
  - 0-tól a 127-es kódig rögzített - angol ABC + számjegyek és jelek,
  - afölött többféle változat lehetséges (pl. görög ABC, magyar ékezetes betűk, cirill betűk, szimbólumok, stb.)

128 €	144	160	176 °	193 Á	209 Ñ	225 á	241 ñ
129	145 ‘	161 ¡	177 ±	194 Â	210 Ò	226 â	242 ò
130 ‚	146 ’	162 ¢	178 ²	195 Ã	211 Ó	227 ã	243 ó
131 ƒ	147 “	163 £	179 ³	196 Ä	212 Ô	228 ä	244 ô
132 „	148 ”	164 ¤	180 ´	197 Å	213 Õ	229 ;	245 õ
133 …	149 •	165 ¥	181 µ	198 Æ	214 Ö	230 æ	246 ö
134 †	150 –	166 ¦	182 ¶	199 Ç	215 ×	231 ç	247 ÷
135 ‡	151 —	167 §	183 ·	200 È	216 Ø	232 è	248 ø
136 ˆ	152 ˜	168 ¨	184 ¸	201 Ì	217 Ù	233 é	249 ù
137 ‰	153 ™	169 ©	185 ¹	202 Ê	218 Ú	234 ê	250 ú
138 Š	154 š	170 ª	186 º	203 Ë	219 Û	235 ë	251 û
139 ‹	156 œ	171 «	187 »	204 Ì	220 Ü	236 ì	252 ü
140 Œ	157 ?	172 ¬	188 ¼	205 Í	221 Ý	237 í	253 ý
141 ?	158 ž	173	189 ½	206 Î	222 Þ	238 î	254 þ
142 Ž	159 Ÿ	174 ®	190 ¾	207 Ï	223 ß	239 ï	255 ÿ
143 ?	192 À	175 ¯	191 ¿	208Ð	224 à	240 ð	

ASCII	DEC	HEX	ASCII	DEC	HEX	ASCII	DEC	HEX	ASCII	DEC	HEX
NULL	0	00	(SP)	32	20	@	64	40	`	96	60
SOH	1	01	!	33	21	A	65	41	a	97	61
STX	2	02	"	34	22	B	66	42	b	98	62
ETX	3	03	#	35	23	C	67	43	c	99	63
EOT	4	04	$	36	24	D	68	44	d	100	64
ENQ	5	05	%	37	25	E	69	45	e	101	65
ACK	6	06	&	38	26	F	70	46	f	102	66
BEL	7	07	'	39	27	G	71	47	g	103	67
BS	8	08	(	40	28	H	72	48	h	104	68
HT	9	09	)	41	29	I	73	49	i	105	69
LF	10	0A	*	42	2A	J	74	4A	j	106	6A
VT	11	0B	+	43	2B	K	75	4B	k	107	6B
FF	12	0C	,	44	2C	L	76	4C	l	108	6C
CR	13	0D	-	45	2D	M	77	4D	m	109	6D
SO	14	0E	.	46	2E	N	78	4E	n	110	6E
SI	15	0F	/	47	2F	O	79	4F	o	111	6F
DLE	16	10	0	48	30	P	80	50	p	112	70
DC1	17	11	1	49	31	Q	81	51	q	113	71
DC2	18	12	2	50	32	R	82	52	r	114	72
DC3	19	13	3	51	33	S	83	53	s	115	73
DC4	20	14	4	52	34	T	84	54	t	116	74
NAK	21	15	5	53	35	U	85	55	u	117	75
SYN	22	16	6	54	36	V	86	56	v	118	76
ETB	23	17	7	55	37	W	87	57	w	119	77
CAN	24	18	8	56	38	X	88	58	x	120	78
EM	25	19	9	57	39	Y	89	59	y	121	79
SUB	26	1A	:	58	3A	Z	90	5A	z	122	7A
ESC	27	1B	;	59	3B	[	91	5B	{	123	7B
FS	28	1C	<	60	3C	\	92	5C	|	124	7C
GS	29	1D	=	61	3D	]	93	5D	}	125	7D
RS	30	1E	>	62	3E	^	94	5E	~	126	7E
US	31	1F	?	63	3F	_	95	5F	(sp)	127	7F